

乱流モデルを用いた Kármán 渦による振動流の解析と
実験との比較

Hydraulic Analysis of Kármán Vortex Shedding

by Means of Turbulence Model

広島大学工学部 細田 尚 T.Hosoda
広島大学工学部 余越正一郎 S.Yokosi

1. 諸言

本研究では、Kármán 渦の発生に伴う振動流に関して、 $k-\epsilon$ モデルを用いた数値解析を行い、計算結果と、開水路流れの中に角柱を設置することによって生ずる角柱周辺の流速測定結果を比較する。計算結果として、平均流速だけでなく、同位相でのアンサンブル平均と考えられる乱れエネルギー、乱れエネルギー散逸率の経時変化も得られる。そこで、まず計算結果を一周期平均し、その水路幅方向の分布形を検討する。次に、流速、乱れエネルギー等の時間変化の特性について検討する。

2. 基礎式と解析の概要

Kármán 渦の数値解析に関しては、Navier-Stokes 方程式を用いた多くの研究がある。¹⁾ その結果、流速・圧力の振動特性が検討されている。本研究では、流速の振動特性と乱れエネルギー等の時間変化との関係を検討するため、 $k-\epsilon$ モデルを用いた解析を試みる。 $k-\epsilon$ モデルとしては、乱れ Reynolds 数が低い領域も考慮した Jones-Launder モデル²⁾ と標準型の $k-\epsilon$ モデル³⁾ の二つを用いた。

Jones-Launder モデルの基礎式は次のようである。用いる座標系を Fig.1 に示した。

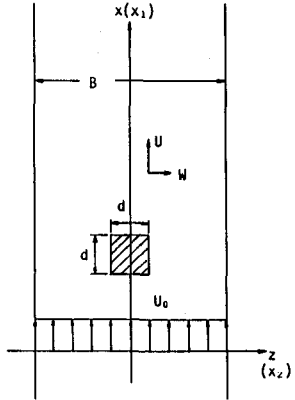


Fig.1 Coordinate system

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1) \quad \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial (-\overline{u_i u_j})}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = D \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{D}{\sigma_k} + \nu \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \epsilon - 2\nu \left(\frac{\partial k^{1/2}}{\partial x_j} \right)^2 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = c_{\epsilon 1} D \frac{\epsilon}{k} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{D}{\sigma_\epsilon} + \nu \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] - c_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} + 2\nu D \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_i} \right)^2 \quad (4)$$

$$-\overline{u_i u_j} = D \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k, \quad D = c_\mu \frac{k^2}{\epsilon}, \quad c_\mu = c_{\mu\infty} \exp \left(\frac{-2.5}{1 + Re_T/50} \right),$$

$$c_{\epsilon 2} = c_{\epsilon 2\infty} [1.0 - 0.3 \exp(-Re_T^2)], \quad Re_T = \frac{k^2}{\nu \epsilon}$$

ここに、 U_i :平均流速ベクトルの成分、 u_i :変動流速ベクトルの成分、 P :平均圧力、 k :乱れエネルギー、 ϵ :乱れエネルギー散逸率、 ν :動粘性係数、 x_i :空間座標 (i は1、2の値を取り、Fig.1 において $x_1=x$ 、 $x_2=z$ 、また、 $U_1=U$ 、 $U_2=W$ とおく。)、 t :時間である。 $c_{\epsilon 1}$ 、 $c_{\epsilon 2\infty}$ 、 $c_{\mu\infty}$ 、 σ_k 、 σ_ϵ は定数であり、Table 1 の値を用いた。また(1)~(4)式では総和の規約を用いている。

Table 1 $k-\epsilon$ constants

$c_{\epsilon 1}$	$c_{\epsilon 2}$	$c_{\mu\infty}$	σ_k	σ_ϵ
1.44	1.92	0.09	1.0	1.3

(1)、(4)式を次に示す無次元量を用いて無次元化する。

$$U_i' = U_i/U_0, P' = P/\rho U_0^2, k' = k/U_0^2, \varepsilon' = \varepsilon d/U_0^3, D' = D/U_0 d,$$

$$-u_i u_j' = -u_i u_j/U_0^2, x_i' = x_i/d, t' = t U_0/d$$

このとき、基礎式系は次のようになる。

$$\frac{\partial U_i'}{\partial x_i'} = 0 \quad (5) \quad \frac{\partial U_i'}{\partial t'} + U_j' \frac{\partial U_i'}{\partial x_j'} = -\frac{\partial P'}{\partial x_i'} + \frac{\partial(-\overline{u_i u_j'})}{\partial x_j'} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U_i'}{\partial x_j'^2} \quad (6)$$

$$\frac{\partial k'}{\partial t'} + U_j' \frac{\partial k'}{\partial x_j'} = D' \frac{\partial U_i'}{\partial x_j'} \left(\frac{\partial U_i'}{\partial x_j'} + \frac{\partial U_j'}{\partial x_i'} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j'} \left[\left(\frac{D'}{\sigma_k} + \frac{1}{Re} \right) \frac{\partial k'}{\partial x_j'} \right] - \varepsilon' - \frac{2}{Re} \left(\frac{\partial k'}{\partial x_j'} \right)^2 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \varepsilon'}{\partial t'} + U_j' \frac{\partial \varepsilon'}{\partial x_j'} = c_{\varepsilon 1} D' \frac{\varepsilon'}{k'} \frac{\partial U_i'}{\partial x_j'} \left(\frac{\partial U_i'}{\partial x_j'} + \frac{\partial U_j'}{\partial x_i'} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j'} \left[\left(\frac{D'}{\sigma_\varepsilon} + \frac{1}{Re} \right) \frac{\partial \varepsilon'}{\partial x_j'} \right] - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon'^2}{k'} + 2 \frac{D'}{Re} \left(\frac{\partial^2 U_i'}{\partial x_j' \partial x_i'} \right)^2 \quad (8)$$

ここに、 $Re = U_0 d/\nu$ である。

標準型の $k-\varepsilon$ モデルは、(1)~(4)式中、動粘性係数 ν の現われる項を無視し、 Re_T を無限大とおいた場合である。

数値解析法は Roache⁴⁾ に従った。慣性項、移流項の離散化には上流差分を用いた。角柱壁面での境界条件は次のようにした。

Jones・Launder モデルの場合：Fig.2 に示したように、角柱に接する格子において、時間ステップ n での $U_{w,j+1/2}'^n$ が既知のとき、対数則

$$\frac{U_{w,j+1/2}'^n}{U_{j+1/2}'^n} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(u_{j+1/2}'^n \cdot \frac{\Delta z'}{2} \cdot Re \right) + A_s \quad (\kappa=0.4, A_s=5.5) \quad (9)$$

より $u_{j+1/2}'^n$ を求めた。ここに、壁でのせん断応力を τ_w として、 $u_\tau' \equiv \sqrt{\tau_w/\rho}/U_0$ である。得られた $u_{j+1/2}'^n$ を用いて $u_{j+1/2}'^n \cdot (\Delta z'/2) \cdot Re > Re_c$ であればこの $u_{j+1/2}'^n$ と wall function 法を用いて壁面に接する格子の k' 、 ε' を求めた。 Re_c は基準値で、50とした。 $u_{j+1/2}'^n \cdot (\Delta z'/2) \cdot Re < Re_c$ であれば、壁面上で U' 、 k' 、 ε' が0として基礎式を離散化した。

標準型の $k-\varepsilon$ モデルの場合：このときは、wall function 法のみを用いることになる。標準型の場合は、無次元化された基礎式中に Reynolds 数が現われないが、壁面境界条件(9)式を通じて Reynolds 数が考慮されることになる。

計算の諸条件を Fig.3、Table 2 に示した。Jones・Launder モデルを用いた場合を Run 1、標準型の $k-\varepsilon$ モデル (standard $k-\varepsilon$ model) を用いた場合を Run 2 とする。

3. 計算結果と実験結果の比較

3.1 実験の概要と結果：実験は、広島大学工学部水理実験棟に設置された幅80cm、長さ30mの長方形断面の水路で行った。水路幅を10cmに仕切り、長さ4cm×4cmの角柱を流れの中に置き、周

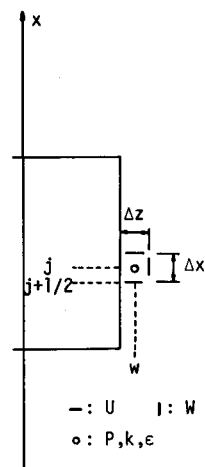


Fig.2 Boundary conditions at the wall

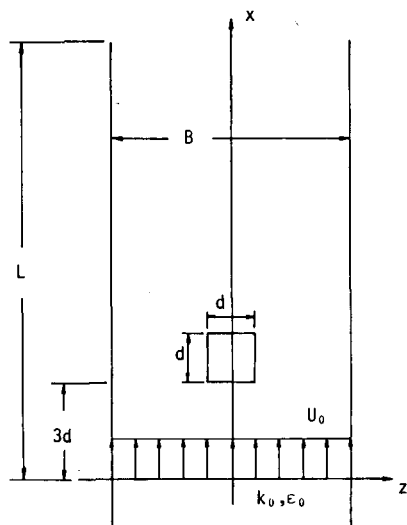


Fig.3 Explanation of the symbols

Table 2 Conditions for numerical analysis

	model	$\frac{k_0}{U_0^2}$	$\frac{\varepsilon_0 d}{U_0^3}$	$\frac{B}{d}$	$\frac{L}{d}$	Re	$\frac{\Delta x}{d}, \frac{\Delta y}{d}$	$\frac{\Delta t U_0}{d}$
Run 1	Jones, Launder	0.01	0.01	2.5	12.0	8500	0.1	0.01
Run 2	Standard $k-\varepsilon$	0.01	0.01	2.5	12.0	8500	0.1	0.01

辺の流速をプロベラ流速計（計測技研製VO301A、VOT2-100-05）により計測した。流速計は路床より0.5 cmの位置で、 x 、 z 方向に多点計測した。水路の座標系は Fig.3 と同様である。水理諸量を Table 3 に示した。平均流速 U_0 は、角柱の影響が及ばない位置での時間平均流速を水路幅方向に平均したものである。

Fig.4 に流速の計測結果を示した。サンプリング間隔0.02秒である。Strauhal 数 $S=0.22$ となった。この図をみてわかるように、 $z/d=0$ では流速は Kármán 渦の倍の振動数で振動するが、 z/d の増加とともに、Kármán 渦の振動数で振動する波に変化して行く。その過程で、Fig.4 (b) のような大きな振幅をもつ波とそれに続く小さな振幅をもつ波の繰り返しが見られる。また、その小さな振幅の波の領域には強い乱れが発生しているように思われる。Fig.4 (c) では小さな振幅の波はほぼ消えている。

3.2 計算結果との比較

(1) 流れの概要：Fig.5 (a) に計算による流況の一例を示した。(b) にはその時刻での角柱背後の乱れエネルギーの分布を示した。両者を見ると、渦の逆流域と主流が衝突する領域で強い乱れが発生している。

(2) 一周期平均された U' 、 k' 、 ϵ' の水路幅方向の分布：Fig.6 に計算結果を一周期平均して得られた平均流速の水路幅方向の分布と実験結果との比較を示した。Jones・Launder モデルを用いた Run 1 と標準型を用いた Run 2 はほとんど同一である。計算結果と実験結果はほぼ適合していると考えられる。

Table 3 Hydraulic variables of experiment

h_0 (cm)	U_0 (cm/s)	B/d	$U_0 d/\nu$
1.14	18.18	2.5	8400

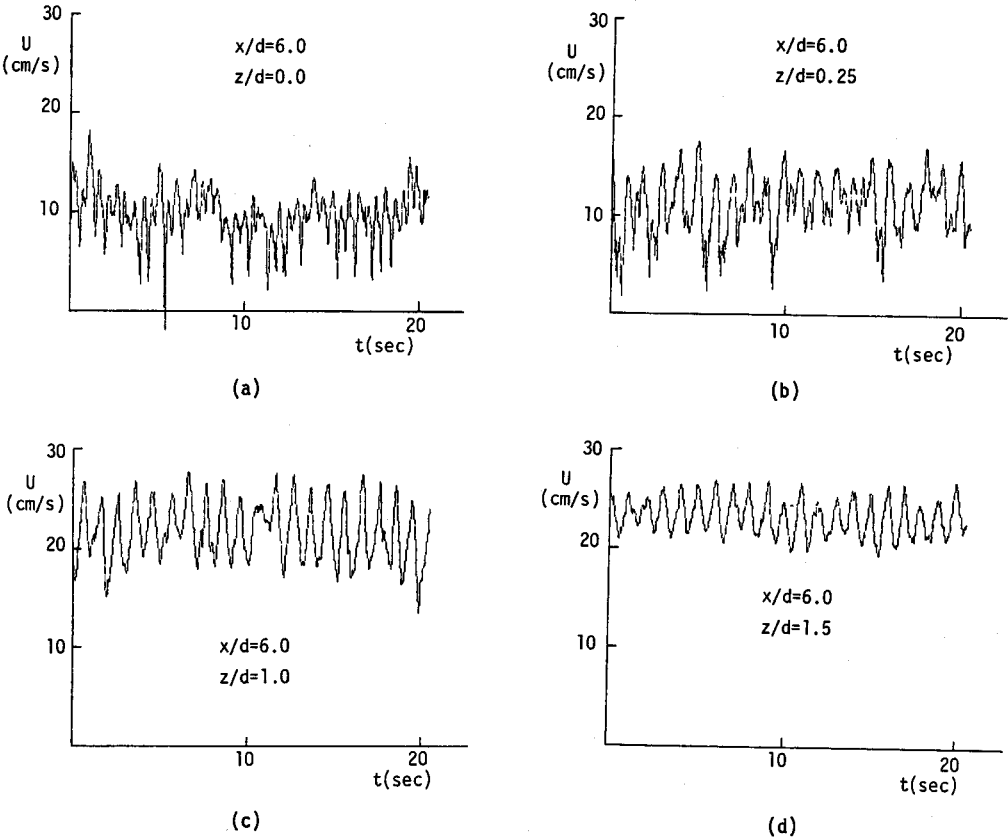


Fig.4 Instantaneous longitudinal velocities

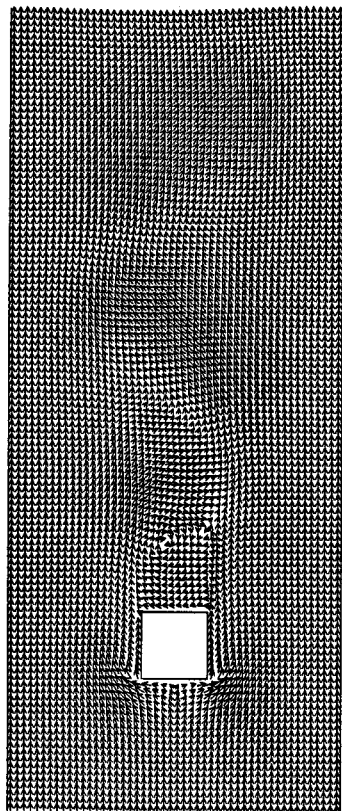


Fig. 5 (a) Flow pattern
(Run 1, $t'=187$)

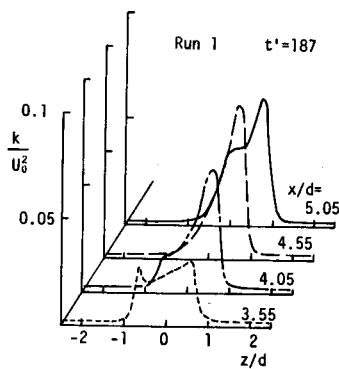
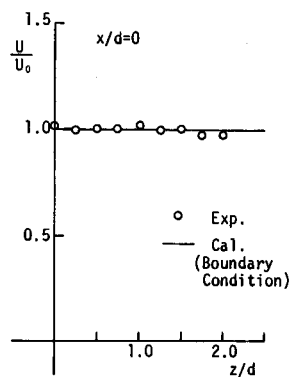
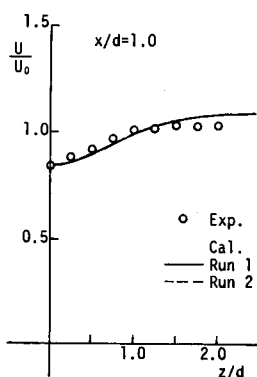


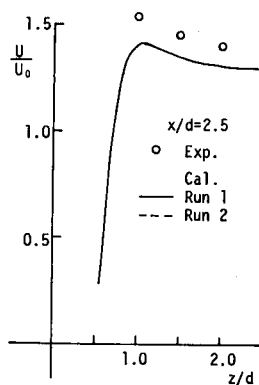
Fig. 5 (b) Distributions
of k' behind the square
column



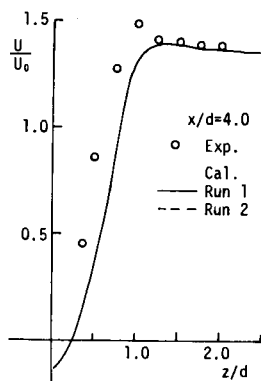
(a)



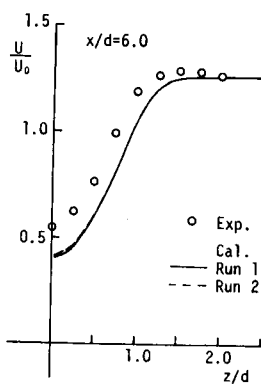
(b)



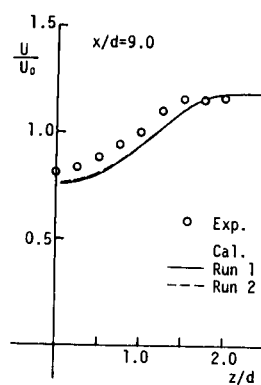
(c)



(d)



(e)



(f)

Fig. 6 Transverse distributions of longitudinal velocity

Fig.7 には $x/d=6.05$ での k' 、 ϵ' 、 k'/ϵ' 、 k'^2/ϵ' の水路幅方向の分布を示した。 k'/ϵ' は乱れの無次元化時間スケールを、 k'^2/ϵ' は渦動粘性係数を表している。 k' 、 ϵ' 、 k'^2/ϵ' は z の増加とともに増加し、極大値をとってから急激に減少している。 k'/ϵ' は反対に z の増加とともに減少し、極小値をとってから増加している。(Run 2 も同様の値をとる。)

(3) 流速の時間変化: 3.1 で示したような流速の時間変化を Fig.8 に示した。図には乱れエネルギーの時間変化も示してある。 $z/d=0.05$ では U' は Kármán 渦の倍の振動数で振動し、 k' は U' のほぼ逆位相で振動している。 $z/d=0.25$ となると、3.1 の Fig.4 (b) に示したような大きな振幅の波と、それに続く小さな振幅の波が現われ、この二つの波の接合部(極小値付近)で k' が極大値をとる。しかし、 z/d の増大とともに小さな振幅の波は消え、Fig.8 (c) のように U' 、 k' とともに 1 つの波になって行く。これは、Fig.4 (c)、(d) に対応している。Strouhal 数を求めれば 0.167 となり、実験値より小さくなっている。

Fig.9 には U' の振幅の水路幅方向の分布を示した。実験値は、 U' の山の平均値と谷の平均値の差 (ΔU) を示している。振幅が最大値をとる z/d の値は x/d の増加とともに水路中央より側壁の方へ移動して行く。

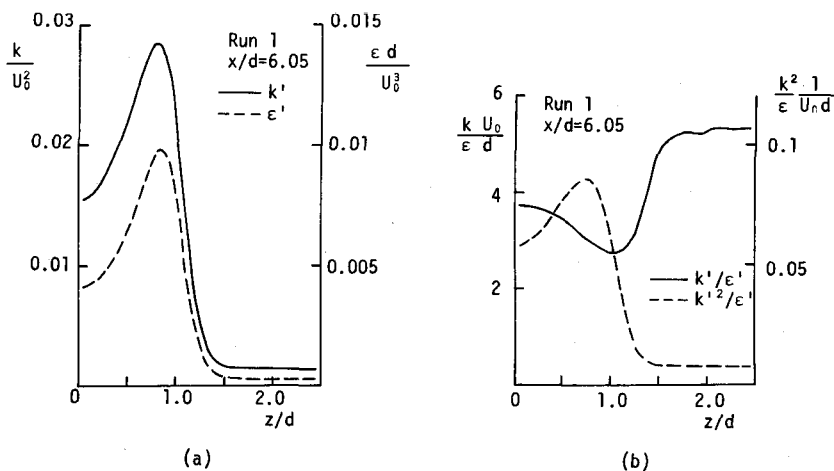


Fig.7 Transverse distribution of k' , ϵ' , k'/ϵ' , k'^2/ϵ'

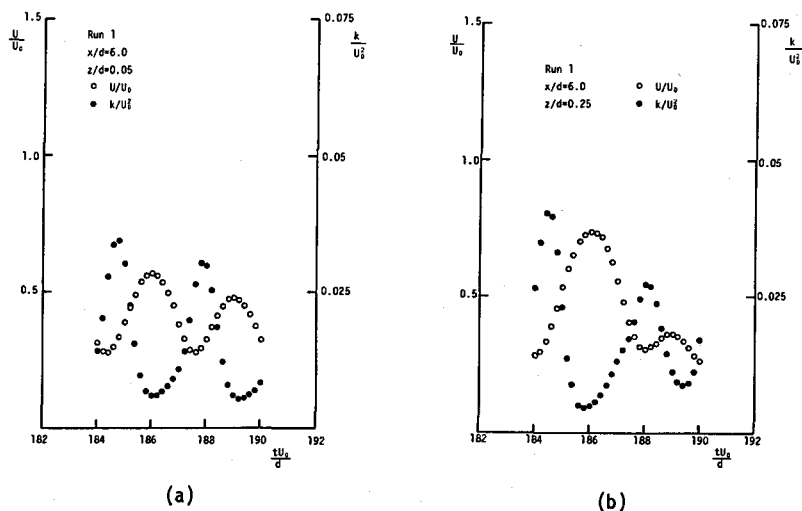


Fig.8 Relation between U' , k' and time

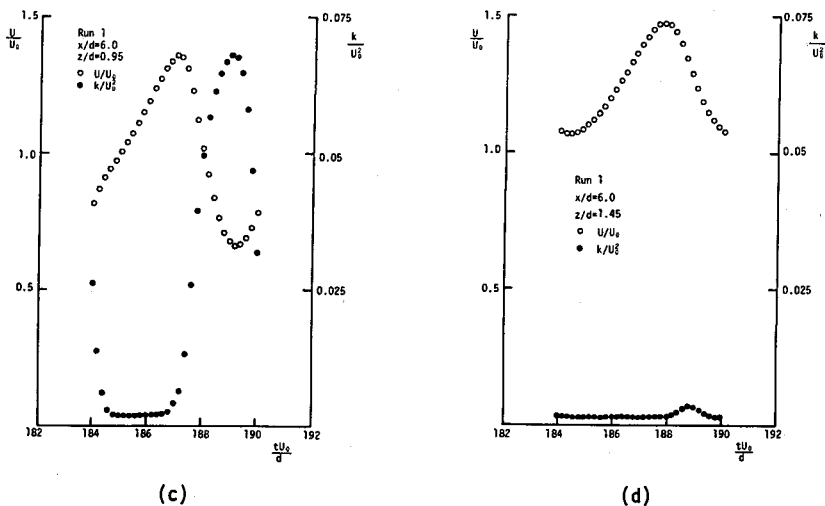


Fig.8

4. 結語

本研究では、 $k-\varepsilon$ モデルを用いて Kármán 渦の数値解析を行い、実験結果と比較・検討した。その結果、一周期平均された流速の分布は両者ともほぼ一致し、また実験結果での流速の時間変化の特性を定性的には再現できた。しかし、Strouhal 数、流速変動の振幅が両者で異なり、流れの振動特性を定量的に十分再現していない。これは、実験で計測している Kármán 渦が三次元的な構造をもつこと、解析モデルの中に底面せん断応力、側壁でのせん断応力、重力の効果を考慮していないことが挙げられる。今後、流れのスケールを大きくした同様の実験を行い、水深方向にも多点計測を行って、計算結果と比較・検討して行きたい。

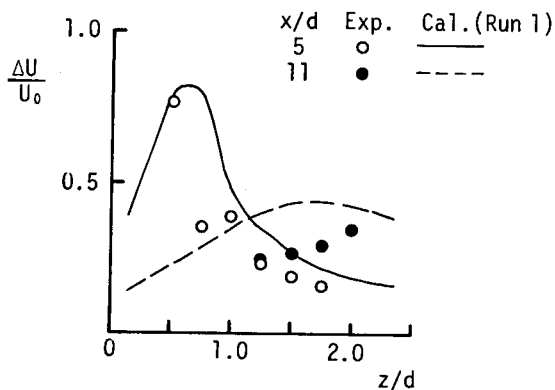


Fig.9 Transverse distributions of the amplitude of U'

参考文献

- 1) 例えば Davis, R.W. and E.F.Moore: A numerical study of vortex shedding from rectangles, J.Fluid Mech., Vol. 116, 1982
- 2) Jones, W.P. and B.E. Launder: The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.15, 1972
- 3) Launder, B.E. and D.B. Spalding: The numerical computation of turbulent flow, Computer Method in Applied Mechanics and Engineering 3, 1974
- 4) Roache, P.J.: Computational Fluid Dynamics, Albuquerque: Hermosa, 1976