

不均質浸透場における巨視的分散のパラメータ推定

Parameter Estimation of Macroscopic Dispersion in Nonhomogeneous Seepage Flow Field

室蘭工業大学工学部 藤間 聡 S.Tohma

1. はじめに

低レベル放射性廃棄物の地中処分において、安全評価手法を確立するため多様な観点から漏出核種の移行挙動の予測、評価が試みられている¹⁾。移行挙動の予測に関しては、主として移流拡散方程式を用いてモデル化し、有限要素法あるいはモンテカルロ法を適用して種々の初期・境界条件の下で解析されている²⁾。この場合、溶質移行挙動を規定するパラメータの中で分散係数は、等方均質多孔体の分散係数を適用することが多いため、現実の不均質地層における溶質移行挙動の予測結果は、一般に信頼度が低いと考えられる。

本研究は、透水係数が異なる多層で構成される被圧帯水層モデルにおける保存系溶質の移流に基づく分散現象を解析対象とし、分散係数の定式化、溶質の分散形態とその経時変化を推定し、その適用性について検討した結果を述べるものである。

2. 成層被圧帯水層における分散過程

2-1. 基礎式

対象とする帯水層モデルは、図-1に示す透水係数の異なる多層で構成される被圧帯水層であり、層厚は一定で、水平方向の流動域は無限とする。ここで、以後本帯水層を成層帯水層と呼称する。帯水層内の地下水流動は層に平行な一方向定常剪断流とし、流速は鉛直方向の位置の関数で与えられるものとする。この流れ系に溶質を瞬間的に線状放出した場合、任意時間経過後の溶質は図-2に示す分布形を呈する。図中の英字Aは空隙径の偏差に基づく微視的分散帯を、同じくBは透水係数の変動に基づく巨視的分散帯を表わす。

微視的分散過程の溶解物質の挙動は、次の分散方程式で示される。

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -V(z)\frac{\partial c}{\partial x} + D_1(z)\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z} [D_2(z)\frac{\partial c}{\partial z}] \quad 0 \leq x < \infty, 0 \leq z \leq h \quad \dots(1)$$

ここに、cは分散物質濃度、Vは実流速、D₁は微視的縦方向分散係数、D₂は同じく横方向分散係数、hは帯水層総厚、x、zは位置座標、tは時間をそれぞれ表わす。

以後の解析を容易に行なうため、各水理量の断面平均量を用いて変数変換し、(1)式の無次元化を行なう。

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = -\alpha V^* \frac{\partial C}{\partial \xi} + D_1^* \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \eta} (D_2^* \frac{\partial C}{\partial \eta}) \quad \dots(2)$$

$$\text{ここに、} C = [D_1/D_2]^{1/2} \rho ch/m, \tau = \bar{D}_2 t/h^2, \xi = [\bar{D}_2/\bar{D}_1]^{1/2} (x - \bar{V}t)/h, \eta = z/h, \alpha = \bar{V}h/[\bar{D}_1 \bar{D}_2]^{1/2}, V^* = (V - \bar{V})/\bar{V}, D_1^* = D_1/\bar{D}_1, D_2^* = D_2/\bar{D}_2. \quad \dots(3)$$

上式中、mは単位空隙面積当たりの分散物質質量、ρは流体密度、記号 $\bar{}$ は断面平均量を表わす。

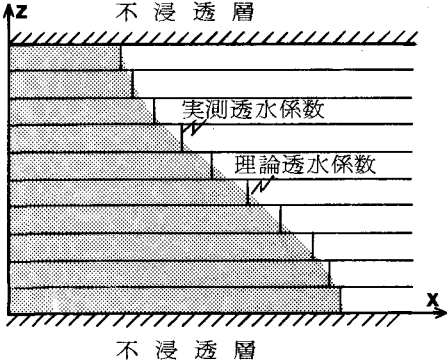


図-1 成層被圧帯水層モデル

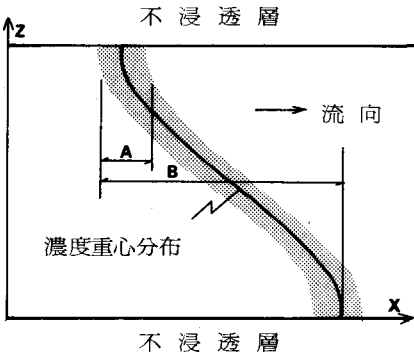


図-2 微視的分散帯と巨視的分散帯

2-2. 断面平均濃度分布

成層帯水層において流速分布は一様でなく、溶質の平均移動距離は各層で差異を生ずる。この結果、採用する測定法により異なった濃度破過曲線が得られる。例えば、観測井の一定水深に濃度検出器を設置する場合は、図-2に示す微視的分散帯Aの濃度分布が得られる。また、観測井の全断面もしくは区間から揚水し、その濃度を測定する場合には断面平均濃度分布が得られる。断面平均濃度分布の推定に関しては、一般に一次元移流拡散方程式が用いられるが、濃度分布が正規分布以外の場合には推定誤差が大きく、複雑な流れ系には適用し難いと考えられる。本解析では濃度積率法³⁾を用いて断面平均濃度分布の定式化を行なう。

無次元移動座標系 ξ において、原点 $\xi=0$ で瞬間に放出された分散物質は流下に伴い不規則な挙動を繰り返す、その遷移は確率的となり、任意時間経過後の分散物質の位置は確率変数 Ξ で表わすことができる。この結果、濃度分布の定式化問題は次式で示す確率変数 Ξ の密度関数 $f(\xi)$ を求めることに帰着される。

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right) \left[1 + \frac{\lambda_3}{6\sigma^3} H_3\left(\frac{\xi}{\sigma}\right) + \frac{\lambda_4}{24\sigma^4} H_4\left(\frac{\xi}{\sigma}\right) + \frac{\lambda_5}{72\sigma^5} H_5\left(\frac{\xi}{\sigma}\right) + \dots\right] \quad \dots(4)$$

$$H_3 = (\xi/\sigma)^3 - 3(\xi/\sigma), H_4 = (\xi/\sigma)^4 - 6(\xi/\sigma)^2 + 3, H_5 = (\xi/\sigma)^5 - 15(\xi/\sigma)^3 + 45(\xi/\sigma) - 15,$$

$$\lambda_3 = m_3/m_0 = f_1\sigma^3, \quad \lambda_4 = m_4/m_0 - 3(m_2/m_0)^2 = (f_2 - 3)\sigma^4.$$

ここに、 λ_3, λ_4 は3, 4次のキュムラント、 f_1 は歪度(skewness), f_2 は尖度(kurtosis)、 H はHermite多項式、 m は平均値回りの濃度積率を表わす。上式において、キュムラント λ_3, λ_4 がいずれも零の場合にのみ断面平均濃度分布は正規分布となる。他の場合は、 λ_3, λ_4 の値に応じて正に歪んだ非対称の濃度分布形が得られ、現在慣用されている一次元移流拡散方程式では推定できない分布形となる。

2-3. 巨視的分散係数

本節では図-1に示すような透水係数の空間分布が余弦関数で近似できる場合の巨視的分散係数の定式化を行なうこととする。

$$k = \bar{K}[1 + a \cdot \cos(\pi \eta)] \quad \dots(5)$$

ここに、 k は任意の高さ η における透水係数、 $\bar{K}$ は断面平均透水係数、 a は比例定数を示す。

帯水層内の浸透流が水平流の場合、巨視的分散係数 K_1 と溶質分子の分散(variance) σ_x^2 との間には次の関係が成立する⁴⁾。

$$K_1 = \frac{1}{2} \frac{d\sigma_x^2}{dt} = \frac{\bar{D}_1}{2} \frac{dm_2}{d\tau} \quad \dots(6)$$

ここに、 $\bar{D}_1$ は微視的縦方向分散係数の断面平均を表わす。

(6)式の2次積率 m_2 を求めるため、(2)式の各項に ξ^n を乗じ、 $(-\infty, \infty)$ 区間で積分を行なうと次式を得る。

$$-\frac{\partial \theta_n}{\partial \tau} = n\alpha V^* \theta_{n-1} + n(n-1)D_1^* \theta_{n-2} + \frac{\partial}{\partial \eta} (D_2^* \frac{\partial \theta_n}{\partial \eta}) \quad \dots(7)$$

ここに、 θ_n は次式で定義される無次元濃度積率である。

$$\theta_n = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^n C d\xi \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad \dots(8)$$

この無次元濃度積率 θ_n は(4)式中の平均値回りの濃度積率 m_n との間に次の関係が成立する。

$$m_n = \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} \xi^n C d\xi d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^n C d\eta = \bar{\theta}_n \quad \dots(9)$$

ここに、 $\bar{\theta}_n$ は断面平均濃度に関する積率を表わす。

(7)式の各項を η に関して $(0, 1)$ 区間で積分し、(9)式を考慮すると平均値回りの積率微分方程式を得る。

$$\frac{\partial \bar{m}_n}{\partial \tau} = n\alpha \int_0^1 V^* \theta_{n-1} d\eta + n(n-1) \int_0^1 D_1^* \theta_{n-2} d\eta \quad \dots(10)$$

一方、1次濃度積率 θ_1 は、透水係数の空間分布設定条件から次式を満足する。

$$-\frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} = \alpha a \cdot \cos(\pi \eta) + \frac{\partial}{\partial \eta} (D_2^* \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta}) \quad \dots(11)$$

上式中の D_2^* を求めるには、各層の微視的横方向分散係数 D_2 を必要とする。本節では、微視的横方向分散係数を(i)断面で一定、(ii)浸透流速に比例の二つの場合に分けて解析を行なう。

(i) 微視的横方向分散係数 D_2 が帯水層内で一定の場合

各層において Peclet 数が 10 以下の状態では、微視的横方向分散係数は多孔体の空隙系特性に影響されずに有効分子拡散係数の値に漸近し一定値となる⁵⁾。この結果、 $D_2^* = 1$ となり、(11) 式は次式で与えられる。

$$\theta_1 = \frac{\alpha a}{\pi} \cos(\pi \eta) [1 - \exp(-\pi^2 \tau)] \quad \dots(12)$$

この θ_1 は図-2 の実線で示す濃度重心位置を表わす。また、巨視的分散係数は(6), (10) 式から次式で与えられる。

$$K_1 = \bar{D}_1 + \frac{\bar{V}^2 h^2 a^2}{2 D_2 \pi^2} [1 - \exp(-\pi^2 \tau)] \quad \dots(13)$$

上式から溶質は放出源付近の領域では、右辺第 1 項の微視的スケールの分散が卓越し、時間の経過に伴い第 2 項の移流による巨視的スケールで分散すると考えられる。

(ii) 微視的横方向分散係数 D_2 が浸透流速に比例する場合

この状態において、透水係数が各層を構成する土粒子径の 2 乗に比例することを考慮すると無次元横方向分散係数は次式で与えられる。

$$D_2^* = \frac{[1 + a \cos(\pi \eta)]^{3/2}}{1 + 3a^2/16} \quad \dots(14)$$

(14) 式を(7) 式に代入すると、同式は非斉次方程式となり、解析的に取り扱うことが困難となる。従って、本節では(7) 式の右辺第 2 項を無視した場合の放出源付近の分散初期と左辺の濃度時間変化率を無視した場合の定常期とに分離してそれぞれ巨視的分散係数を求めると次式で与えられる。

$$\text{分散初期: } K_1 = \bar{D}_1 + \frac{\bar{V}^2 a^2 t}{2} \quad \dots(15)$$

$$\text{定常期: } K_1 = \frac{2 \bar{V}^2 h^2}{D_2 \pi^2} (1 + \frac{3a^2}{16}) \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{(j-1)!!}{j!!} \right]^2 a^j \quad (j!! = j(j-2) \dots 4 \cdot 2) \quad \dots(16)$$

ここに、 j は偶数を表わす。

2-4. 微視的分散係数の同定

前節の巨視的分散係数の決定には、各層の微視的縦、横方向分散係数をあらかじめ正確に把握しておく必要がある。本解析においてはこの微視的分散係数を客観的かつ機械的に求めるため Powell の共役方向法⁶⁾ を適用する。微視的分散現象に関しては、汎用性をもたすため次の三次元移流拡散方程式を用いる。

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -V \frac{\partial C}{\partial x} + D_1 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_2 \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_2 \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \quad \dots(17)$$

$$\text{初期条件: } C(x, y, z, t=0) = 0 \quad \dots(18)$$

$$\text{境界条件: } C(x=0, y, z, t) = C_0 e^{-\gamma t} \quad \dots(19)$$

$$C(x \rightarrow \infty, y, z, t) = 0 \quad \dots(20)$$

ここで、境界条件の γ は濃度減衰率を示し、実験において分散物質を矩形状に瞬間放出することが困難であり、実際に生起する挙動を再現するため導入している。(17) 式の解は(21) 式となり、式に含まれる 4 個のパラメータ γ, C_0, D_1, D_2 を Powell 法により最適同定する。

$$C = \frac{C_0 Q}{8 \pi D_1 R} \exp(-\gamma t) \exp\left(-\frac{Vx - \beta R}{2 D_1}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{R - \beta t}{\sqrt{4 D_1 t}}\right) \quad \dots(21)$$

ここに、 $R = [x^2 + (D_1/D_2)y^2 + (D_1/D_2)z^2]^{1/2}$ 、 $\beta = [V^2 - 4 D_1 \gamma]^{1/2}$ であり、 $\operatorname{erfc}(\cdot)$ は余誤差関数、 Q は流量を表わす。

微視的分散係数の最適同定の評価基準には、解析目的、測定値の精度に応じて種々の形式が考えられるが、本解析においては分散実験に用いるトレーサ濃度検出器の感知性能を考慮して高濃度部の測定値と(21) 式との絶対残差の最小化を用いる。この共役方向法は制約条件のない場合に限り有効であるため負の分散係数を得る可能性がある。この場合においても機械的な演算は可能であるが、分散係数の物理的意味を失う。この欠点を避けるため負値が得られた場合、大きな正定値を加え再度探索を実行し、分散係数の最適同定値を求める手法を採用する⁷⁾。

3. 解析結果と考察

本章においては、前章で得られた解析法を室内分散実験に適用し、巨視的分散係数および平均濃度分布の推定を行ない、その妥当性を検討する。

3.1 室内分散実験

帯水層モデルは総厚30cm、幅40cm、長さ70cmの被圧帯水層であり、表-1に示す試料砂を用い、各層厚6cmの5層から構成され、第1層の表層から第5層の底層まで鉛直方向にその粒径を増加させてある。トレーサには1%濃度の塩水を用い、瞬間線状放出したのち15cm間隔に配置した完全貫入井において、濃度検出時から終了まで塩分濃度を測定し、電子計算機で測定データの記録、処理および図化を行なう。

3.2 微視的分散係数と濃度分布特性

各層の微視的分散係数を決定するため、成層帯水層と同一寸法の均質帯水層を各層を構成する砂で個々に作製し、動水勾配 $i=0.06$ の一樣流条件のもとで分散実験を行ない、測定値をPowell法により最適同定した結果を表-1に示す。縦方向分散率 ϵ_1 は空隙径に比例し、横方向分散率 ϵ_2 は試料砂の粒径範囲でほぼ一定値を示す。図-3は第4層を構成する砂の均質帯水層において、動水勾配 $i=0.03$ の水利条件下でトレーサ放出点から50cm地点で得られた濃度破過曲線を示す。黒丸印で示す実測値は、測定時間2925秒、測定間隔15秒で得られたものであり、実線で示す理論値と低濃度部を除いて精度よく一致している。縦、横方向分散率はそれぞれ $\epsilon_1=0.21\text{cm}$ 、 $\epsilon_2=0.03\text{cm}$ となり、表-1に示される値とほぼ等しい。この結果、微視的分散率は物理的に空隙内の浸透流速の相関距離を表わし媒体固有の値となり、分散過程はFick則に従い溶質濃度分布は正規分布となる。

3.3 巨視的分散係数と断面平均濃度分布

巨視的分散実験に関して、トレーサ放出点から20, 35, 50cmの位置にある観測井の各層中央点で濃度測定を行ない、測定値の単純平均を断面平均濃度と定義した。この断面平均濃度の一例を図-4に示してある。図中の黒丸印は測定値であり、実線は(4)式による理論値を示す。理論値は前節で得られた微視的縦、横分散係数を用いたもので、測定濃度の分布特性を精度よく推定できることを示している。この断面平均濃度分布は放出直後ではパルス状を呈しているが、流下経過時間に伴いその尖度は減滅し、逆に歪度は増加する傾向を示している。この機構については次のように推定される。成層帯水層においては、透水係数の大きな高速層でトレーサの流動に伴い流向に直角方向の濃度勾配が次第に急となり、横方向分散により低速層へトレーサの一部を輸送する。一方、低速層では既に高濃度部が流過した高速層へ濃度勾配に比例したトレーサ量を供給する。この結果、高速層の濃度分布は減衰部が長く尾を引き、低速層では逆に上昇部が遷増し、とも

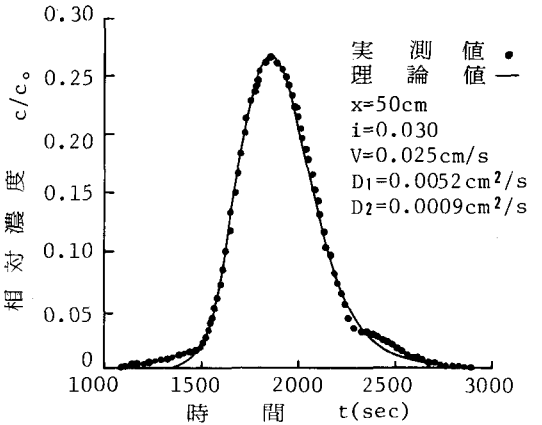


図-3 均質帯水層の濃度破過曲線

表-1 成層帯水層モデルの水利諸元

層	粒径範囲 d(mm)	透水係数 k(cm/s)	流速 V(cm/s)	微視的分散係数		微視的分散率	
				$D_1(\text{cm}^2/\text{s})$	$D_2(\text{cm}^2/\text{s})$	$\epsilon_1(\text{cm})$	$\epsilon_2(\text{cm})$
1	0.15~0.30	0.03	0.005	0.0006	0.0001	0.13	0.02
2	0.30~0.40	0.10	0.015	0.0030	0.0003	0.20	0.02
3	0.40~0.60	0.25	0.038	0.0083	0.0008	0.22	0.02
4	0.60~0.71	0.36	0.054	0.0124	0.0016	0.23	0.03
5	0.71~0.85	0.46	0.069	0.0159	0.0021	0.23	0.03

に濃度分布が引き伸ばされた形状となる。この濃度平滑化現象により分散帯が漸次拡大し、断面平均濃度分布は尖度が減少し、歪度は増加する。図-5は(11)式から求めた巨視的分散係数、歪度および尖度の経時変化を表わす。図中の $K_{1\infty}$ は $\tau \rightarrow \infty$ における巨視的分散係数の漸近値を示す。歪度 f_1 は $\tau < 0.2$ で急減し、その後は $\tau^{-1/2}$ の遞減率で0に漸近する。一方、尖度 f_2 は f_1 より遅れて $\tau < 0.3$ で急減し、 τ^{-1} の遞減率で正規分布の3に漸近する。本実験における分散時間は $\tau = (1.0 \sim 3.3) \times 10^{-3}$ であり、歪度、尖度ともに非常に大きな領域にある。一方、巨視的分散係数は漸近値に比較して小さく、いまだ微視的分散が卓越している領域にあることが推定できる。また、この図から巨視的分散係数 K_1 と歪度 f_1 は比較的短時間である定値に漸近する傾向を示すが、尖度 f_2 は長時間経過後も正規分布の尖度3に漸近しないため、濃度破過曲線は常に歪んだ形状となる。

巨視的縦方向分散係数の実験値と理論値を表-2に示す。分散係数は移流の寄与が大きく、流下距離または時間の関数となり、その絶対値は微視的分散係数から予測できないオーダーにある。分散係数が一定となる状態に達するまでに要する流下距離は本実験条件では32.8mであり、小規模な室内実験においては再現不可能なスケールとなる。

以上の結果、巨視的分散係数は帯水層の幾何学特性、地下水の運動学特性等の複雑な関数となり、微視的分散係数のように多孔体固有値とはならない。また、断面平均濃度分布は強い歪みをもち、正規分布にならないためFick則が成立しないことになる。

従って、広範な現地帯水層における分散機構を小規模な分散実験結果から推定する

ことは非常に困難であり、また、現在慣用されている一次元移流拡散方程式では正確に表現できないと考えられる。

本解析法は、室内分散実験結果との比較から、溶質放出源付近の複雑な剪断流場における分散現象を規定する分散係数と断面平均濃度分布を実用上支障のない精度で推定できると考えられる。

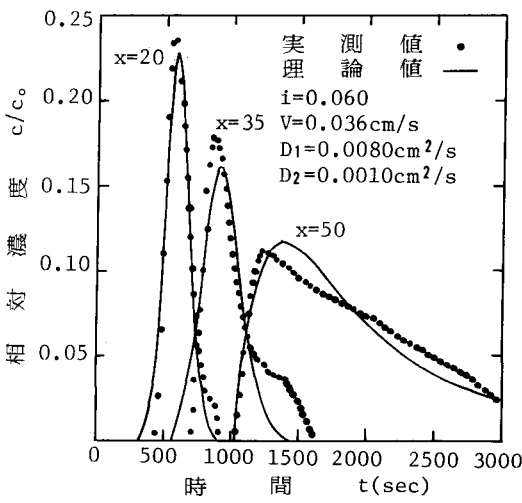


図-4 断面平均濃度分布

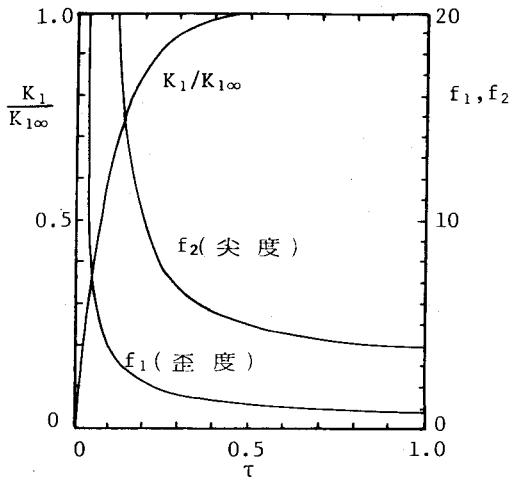


図-5 巨視的分散係数、歪度および尖度の経時変化

表-2 巨視的分散係数の実験値と理論値

動水勾配	方 法	流速 V(cm/s)	巨視的縦方向分散係数 K_1 (cm ² /s)		
			35.0cm地点	42.5cm地点	漸近値
0.0571	実験	0.0375	0.256	0.453	51.652
	理論	0.0360	0.445	0.540	
0.0714	実験	0.0453	0.384	0.701	67.245
	理論	0.0450	0.437	0.674	
0.0929	実験	0.0665	0.483	0.890	89.367
	理論	0.0580	0.716	0.870	
0.1286	実験	0.0843	0.536	0.998	118.254
	理論	0.0809	0.998	1.212	
0.1429	実験	0.1130	0.738	1.457	132.702
	理論	0.0894	1.104	1.340	

4. 結 論

不均質浸透場の分散現象を規定する巨視的分散係数、断面平均濃度分布に関して濃度積分法を用いて定式化を行ない、その水理特性を明らかにした。主な結論を要約すると以下のようになる。

- (1) 本解法は、不均質浸透場の簡単なモデルである成層帯水層の分散過程に関して、溶解物質の分散形態とその経時変化を十分な精度で推定できる。
- (2) 濃度重心の移動速度が浸透流速に達しない放出源付近の分散領域では、巨視的分散係数は多層系の流速偏差と平均流速との関数であり、移動距離に比例して増大する。
- (3) 濃度重心の移動速度が浸透流速にほぼ等しい領域では、巨視的分散係数は一定となり、多層系の平均流速、層厚及び微視的横方向分散係数の関数で与えられる。
- (4) 断面平均濃度分布は分散時間 t の経過とともに歪度は $t^{-1/2}$ の減少率で、また尖度は t^{-1} の減少率で減衰し、 $t \rightarrow \infty$ の極限で正規分布となる。

謝 辞：本研究を進めるにあたり、有益なご助言を頂いた本学土木工学科近藤俊郎教授に謝意を表します。また、実験、資料整理等に多大な協力を得たパシフィックコンサルタント株式会社 高畠 英博氏に厚く御礼申し上げます。

参考文献

- 1) 佐藤邦明、佐々木康夫：岩における放射性核種の挙動に関する研究、第30回水理講演会論文集、pp.283-288,1986.
- 2) 河西基、井上幸雄：モンテカルロ法による放射性核種地中移行の確率的解析、第30回水理講演会論文集、pp.289-294,1986.
- 3) Molz, F.J., O.Guven, and J.G.Melville: An examination of scale-dependent dispersion coefficients, Groundwater, Vol.21, No.6, pp.715-725, 1983
- 4) Scheidegger, A.E., The physics of Flow through Porous Media, Univ.Toronto Press, p.142, 1960.
- 5) Fried, J.J., and M.A.Combarous, Dispersion in porous media, Adv. Hydroscience, Vol.7, pp.228-229, 1971.
- 6) Powell, M.J.D., An efficient method for finding the minimum of several variables without calculating derivatives, Com.J., pp.155-162, 1964.
- 7) 小林慎太郎・丸山和輔, Powellの共役方向法によるタンクモデル定数の探索, 農業土木学会論文集, 第65号, pp.42-47, 1976.