

Saltation 粒子の浮遊砂への遷移機構
Transition Mechanism of Saltation Bed Particles into Suspension

京都大学工学部	中川博次	H. Nakagawa
金沢大学工学部	辻本哲郎	T. Tsujimoto
京都大学工学部	村上正吾	S. Murakami
京都大学大学院	後藤仁志	H. Gotoh

1. まえがき

一般に掃流砂と浮遊砂とは区別して扱われるが、両者が共存する領域におけるbed material load の流送過程として考える場合、特に、非平衡状況を呈している場合には、両者の相互作用を的確にかつ正しく理解するべきと考えられる。ビデオ画像解析による砂粒運動の詳細な観察に基づくと、bed material load の流送過程は次のようなサブプロセスにより構成されているものと思われる。即ち、i) 砂粒の河床よりの離脱、ii) 不規則継続跳躍によって記述される掃流運動、iii) saltation から浮遊への遷移、そして、iv) ランダム運動によって表現される浮遊運動、である。こうした理解に基づくと、saltation粒子は、水流の乱れによって浮遊粒子となることもある一方、浮遊粒子も河床に到着して、再び掃流粒子となることもあり、1個の粒子の連続的な運動として、bed material load の流送過程が理解される。上記の4つのサブプロセスは、それぞれ適なパラメータによって表現され、i)、ii)に対しては、既に明らかにされているようにpick-up rate 及び step length が対応する¹⁾。iii) に対しては、掃流砂から浮遊砂への単位時間当りの遷移確率密度、iv) に対しては、浮遊砂の飛距離 (travelling distance) が重要なパラメータとなる。本研究では、iii) で代表される浮遊砂への遷移過程を力学的に検討し、遷移現象に関わる偏倚量及び時間スケールを明らかにすることにより、遷移確率密度の評価を行った。

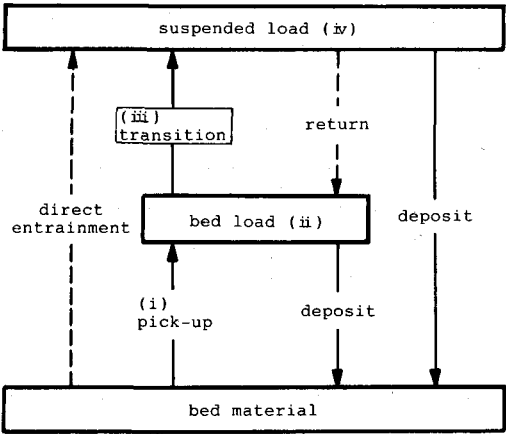


図-1 bed material load の流送過程

2. Saltation 粒子の遷移機構の検討

掃流運動から浮遊への遷移を、水流の乱れによる確定論的な saltation 軌跡よりの粒子の異常な逸脱 (偏倚) と定義する。このとき「遷移」に関わる限界は、確定論的軌跡よりの限界偏倚量の検討より評価することが可能となる。

確定論的な saltation 軌跡より、粒子が鉛直方向に微小偏倚 ξ_i だけ移動した後の粒子の元の軌道に対する相対偏倚速度 v_g は、元の軌道との相対距離 (鉛直偏倚量) ξ の関数であり、両者の間には次の関係が成立する。

$$v_g = \frac{d\xi}{dt} = f(\xi) \tag{1}$$

式(1)を ξ_i の周りで Taylor 展開し、二次の項までとれば、次式が得られる。

$$\frac{d\xi}{dt} = f(\xi_i) - f'(\xi_i) \xi_i + \frac{f''(\xi_i)}{2} \xi_i^2 + (f'(\xi_i) - f''(\xi_i) \xi_i) \xi + \frac{f''(\xi_i)}{2} \xi^2 \tag{2}$$

式(2)は、いわゆる logistic 方程式型の微分方程式であって、その解の特性に基づくと鉛直限界偏倚量は次のように与えられる。

$$\xi_c = \frac{\sqrt{f_1(\xi_i)^2 - 2f_2(\xi_i)f_3(\xi_i)} - f_1(\xi_i)}{f_3(\xi_i)} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $f_1(\xi)$ 、 $f_2(\xi)$ 、 $f_3(\xi)$ はそれぞれ、次式で表され、 $\xi = \xi_i$ において定義される。

$$f_1(\xi) = \frac{1}{v_g} \frac{dv_g}{dt} - \frac{1}{v_g^2} \left\{ \frac{d^2v_g}{dt^2} - \frac{1}{v_g} \left(\frac{dv_g}{dt} \right)^2 \right\} \xi \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$f_2(\xi) = v_g - \frac{1}{v_g} \frac{dv_g}{dt} \xi + \frac{1}{2v_g^2} \left\{ \frac{d^2v_g}{dt^2} - \frac{1}{v_g} \left(\frac{dv_g}{dt} \right)^2 \right\} \xi^2 \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$f_3(\xi) = \frac{1}{v_g^2} \left\{ \frac{d^2v_g}{dt^2} - \frac{1}{v_g} \left(\frac{dv_g}{dt} \right)^2 \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

即ち、 $\xi_i > \xi_c$ なら粒子は急速に元の軌道より離れ、

$\xi_i < \xi_c$ なら粒子は元の軌道に再帰する。

確定論的軌跡からの偏倚量に関する微分方程式(1)で議論するのは、粒子が確定論的軌跡から乱れ的作用によって ξ_i 、だけ偏倚した後の粒子の運動であるが、このためには粒子が乱れ的作用を受けて確定論的軌跡から偏倚する過程 (I) と、その後確定論的軌跡付近に帰るかどうか、が決定される過程 (II) における乱れをモデル化する必要がある。図-2 に示すように乱れは先の各々の過程でそれぞれ一定であるとして、粒子が確定論的軌跡から偏倚する過程で Δt 時間 v'_c なる乱れが作用し、その後粒子が確定論的軌跡に帰るかどうか決定される過程で $N\Delta t$ 時間 v'_2 なる乱れが作用すると考える。

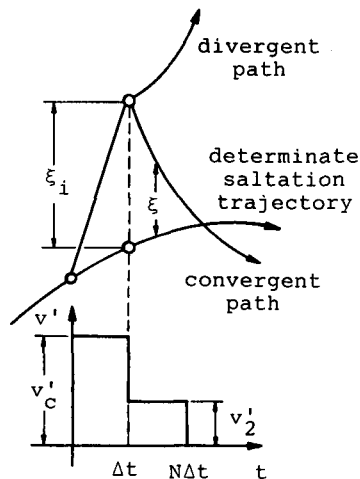


図-2 定義図

v'_c は、粒子が確定論的軌跡を離れ始める A 点での乱れ v'_A と関連させて次式のように与える。

$$v'_c = \beta_2 v'_A \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 β_2 は定数である。更に、一連の過程を通じて、粒子が確定論的軌跡から偏倚し始める点での乱れ v'_A に相当する乱れが平均的に作用するとすれば、次式の関係が成立する。

$$\Delta t (v'_c - v'_A) = (N-1) \Delta t (v'_A - v'_2) \quad \dots\dots\dots (8)$$

従って、粒子が確定論的軌跡から偏倚する間の乱れ v'_c は次式で与えられる。

$$v'_c = N v'_A - (N-1) v'_2 = \{N - (N-1) \beta_2\} v'_A \quad \dots\dots\dots (9)$$

また、乱れによって偏倚した粒子が元の確定論的軌跡に再帰するかどうか決定される間の相対速度 v_g は、粒子が確定論的軌跡から偏倚を開始する A 点での乱れ v'_A と関連させて、次式で与えることとする。

$$v_g = \beta_1 v'_A \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 β_1 は乱れに対する粒子の応答特性に関するパラメータである。

更に、乱れ v'_c が Δt 時間だけ作用することによる確定論的軌跡からの粒子の鉛直方向初期偏倚 ξ_i は次式で与えられる。 (11)

$$\xi_i = \alpha v'_c \Delta t$$

ここに、 α は乱れに対する粒子の追従性に関するパラメータであり、 β_1 とともに、次節において検討する。

確定論的 saltation 軌跡上での粒子の運動 (過程 (I)) 及び、確定論的 saltation 軌跡から偏倚して乱れ的作用下にある粒子の運動 (過程 (II)) は、それぞれ式(12)及び(13)で表される。

$$\rho(\sigma/\rho + C_M) A_3 d^3 \frac{dv_{g1}}{dt} = \frac{1}{2} C_D \rho |v_{g1}| (-v_{g1}) A_2 d^2 - \rho(\sigma/\rho - 1) g A_3 d^3 \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\rho(\sigma/\rho + C_M) A_3 d^3 \frac{dv_{g2}}{dt} = \frac{1}{2} C_D \rho |v' - v_{g2}| (v' - v_{g2}) A_2 d^2 - \rho(\sigma/\rho - 1) g A_3 d^3 \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここに、 ρ は流体の密度、 σ は砂粒子の密度、 d は砂粒子の粒径、 C_M は付加質量係数、 A_2 、 A_3 は砂粒の 2 次元・3 次元の形状係数であり、 g は重力加速度である。抗力係数としては、 $C_D = 24/Re + 0.4$; $Re \equiv v_g d/\nu$ (ν : 動粘性係数) を用いている。

また、乱れ強度 $\sqrt{v'^2}$ は、次式で与えるものとする²⁾

$$\frac{\sqrt{v'^2}}{u_*} = 1.27 \exp\left(-\frac{y}{h}\right) \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここに、 h は水深、 y は河床からの高さ、 u_* は摩擦速度である。

このようにして、saltation 軌跡上の各点で遷移基準に相当する鉛直限界偏倚量 ξ_c を求めることができる。

次に、確定論的 saltation 軌跡上にある粒子が乱れを受けて鉛直限界偏倚量 ξ_c に相当する距離だけ移動するのに要する時間を T_t とすれば、次の関係が成立する。

$$\xi_c = \alpha v'_c T_t \quad \dots\dots\dots (15)$$

この T_t は 1 個の粒子が鉛直限界偏倚量に相当する距離だけ鉛直方向に偏倚して、saltation から浮遊へと遷移するのに要する時間とも考えられるから、 T_t の平均値の逆数をとれば、時間当りに遷移する粒子の個数即ち遷移確率密度 $\tilde{p}_T$ が得られる。

$$\tilde{p}_T = \frac{1}{T_t} = \int_0^\infty \frac{\alpha v'_c}{\xi_c} \phi(v') dv' \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここに、 $\phi(v')$ は v' の確率密度関数である。

ところで、全ての乱れが遷移に有効なわけではなく、遷移が生じるには、先ず式(9)で表されるような比較的強い乱れによって鉛直限界偏倚量 ξ_c に相当する距離だけ偏倚することが必要であり、この様な乱れが作用する状態確率 $\text{Prob.}[v' > v'_c]$ を用いて、遷移確率は、

$$p_{T_t} \equiv \tilde{p}_T \cdot \text{Prob.}[v' > v'_c] \quad \dots\dots\dots (17)$$

と表される。

3. 遷移現象の時間スケールの検討

遷移確率を単なる状態確率でなく、stochastic model に適用し易いような時間あたりの遷移確率として評価するためには、遷移現象の時間スケールの評価が必要であるが、ここでは、正弦波型の乱れに対する粒子の応答特性を検討することにより、遷移現象の時間スケールの検討を行う。

水流の乱れを正弦波で近似し、次式で表す。

$$v' = \sqrt{2} v'_A \sin \frac{2\pi}{T} t \quad \dots\dots\dots (18)$$

ただし、 T は正弦波型乱れの周期である。

水流の乱れの作用下にある粒子の運動方程式は、

$$\rho(\sigma/\rho + C_M) A_3 d^3 \frac{dv_p}{dt} = \frac{1}{2} C_D \rho |v' - v_p| (v' - v_p) A_2 d^2 - \rho(\sigma/\rho - 1) g A_3 d^3 + \rho(1 + C_M) A_3 d^3 \frac{dv'}{dt} \quad (19)$$

与えられる。ここでは、自然砂を対象に検討を行うことから Basset 項は省略している。

式(19)の v' に式(18)を適用し、正弦波型の乱れが正の方向に半周期だけ加わったとき、初期条件 $t=0$; $v_p=0$ のもとに式(18)を解いて、粒子の速度と変位の時間的な変化を求めたのが、図-3 であり、乱れの周波数を変化させたときの応答変位の変化を求めたのが図-4 である。

時間スケールとしては、式(3)の鉛直限界偏倚量 ξ_c と乱れに対する最大応答変位とが、ほぼ等しくなるよ

うな正弦波型乱れの周期を用いる。今回の計算は、比重 $\sigma/\rho = 2.60$ 、粒径 $d = 0.015 \text{ cm}$ の自然砂について行っているが、この粒子に対する時間スケールとしては、最大応答変位が粒径の 0.8 倍程度となる乱れの周期 0.005 sec を用いることとすれば、後述するように、1 saltation の軌道上で平均化された鉛直限界偏倚量もほぼ粒径の 0.8 倍程度となっており、粒子の最大応答変位と鉛直限界偏倚量とがほぼ一致するという先の条件を満足している。また、粒径と沈降速度より定まる時間スケールを用いて得られる無次元時間スケール $\pi_t \equiv \Delta t \sqrt{(\sigma/\rho - 1) g/d}$ は $\pi_t = 0.61$ となり、著者らの従来の実験値よりやや小さめとなっている³⁾。

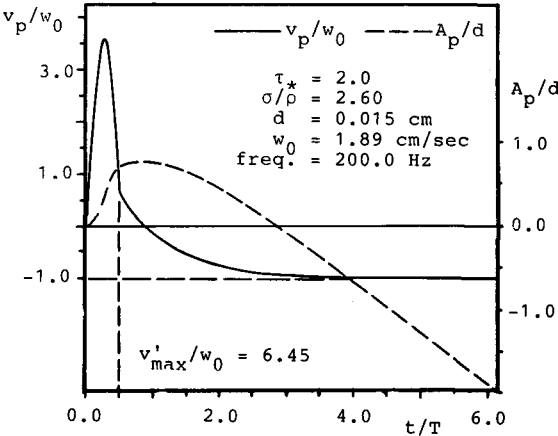


図-3 正弦波型乱れに対する粒子の応答

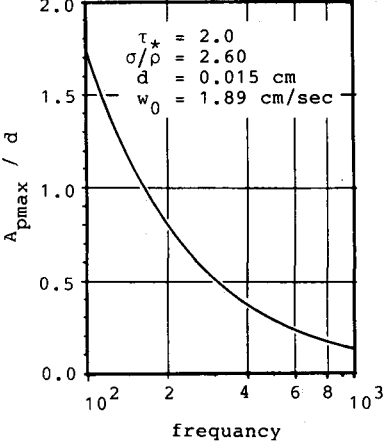


図-4 乱れの周波数に対する粒子の応答の変化

前節におけるパラメータ α は粒子の乱れに対する最大応答 A_{pmax} と粒子周辺の流体の移動量 A_w との比として次のように評価される。

$$\alpha = \frac{A_{pmax}}{A_w} \tag{20}$$

A_w は、粒子周辺の流体が、正弦波型の乱れに従って移動すれば、

$$A_w = \int_0^{T/2} \sqrt{2} v'_A \sin \frac{2\pi}{T} t dt = \frac{\sqrt{2} v'_A T}{\pi} \tag{21}$$

と表される。ただし、 v'_A は粒子が確定論的 saltation 軌跡から偏倚し始める点での乱れである。また、 A_{pmax} は式(19)を解くことによって得られる。ただし、粒子の運動に伴う慣性の効果を考慮するため、saltation 軌跡上の各点での粒子の速度を初期条件として与えて式(19)を解いたときの応答変位と、同一の初期条件のもとに式(19)において右边第3項で示される乱れの効果を除いた式を解いた場合の応答変位との差を用いて A_{pmax} を求めている。

次に、パラメータ β_1 については、粒子周辺の流体の速度の最大値と粒子の応答速度の最大値 v_{pmax} とを用いて、

$$\beta_1 = \frac{v_{pmax}}{\sqrt{2} v'_A} \tag{22}$$

と表す。

また、乱れは、正弦波型で半周期と仮定しているから、粒子の乱れに対する応答変位の最大値や応答速度の最大値が得られる時間が半周期とずれるときには、半周期における粒子の応答変位、応答速度を求めて式(21)、式(22)の A_{pmax} 、 v_{pmax} に用いている。

4. 遷移モデルによる鉛直限界偏倚量及び遷移確率密度の算定

これまでの遷移基準及び遷移現象の時間スケールのモデル化を受けて、無次元掃流力 τ_* に対する平均的

saltation 軌跡上の各点で遷移基準に相当する鉛直限界偏倚量 ξ_c 及び遷移確率密度 p_T を求めることができる。計算は、先ず無次元掃流力に対する平均的初速度に対応する saltation 軌跡を求め、この軌跡上の各点で乱れ強度を式(14)から求めて、その乱れに対する応答解析を式(18), (19)に基づいて行い、パラメータ α , β_1 を式(20), (21), (22)から求める。粒子が確定論的軌跡から偏倚する過程で要する時間とその後確定論的軌跡付近に帰る過程で要する時間と同じであると考えて式(9)において $N=2$ とすると、saltation 軌跡上の各点で、式(7), (9)から乱れ v'_c , v'_2 が分かり、式(10)から粒子の相対速度 v_g が、式(8)から鉛直方向初期偏倚量 ξ_c が分かる。これらの値と式(12), (13)を用いれば、式(3), (4), (5), (6)から鉛直限界偏倚量 ξ_c が求められる。

遷移確率密度を求めるには、遷移を開始するA点での乱れを乱れ強度 $\sqrt{v_A'^2}$ で与え、 $\beta_2 = 0.3$ として、乱れが正規分布に従うことから状態確率 $\text{Prob.}[v' > v'_c]$ を評価し、式(14)に適用すればよい。

以上のようにして、 τ_* に対応する saltation 軌跡上の各点で遷移基準に相当する無次元鉛直限界偏倚量 $\xi_{*c} \equiv \xi_c/d$ 及び遷移確率密度 p_T を求め、粒子の乱れに対する応答特性に関するパラメータ α , β_1 及び saltation 軌跡とともに示したのが、図-5である。計算は、比重 $\sigma/\rho = 2.60$, 粒径 $d = 0.015 \text{ cm}$ の自然砂について行っている。

saltation 軌跡からわかるように、上昇時には粒子は急激に運動し、降下時には上昇時に比べて緩やかな運動をする。粒子の応答特性に関するパラメータ α , β_1 は粒子が上昇するに従って増加し、 α , β_1 とも saltation 軌跡の頂部付近でピークを持ち、降下時には、初め若干減少した後、一定となる。粒子が上向きの速度を持った状態では、粒子速度が大きいほど慣性も大きく、応答特性が悪いが、saltation 頂部に向かうに従って粒子速度が小さくなり、応答が良くなる。これに対して、粒子が下向きの速度を持った状態では、粒子速度と乱れの方が逆であって乱れに対する応答を押さえる方向に抗力が働き、乱れ的作用時間と粒子の応答ピークが得られる時間の間にほとんどずれがなく、降下時の初期を除いては、粒子の応答特性はあまり変化せず、パラメータ α , β_1 は一定となる。

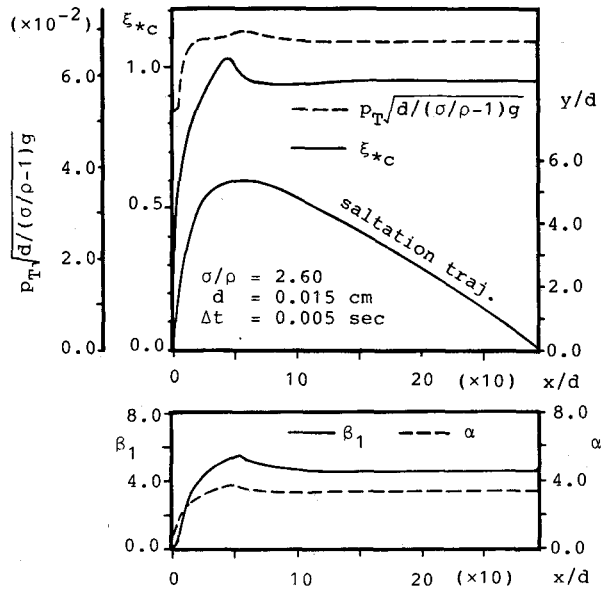


図-5 saltation 軌跡上での ξ_{*c} , p_T

無次元鉛直限界偏倚量 ξ_{*c} は粒子の運動状態が急激に変化する上昇時には、急激に増加し、saltation 頂部でピークを持った後、降下時に入って減少した後一定となる。また遷移確率密度 p_T は、上昇時の初期を除いては頂部付近で若干の高まりを持つもののほぼ一定となる。図-5から解るように ξ_{*c} は、粒子が saltation のどの位置にあるかによって変化し、その値は 0.2 から 1.0 程度の幅を持っている。著者らによって、実験的に求められた無次元鉛直限界偏倚量 $\xi_{*c} = 0.2$ は本モデルによる計算値の下限値に相当している³⁾。また、図-5の結果は saltation の各点での乱れ強度の平均値を対象とした計算結果であり、乱れ自体が変動する量であるから実際には ξ_{*c} も各点での ξ_{*c} の周りである程度の幅を持っていると考えられる。

更に、本遷移モデルでは、粒子は確定論的軌跡から乱れによって偏倚した後、元の軌道近傍に再帰すると考えており、粒子が軌道周辺のある範囲に再帰すれば掃流運動が継続されるとする立場を採っているが、これは実験による際の遷移の判定の仕方とは異なると考えられる。

次に、無次元掃流力 τ_* に対する平均的な初速度を初期条件として決まる saltation 軌跡について、無次元

鉛直限界偏倚量 ε_{*c} 及び遷移確率密度 p_T を 1 つの saltation 軌道上で平均し、 τ_* の変化に対する ε_{*c} 及び p_T の変化を示したのが、図-6 及び図-7 である。

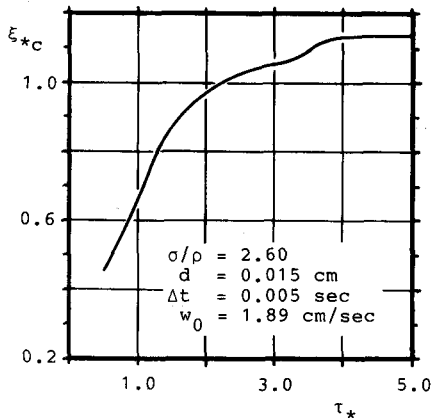


図-6 τ_* と ε_{*c} の関係

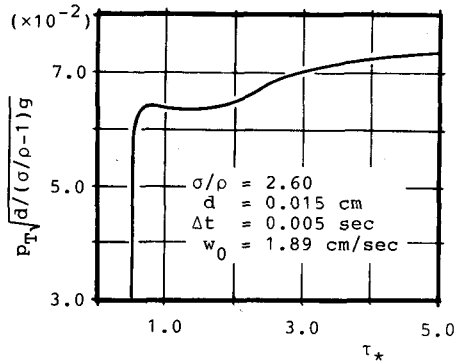


図-7 τ_* と p_T の関係

以上のようにして得られた遷移確率密度は、河床面との衝突・反発による初速度を初期条件として決まる saltation 軌跡上での値であり、saltation の条件付き遷移確率密度となっているが、パラメータとしての汎用性を考慮し、流砂モデルに取り込むために、遷移確率密度 p_T を saltation の初速度で条件解放し、河床からの高さ y の関数 $\hat{p}_T(y)$ として次式のように表示する。

$$\hat{p}_T(y) = \int_0^\infty (y, v_0) g_0(v_0) dv_0 \tag{23}$$

saltation の初速度の分布は、irregular successive saltation の simulation によれば、無次元掃流力 τ_* に対して、平均 $E[v_0] = 2.5 \sqrt{(\sigma/\rho - 1)gd} \tau_*^{0.5}$ ，shape parameter $r = 5.2$ の gamma 分布

$$g_0(\eta) = \frac{r}{\Gamma(r)} (r\eta)^{r-1} \exp(-r\eta) ; \quad \eta = \frac{v_0}{E[v_0]} \tag{24}$$

に従うことが知られている。

また、図-5 によれば遷移確率密度は p_T は、saltation の上昇時の初期に急激に変化するものの、全体としてはほぼ一定値をとることに注目すると、式(23)の $p_T(y, v_0)$ は、次式で近似される。

$$p_T(y, v_0) = p_T(v_0) H(H_s(v_0) - y) \tag{25}$$

ここに、 $H_s(v_0)$ は初速度によって決まる saltation の高さ、 $H(\quad)$ はヘビサイド単位ステップ関数である。

5. あとがき

本報では、砂粒の確定論的 saltation 軌跡からの鉛直方向偏倚量が従う logistic 方程式型の微分方程式の閾値を遷移基準に相当する鉛直限界偏倚量として定義し、前報³⁾で定義された掃流砂と浮遊砂との砂粒の運動形態による区分に力学的合理性を保障する形での掃流砂と浮遊砂の区分を提案した。更に、この遷移基準に基づき、遷移確率密度の評価を行った。また本報では、遷移基準と遷移の時間スケールとは相互に影響しあう量であるとの考えに基づき、ある周期の正弦波型乱れに対する粒子の最大応答変位が、遷移基準に一致するように周期を定めてこれを遷移の時間スケールと考えた。こうした考え方に従うと、遷移の長さスケールともいうべき鉛直限界偏倚量と時間スケールとが、ともに矛盾なく説明される。

参考文献

- 1) 中川・辻本・村上・旗持：第 29 回水理講演会論文集，1985.
- 2) Nakagawa, H. and Nezu, I., Proc. JSCE, No.231, 1974.
- 3) 辻本・中川：土木学会論文集，第 345 号 II-1, 1984.