

波浪による海底地盤内の間隙水圧変化に及ぼす 慣性項の効果

Effect of inertia term on pore-water pressure development in seabed due to waves

京都大学工学部 酒井哲郎 T. Sakai
京都大学工学部 間瀬 肇 H. Mase
京都大学大学院 松本明男 A. Matsumoto

1. まえがき

海岸・海洋構造物を支持する海底地盤内では、波浪による変動圧力によって間隙水圧や地盤の有効応力が変動する。その結果、構造物の倒壊や海底地盤の崩壊が生じることがあると言われている。波浪による変動圧力によって生じる海底地盤内の間隙水圧や地盤の有効応力の変化に関しては、この 10 年間の間に、圧密理論を用いた扱いがいくつか発表された（例えば山本ら¹⁾、Madsen²⁾、Mei and Foda³⁾、名合ら⁴⁾、大草⁵⁾、前野ら⁶⁾）。この扱いでは、何れも Biot⁷⁾ の式を用いており、これまでの扱いに比べて、地盤の変形と間隙水の運動の両方を考慮した点で優れている。

しかしながら Mei and Foda によると、Biot の式が成立するためには多くの仮定がなされていることに気が付く。すなわち間隙水や地盤の加速度は無視されているし、重力も無視されている。ここでは特に加速度（慣性項）の影響を理論的に検討する。

2. mixture theory からの Biot の式の誘導³⁾

Mei and Fada³⁾ に従って、固体と水の2つの相からなる連続体を考える。まず2相の質量保存則を考え、土粒子そのものは非圧縮と仮定し、水は空気の混入を考慮して圧縮性を仮定すると、次の2式が得られる。

$$\dot{n}_w + n_w \nabla \cdot \bar{v}_s = \nabla \cdot \bar{v}_s + (\bar{v}_w - \bar{v}_s) \cdot \nabla n_w \quad (1)$$

$$\dot{n}_w + n_w \nabla \cdot \bar{v}_w = - n_w \dot{\rho}_w / \rho_w \quad (2)$$

ここで、 n_w は空隙率、 $\bar{v}_s$ および $\bar{v}_w$ は固相と水の速度ベクトル、 ρ_w は水の密度、 $\dot{}$ は時間に関する偏微分、 ∇ は空間微分作用素ベクトル、 $\cdot$ はベクトルの内積を表す。

次に2相の運動方程式を考える。各相には応力、重力および2相間の相互干渉力が働く。間隙水に働く応力は間隙水圧のみと仮定し、また固相に働く応力は有効応力を用いて表現する。さらに相互干渉力は、ダルシー則で表現される2相の相対運動による抗力と間隙水圧に関係する力からなると仮定すると、次の2式が得られる。

$$n_w \rho_w \delta \bar{v}_w / \delta t = - n_w \nabla p + n_w \rho_w \bar{g} - n_w^2 / K \cdot (\bar{v}_w - \bar{v}_s) \quad (3)$$

$$(1 - n_w) \rho_s \delta \bar{v}_s / \delta t = - (1 - n_w) \nabla p + \nabla \cdot \bar{T}^e + (1 - n_w) \rho_s \bar{g} + n_w^2 / K \cdot (\bar{v}_w - \bar{v}_s) \quad (4)$$

ここで $\delta / \delta t$ は時間 t に関する偏微分を表し、 p は間隙水圧、 $\bar{g}$ は重力加速度、 K は2相の相対運動による抗力を $n_w^2 / K \cdot (\bar{v}_w - \bar{v}_s)$ で表現した場合の透水係数、 ρ_s は固相の密度、 $\bar{T}^e$ は固相に働く有効応力ベ

ンソルである。

次に静止状態での釣合を考え、式(1)～(4)の静止状態での式を各式から差し引く。こうして得られる式において、運動にともなう偏差の項の2次以上の項を無視する。このうち2つの連続式から得られる2式を加えると、次式が得られる。

$$n^0 \nabla \cdot \bar{v}_w' + (1 - n^0) \nabla \cdot \bar{v}_s' = - n^0 / \beta \cdot \delta p' / \delta t \quad (5)$$

ここで n^0 は静止状態での n_w 、' は静止状態からの偏差を意味する。 β は水の有効体積弾性率である。

一方、同様に2相の運動方程式からも運動に伴う偏差に関する式が得られる。

$$n^0 \rho_w^0 \cdot \delta \bar{v}_w' / \delta t = - n^0 \nabla p' + n^0 \rho_w^0 \bar{g} - (n^0)^2 / K \cdot (\bar{v}_w' - \bar{v}_s') \quad (6)$$

$$(1 - n^0) \rho_s^0 \cdot \delta \bar{v}_s' / \delta t = \nabla \bar{T}^e - (1 - n^0) \nabla p' + (n^0)^2 / K \cdot (\bar{v}_w' - \bar{v}_s') + n' \nabla p^0 - n' \rho_s^0 \bar{g} \quad (7)$$

ここで、 ρ_w^0 および ρ_s^0 は静止状態での間隙水および固相の密度である。なお式(7)の右辺2行目は、Mei and Foda³⁾ では抜けている。このうちの第1項は、 $n' \rho_w^0 \bar{g}$ と書き換えられる。

いま式(6)および(7)の左辺の慣性項、式(6)右辺の重力項および式(7)の右辺2行目の2つの重力項を無視し、有効応力に対して次式の Hooke の法則を用いる。ただしここで σ_{ij} は有効応力テンソルの成分、 V_i は x_i 方向の固相の変位、 x_i は空間座標、 G および ν は固相のせん断弾性率とポアソン比、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。

$$\sigma_{ij} = G \cdot \left\{ \delta V_i / \delta x_j + \delta V_j / \delta x_i + 2\nu / (1-2\nu) \cdot \delta_{ij} \cdot \delta V_k / \delta x_k \right\} \quad (8)$$

最終的には、式(5)～(8)より次式の様な Biot の式が得られる($e = \delta V_k / \delta x_k$)。

$$G \cdot \nabla^2 V_i + G / (1-2\nu) \cdot \delta e / \delta x_i - \delta p' / \delta x_i = 0 \quad (i = 1 \sim 3) \quad (9)$$

$$K \cdot \nabla^2 p' = n^0 / \beta \cdot \delta p' / \delta t + \delta e / \delta t \quad (10)$$

3. 慣性項を含めた境界層近似

Biot の式を用いた波浪による地盤内の間隙水圧や有効応力の理論解は、すでに山本¹⁾ や Madsen²⁾ が求めているが、その解の形が複雑なため、Mei and Foda³⁾ は地盤内に2つの現象の異なる領域が存在する事を明らかにし、地盤表面に近い部分を境界層として扱った(図-1)。すなわち境界層外の外部領域では、間隙水と固相の速度は等しいのに対して、境界層では間隙

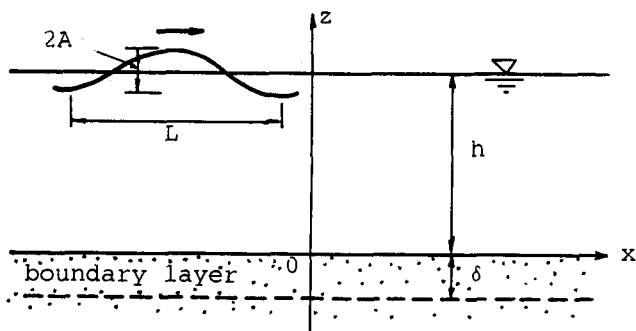


図-1 座標系と記号

水の運動がより自由で両者は等しくないとした。こうして山本らや Madsen の解よりもはるかに簡単な近似解を得た。そこでは上述の慣性項と重力項は無視されているが、一方地震波の場合には慣性項が無視できないとして、外部領域に対しては慣性項を含めた基礎式を求めた。

まず式(5)において $\bar{v}_w' = \bar{v}_s'$ とおくと、

$$\nabla \cdot \bar{v}_s' = -n^0/\beta \cdot \delta p'/\delta t \quad (11)$$

さらに式(6)～(8)と(11)および $\bar{v}_w' = \bar{v}_s'$ を用い、重力項を無視すると、慣性項を残した形で次式が得られる。

$$G \cdot \{\nabla^2 \bar{v}_s' + 1/(1-2\nu_e) \cdot \nabla \nabla \cdot \bar{v}_s'\} = \rho_e \delta^2 \bar{v}_s' / \delta t^2 \quad (12)$$

ここで、 ν_e と ρ_e は固相-水系の等価ポアソン比と等価密度であり、次式で与えられる。

$$\nu_e = 1/2 \cdot \{2\nu/(1-2\nu) + \beta/(n^0 G)\} \cdot \{1/(1-2\nu) + \beta/(n^0 G)\}^{-1} \quad (13)$$

$$\rho_e = n^0 \rho_w^0 + (1 - n^0) \rho_s^0 \quad (14)$$

以上の式から分かるように、外部領域では間隙水の存在は単に弾性体の動力学の基礎式における定数を変えるに過ぎない。

一方海底面に近い境界層内では、上述の外部領域での解 ()_{out} にさらに境界層補正解 ()_{bl} が加わるものとし、境界層補正解が満たすべき式を次のように得た。すなわち式 (6)～(8) から得られる式と式 (5)、(6) から得られる式において、重力項および慣性項を無視し、境界層近似の高次項を無視すると、次式が得られる (z : 鉛直上向き座標、原点は海底面)。

$$K \{n^0/\beta + (1-2\nu)/2G(1-\nu)\}^{-1} \cdot \delta^2 p'/\delta z^2 = \delta p'/\delta t \quad (15)$$

また式 (6) において慣性項および重力項を無視すると、次式が得られる。

$$\nabla p' = -n^0/K \cdot (\bar{v}_w' - \bar{v}_s') \quad (16)$$

式 (16) はダルシーの法則であり、式 (15) は過剰間隙水圧 p' に対する境界層補正を表し、Terzaghi の一次元の圧密の式になっている。

4. 慣性項を考慮した波浪による海底地盤内の過剰間隙水圧の解

Foda and Mei⁸⁾ は、3. で示した式を用いて、水で飽和した地盤内を伝わるレーリー波の減衰を議論している。ここでは、同様の手法を用いて波浪による海底地盤内の過剰間隙水圧の解を求める。

微小振幅波による海底面上の波圧を $a \cdot \exp \{i(\lambda x - \omega t)\}$ で表すと、この場合の式 (12) の解 $\bar{v}_s'$ は、半無限弾性体表面を正弦波状の振動荷重が通過する場合の、無限体内を伝わる波動の解 (例えば岡本⁹⁾) と同じである。この解を用いると、地盤の速度の x 方向 (波浪の進行方向) と z 方向の成分 v_{x0} と v_{z0} (下付き添字 0 は外部領域の量を意味し、簡単のため ' を省略) は、次式で与えられる。

$$v_{x0} = a\omega/G\lambda \cdot (1+s^2)/\{(1+s^2)-4sq\} \cdot \{\exp(q\lambda z) - 2sq/(1+s^2) \cdot \exp(s\lambda z)\} \\ \times \exp\{i(\lambda x - \omega t)\} \quad (17)$$

$$v_{z0} = -ia\omega/G\lambda \cdot (1+s^2)/\{(1+s^2)-4sq\} \cdot \{q \cdot \exp(q\lambda z) - 2q/(1+s^2) \cdot \exp(s\lambda z)\} \\ \times \exp\{i(\lambda x - \omega t)\} \quad (18)$$

ここで s と q は次式で与えられる.

$$q^2 = 1 - \omega^2/\lambda^2 C_p^2, \quad s^2 = 1 - \omega^2/\lambda^2 C_s^2 \quad (19)$$

また C_p と C_s は, 次式で与えられる弾性体内の縦波とせん断波の伝播速度である.

$$C_p^2 = 2(1-\nu_e)/(1-2\nu_e) \cdot G/\rho_e, \quad C_s^2 = G/\rho_e \quad (20)$$

式 (17) および (18) で与えられる $\bar{v}_s'$ を式 (11) に代入すると, 慣性項を考慮した外部領域での過剰間隙水圧が次式のように求められる.

$$p_a = \rho_w^0 g A \cdot \text{sech}(\lambda h) \cdot \beta/n^0 G \cdot (1+s^2)(1-q^2)/\{4sq-(1+s^2)^2\} \cdot \exp(q\lambda z) \\ \times \exp\{i(\lambda x - \omega t)\} \quad (21)$$

ここで A は海底面での波圧を微小振幅波理論で与えた場合の半波高, λ は波数, h は水深で, a との間に次式の様な関係がある.

$$a = -\rho_w^0 g A \cdot \text{sech}(\lambda h) \quad (22)$$

一方 Mei and Foda³⁾ によれば, 式 (15) を満たす海底面付近の境界層内における過剰間隙水圧の補正解は, 粘性流体におけるストークス境界層の解を用いて, 次式で与えられる (ただし $L \equiv 2\pi/\lambda$ は波長)

$$p_b = \rho_w^0 g A \cdot \text{sech}(\lambda h) \cdot P(x/L) \cdot \exp\{(1-i)z/(2^{1/2}\delta)\} \cdot \exp\{i(\lambda x - \omega t)\} \quad (23)$$

$$\text{海底面での境界条件, } p_a(z=0) + p_b(z=0) = \rho_w^0 g A \cdot \text{sech}(\lambda h) \cdot \exp\{i(\lambda x - \omega t)\} \quad (24)$$

より $P(x/L)$ が決定され, 結局慣性項を考慮した微小振幅波の進行に伴う海底地盤内の過剰間隙水圧は, 次式で与えられる. ただし $\omega^2 \rho_e/(\lambda^2 G) \ll 1$ として近似している.

$$p = \rho_w^0 g A \cdot \text{sech}(\lambda h) \cdot [\beta/n^0 G \cdot (1-2\nu_e) \{1-\omega^2 \rho_e/(2\lambda^2 G)\} \cdot \exp(q\lambda z) \\ + \{1 - \beta/n^0 G \cdot (1-2\nu_e) \{1-\omega^2 \rho_e/(2\lambda^2 G)\}\} \\ \cdot \exp\{(1-i)z/(2^{1/2}\delta)\}] \\ \times \exp\{i(\lambda x - \omega t)\} \quad (25)$$

ここで δ は境界層の厚さで, 次式で与えられる.

$$\delta = (KG/\omega)^{1/2} \{n^0 G/\beta + (1-2\nu)/2(1-\nu)\}^{-1/2} \quad (26)$$

比較のために Mei and Foda³⁾ による慣性項を無視した同様の解を示すと、次式の様である。

$$p = \rho_w^0 g a \cdot \text{sech}(\lambda h) \cdot \{1/(1+m) \cdot \exp(2\pi z/L) + m/(1+m) \cdot \exp\{(1-i)z/(2^{1/2}\delta)\}\} \times \exp\{i(\lambda x - \omega t)\} \quad (27)$$

$$\text{ここで, } m = n^0 G/\beta(1-2\nu) \quad (28)$$

なお式(12)における右辺の慣性項を0に近づけた極限では、式(25)は(27)に一致する。

5. 波浪による海底地盤内の間隙水压変化に及ぼす慣性項の効果

Mei and Foda³⁾によれば、式(6)および(7)の左辺の慣性項(加速度項)の大きさは抗力項に比べて小さく、さらに間隙水压あるいは有効応力の勾配項と比べても、その大きさの比は $\rho_w^0 \omega^2 L^2/G$ で与えられ、通常の波浪及び地盤条件では無視しうるとされている。ここではこの比が大きくなりうる場合として、地盤の体積弾性率 G が最も小さいシルトあるいは粘土の場合を考え、次のようなパラメーターを与える。

波浪条件: $h = 70\text{m}$, $T \equiv 2\pi/\omega = 15\text{sec}$

地盤条件: $\nu = 0.4$, $n^0 = 1/3$, $G = 1.5 \times 10^7 \text{N/m}^2$, $K = 10^{-10} \text{m}^3/\text{s/kg}$, $\beta = 3 \times 10^7 \text{N/m}^2$

図-2は、 $p_0 = \rho_w^0 g a \cdot \text{sech}(\lambda h)$ で無次元化した過剰間隙水压 p の振幅の鉛直分布を示している。実線が式(25)で与えられる慣性項を考慮した場合、破線が式(27)で与えられる慣性項を無視した場合である。この図から分かるように、慣性項は、波浪による海底面での圧力変化を正弦波で与える限りでは、地盤の体積弾性率が小さいシルトや粘土の場合でも、間隙水压に関してはせいぜい数%程度の効果しかないことが分かる。

ただし、このことは波浪による間隙水压の発達に関して一般的に慣性項が無視しうることを意味するものではない。例えば碎波のように海底面での圧力波形が水面波形同様前傾した切り立った形をしている場合には、慣性項と圧力勾配項との比 $\rho_w^0 \omega^2 L^2/G$ も大きくなる。この場合には、線形重ね合わせが可能とすれば、圧力波形を調和分解し、各成分波毎に式(25)を用いて p を求めて足し合わせれば、慣性項を無視した場合とはかなり異なる過剰間隙水压が得られる可能性がある。

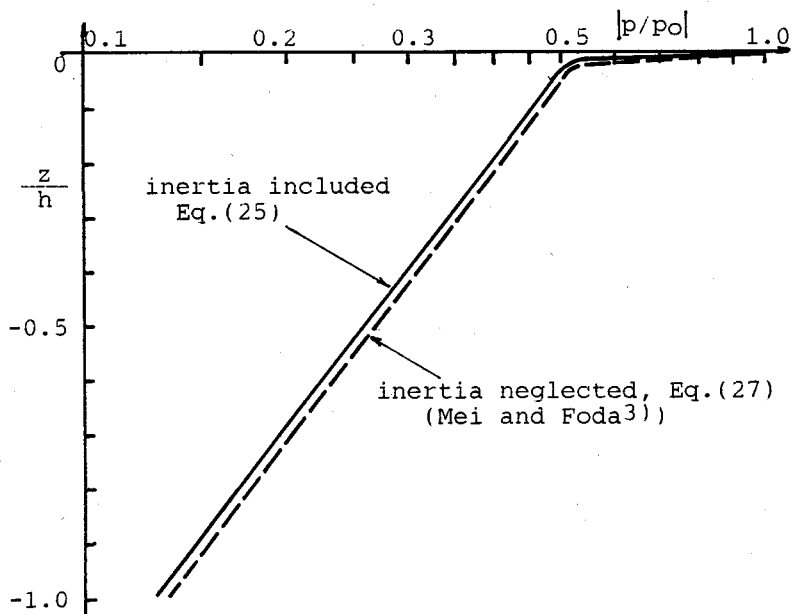


図-2 過剰間隙水压に及ぼす慣性項の効果

6. 結論

海底地盤で支持される海岸，海洋構造物の設計において考慮しなければならない，波浪による海底地盤内の間隙水圧と地盤有効応力の変動を与えるモデルとしての Biot⁷⁾ の圧密の式において無視されている，間隙水と地盤の慣性項すなわち加速度項の効果を理論的に検討した．その結果，以下の様な結論を得た．

(1) 水で飽和した地盤内の Rayleigh 波の減衰を理論的に検討した Mei and Foda³⁾ と同様，海底地盤を海底面付近の境界層とそれ以外の外部領域にわけた．その結果，微小振幅波の伝播に伴う海底地盤の変位は，外部領域では海底面上を走行する正弦波状に振動する荷重による，弾性体内の変位の解によって与えられることが分かった．

(2) 境界層での解は Mei and Foda の解がそのまま利用でき，上述の外部領域での解と合わせて，微小振幅波の伝播に伴う海底地盤内の間隙水圧の変動の理論解を得た．この解で慣性項を無視すると，Mei and Foda の解と一致する．

(3) 慣性項の効果が相対的に大きいと考えられる海底地盤の体積弾性率が $1.5 \times 10^7 \text{ N/m}^2$ の場合について，間隙水圧の鉛直分布を慣性項を無視した Mei and Foda の解と比較したところ，その相違は数%にすぎないことが分かった．

(4) ただしこのことは波浪による間隙水圧の発達に関して一般的に慣性項が無視しうることを意味するものではなく，砕波のような場合には慣性項の効果が無視しえない可能性がある．

7. 参考文献

- 1) Yamamoto, T., Koning, H.L., Sellmeijer, H. and Van Hijum, E. : On the response of a poro-elastic bed to water waves, J.F.M., Vol.87, pp.193-206, 1978.
- 2) Madsen, O.S. : Wave-induced pressures and effective stresses in a porous bed, Géotechnique, Vol.28, pp.377-393, 1978.
- 3) Mei, C.C. and Foda, M.A. : Wave-induced responses in a fluid-filled poro-elastic solid with a free surface - a boundary layer theory, Geophys. J. R. astr. Soc., Vol.66, pp.597-631, 1981.
- 4) Nago, H. and Maeno, S. : Pore water pressure in sand bed under oscillating water pressure, Memoirs of Engineering, Okayama Univ., Vol.19-1, pp.13-32, 1984.
- 5) Okusa, S. : Wave-induced stresses in unsaturated submarine sediments, Géotechnique, Vol.35, pp.517-532, 1985.
- 6) Maeno, Y. and Hasegawa, T. : In-situ measurements of wave-induced pore pressure for predicting properties of seabed deposits, Coastal Eng. in Japan, Vol.30, No.1, pp.99-115, 1987.
- 7) Biot, M.A. : General theory of three-dimensional consolidation, J. Applied Phys., Vol.12, pp.155-164, 1941.
- 8) Foda, M.A. and Mei, C.C. : A boundary layer theory for Rayleigh waves in a porous, fluid-filled half space, Soil Dynamics and Earthquake Eng., Vol.2, No.2, pp.62-65, 1983.
- 9) 岡本舜三：建設技術者のための振動学，オーム社，pp.204-206, 1967.