

空気流によるサンドリップルの発生発達に関する研究 Studies on the Formation of Sand-Ripples in Air Flows.

北海道大学工学部 山田 正 T.Yamada
北海道大学大学院 竹本典道 N.Takemoto

1. はじめに

砂漣 (ripples)、砂堆 (dunes) あるいは反砂堆 (anti-dunes) の発生に関して Kennedy⁽¹⁾ はポテンシャル理論を用いた研究により理論的研究を大いに前進させたのみならずそれらの発生を砂運動に伴う河床面の不安定機構によるものとして説明した点に理論面での貢献を成した。しかしそこで導入された遅れの距離は実現象との対応がつけられないほど過大なものとなっていた。この問題点に関して、林は⁽²⁾ 流砂運動に対して河床面の勾配の効果 (inclination factor) を導入することにより、過大な遅れ距離を導入することなく、各種の河床形状の発生を説明できる事を示した。その後、林・尾崎⁽³⁾、岸・黒木⁽⁴⁾ らによりせん断流の基本式を用いた理論解析が展開されてきたが、各種河床形態の発生に関してはこれらの研究は同じ考えの上に構築された理論と見なし得るものであり、Kennedyや林らの理論においては外的に与えていた各種パラメータの値を基本式の解そのものの中に内包させることを目的としたものとして位置づけられよう。これらの理論的研究により、河床波の発生に関してはかなり明らかになってきたが、砂漣と砂堆をどの様に区別していいかといった疑問に対する解答は未だ明確に提示されているわけではない。

この様な実情を踏まえ、本研究は特に砂漣の発生に着目しつつ、一旦発生した砂漣がどの様に発達して行くかを理論的実験的に明らかにして行くことを目的としたものである。

2. 砂漣の発生に関する基本的要因

(1) 河床波上のせん断応力の分布

既述の様に林⁽²⁾ は河床波の発生においては河床波の勾配に関係した要素が重要であり、必須の物である事を示した。一般に、流砂量 q_b と河床せん断力 τ の間には $q_b \propto \tau^n$ の関係が認められる。ところで、 τ と河床形状 η に関しては次式で示される関係式が実験値をよく説明する近似式となっていることが山田ら⁽⁵⁾ によって示されている。

図1はHanrattyら⁽⁶⁾ による河床波上のせん断応力分布に対して(1)式を当てはめた場合であり、 β として4~6程度の値をとるときには(1)式は河床波上のせん断応力の分布の流れに対する上流側へのず

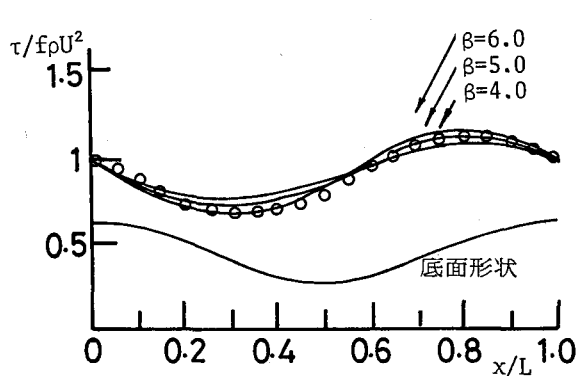


図1 サイン形状をした底面上での
せん断応力 τ と β の関係
(・印は Hanratty らの実験値)

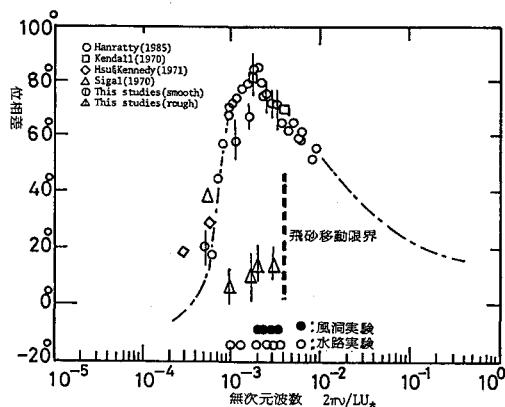


図2 無次元波数と位相差の関係

(Lは底面形状の波長、曲線上の点は滑面固定床、
 Δ 印は粗面固定床実験の結果、風洞実験・水路実験は
ともに移動床水路で発生した砂漣の波長のみを示す)

れ（進み）を近似的に表していることが判る。図2はサイン形状をした河床上でのせん断応力の上流側へのずれの角度に関して、過去の測定結果をまとめたものであり、河床波長が長すぎても短すぎても底面せん断応力の河床波形に対する上流側へのずれは生じておらず、また粗面上の流れにおいても位相のずれが生じていないことが判る。これにより河床波（後の解析より示されるが、この場合には砂漣）の発生には滑面であることが必要であり、さらに発生する波長はせん断応力の位相の進みを生じさせる上下限の長さが存在することが判る。次に既出の $q_0 \propto \tau^n$ の関係を用いると、流砂量 q_0 として（2）式が考えられる。ここに、 u_0 は河床上の流速、 c は比例係数である。この式中の q_0 はその場の水理量で決定されたとしたいわゆる平衡流砂量である。この式より、平衡流砂量 q_0 の値は河床形状に対して上流側にずれている（進んでいる）事が判る。

（2）砂運動に伴う流砂の遅れ

上記の q_0 は河床形状に対して上流側にずれていたが、実際の流砂量 q は砂粒子のサルテーション運動に伴いステップ長 δ 程度下流側にずれており（河床形状に対して遅れている）、（3）式が成立していることが考えられる。さらに、（3）式をテーラー展開し、 δ に関し2次のオーダーまで考慮すると、（4）式を得る。上記（1）、（2）式により流砂量に関しては河床せん断応力と河床形状の間の位相差に伴う上流側への進みと砂粒子のサルテーション運動に伴う下流側への遅れの拮抗した二つの作用が存在しており、次に示す理論解析とその数値解析により、この二つの作用のうち前者が発生要因となり、後者が抑止効果を有していることが判る。

3. 砂漣の発生発達に関する基本式の導出と基本式の特性

砂漣の発生発達を支配する基本式の導出に関しては既に昨年と同論文集において示しているため、ここでは詳細を省き、その格子だけを述べる。

図3は流れの模式図であり、各記号は以下のように定義される。

U ：平均流速、 u_0 ：河床上の流速、 η ：河床の位置、 q ：流砂量、 δ ：遅れ、 q_0 ：平衡流砂量、 h ：河床波の存在が流れに影響を与える距離。

（1）流れの表現

本研究で対象としているのは砂漣であることから河床波のスケールに比べて水深が十分に大きい場合であり、図3中の h は必ずしも水深である必要はなく、河床波の存在によって流れが影響を受ける最上端までの距離として定義される。このとき、流れ場としては連続式より導かれる（5）式が最も簡単なものである。さらにこの式をテーラー展開し、 (η/h) に関して3次以上の項を無視すると（6）式を得る。この式を（2）式中の平均流速の項に代入することにより、流砂量 q と河床波の波形 η とが関係づけられる。

（2）基本式とその特性

上記（2）、（4）、（6）式を流砂の連続式（7）式に代入する事により、最終的に河床波を支配する基本式として（8）式を得る。さらに、 $y = \eta/h$ 、 $\xi = x/h$ 、 $\tau = t \bar{q}/h$ で示される量を用いて無次元化すると（9）式を得る。この方程式は波形 η に関して非線形となっており、この非線形性が従来の理論にはない本理論の特徴と言えよう。この式の左辺第1項は波形に関する非定常項であり、第2項が移流項である。この項の非線形性より河床

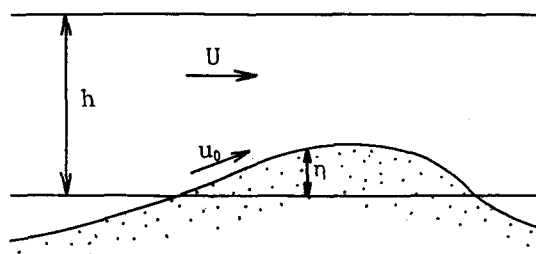


図3 流れの模式図

$$\tau = au_0^2 \left(1 + \alpha \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$q_0(x) = cu_0^m \left(1 + \alpha \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$q(x) = q_0(x - \delta) \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$q(x) = q_0 - \delta \frac{\partial q_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \delta^2 \frac{\partial^2 q_0}{\partial x^2} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$u_0 = U \frac{h}{h - \eta} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$u_0 = U \left(1 + \frac{\eta}{h} + \frac{\eta^2}{h^2} \right) \quad \dots\dots\dots (6)$$

波は波長の短いものほど速く進み、かつ前傾化して行くことが予想される。次に左辺第3項は拡散項を示している。項の中の α 、 δ 等は様々な値を取ることができるが、拡散係数が負の値を取る場合が河床の不安定=河床波の発生を意味する場合である。さらにこの拡散係数の項より、 α が発生に、 δ が発生を抑止するように働いていることがわかる。また河床波高がある大きさに達すると拡散係数は0となり、このときに河床波の成長が止むことになる。左辺第4項は分散項であり、河床波の前傾化を短波長の波の発生によって分散させる効果を持っている。左辺第5項は散逸項であり、河床波の成長そのものを抑える働きをしている。興味あることは、散逸項の係数に α も δ も関与していることである。

(3) 発生波長に関して

河床波の発生初期は波高が小さいことから、基本式中の非線形項はすべて無視し得るオーダーとなり、定数係数の線形偏微分方程式(10)式となる。このとき y として $y \propto \exp(ikx + \sigma t)$ と仮定すると、 $\sigma - k$ の分散関係式(11)式を得る。このとき、成長率を最大にするような波数 k は $[d\sigma/dk]$ の実部=0を満たすものであり、 $k = \sqrt{B/2D}$ を得る。

ここに、 $B = \alpha$ 、 $D = 1/2 \cdot \alpha (\delta/h)^2$ で与えられる。よって成長率を最大にする波長=実際に現れる波長 L は $L = 2\pi \delta$ となる。ここで δ としてはステップ長を取り、砂の粒径の100倍の大きさをとると、 $L = 600d$ を得る。この値は従来、砂漣の発生波長にほぼ等しい値となっていることより、本理論で現れる河床波は砂漣であると言えよう。さらに発生波長には代表長さ h が関与していないこともわかる。

4. 数値解析の結果

(1) 計算手法

計算に用いた基本式は無次元形の(9)式であり、また計算では無次元速度 m で動く座標系からみた基本式を採用している。境界条件としては、発生する河床波の波長より十分に大きな領域の上下端において同じ値を取るいわゆる周期境界条件を用いており、空間的には中央差分、時間的にはRunge-Kutta-Gill法を用いている。

(2) 計算結果

初期条件の波形として、波高 $y = \eta/h = 0.1$ 、波長 $\xi = x/h = 10$ の sin curve を与えた。結果は図4に示すとうりである。

① m の変化による波形への影響 ($\alpha = 6$, $\delta/h = 0.2$)

波高は m の値が小さいほど高くなる。波長は m の値に係わらずほぼ一定である。後に示す風洞実験での風速と流砂量の関係は、限界掃流力付近で、 m の値は大きくなっているものの、ある程度以上の風速では m は約4で一定であった。弱い風(m は大)では、波高が低くなっており、計算結果と一致している。

② δ/h の変化による波形への影響 ($m = 4$, $\alpha = 6$)

波高は遅れの距離が小さいと高くなり、特に遅れの距離が初期波長の4分の1より長い場合は、波は発達しない。波長は遅れの距離が大きいと長くなる。このことは、風洞実験において風速が速いほど波長が長いことと一致している。

③ α の変化による波形への影響 ($m = 4$, $\delta/h = 0.2$)

波高は α の値が大きいほど高くなる。波長は α の値に無関係に一定である。また、 α の値は、発達時間と大きな関係があり、 α の値が大きいほど、発達するのが速くなる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots(7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \eta}{\partial t} + m \frac{\bar{q}}{h} \left(1 + 2 \frac{\eta}{h} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ & + \bar{q} \left[\alpha - m \frac{\delta}{h} \left(1 + 2 \frac{\eta}{h} \right) \right] \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \\ & + \left[\frac{1}{2} \delta^2 m \left(1 + 2 \frac{\eta}{h} \right) \frac{\bar{q}}{h} - \alpha \delta \bar{q} \right] \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \\ & + \frac{1}{2} \delta^2 \alpha \bar{q} \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} = 0 \quad \dots\dots\dots(8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial y}{\partial \tau} + m \left(1 + 2y \right) \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ & + \left[\alpha - m \frac{\delta}{h} \left(1 + 2y \right) \right] \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \\ & + \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{\delta}{h} \right)^2 \left(1 + 2y \right) - \alpha \left(\frac{\delta}{h} \right) \right] \frac{\partial^3 y}{\partial \xi^3} \\ & + \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{\delta}{h} \right)^2 \frac{\partial^4 y}{\partial \xi^4} = 0 \quad \dots\dots\dots(9) \end{aligned}$$

$$y_\tau + A y_\xi + B y_{\xi\xi} + C y_{\xi\xi\xi} + D y_{\xi\xi\xi\xi} = 0 \quad \dots\dots\dots(10)$$

$$\sigma = k^2 B - k^4 D - i(kA - k^3 C) \quad \dots\dots\dots(11)$$

④初期条件の波形への影響

図5は、初期条件に波長の長い波を与えた場合と、波長の短い波を与えた場合の物である。他の条件は等しく、最終的な形状は同じになるはずであると考えられるが、図でみられるように、明らかに異なった形状になっている。これは周期境界条件を用いた計算領域の制限から来ていると思われる。

5. 風洞を用いた実験

前述までの理論解析では砂漣前部の流れの剝離等は全く考慮していない。よって理論の検証のために剝離流れのない風洞中にできる砂漣を対象とした。

(1) 実験装置及び実験方法

実験に使用した風洞は、長さ600cm、幅40cm、高さ30cmの吹き出し型である。風洞の吹き出し口(下流端部)には、吹き出した砂を回収するための、集砂装置が取り付けられている。風洞内の流速分布は、壁面付近を除きほぼ一様な流速を実現することができた。境界層は風洞入り口より1m程度離れるとほぼ一様となっている。

実験材料は、次の3種類の砂である。砂1…… $d_{50}=0.22\text{mm}$ 、比重2.85、砂2…… $d_{50}=0.15\text{mm}$ 、比重2.68、砂3…… $d_{50}=0.82\text{mm}$ 、比重2.68

3種類ともほぼ単一粒径の砂である。砂1には若干の砂鉄が含まれており、比重が大きくなっている。砂2、砂3は珪砂である。

実験における初期砂面は全て平坦である。流砂量の計測は、風洞下端に取り付けられた集砂装置に集められた砂の見かけの体積(空隙を含む体積)によって測定されている。風速は風洞のほぼ中央($x=350\text{cm}$, $y=20\text{cm}$, $z=15\text{cm}$)において、ピトー管及び傾斜マノメータを用い計測している。波形の縦断測定は、風洞中央断面においてポイントゲージを用い行われている。

実験は風速を一定に保ち、砂の補給をせずに行っている。この状態で、砂漣が発生発達し、十分成長し終わるまで続けた。これに要した通風時間は、砂種及び風速によって異なっており、5～90分であった。

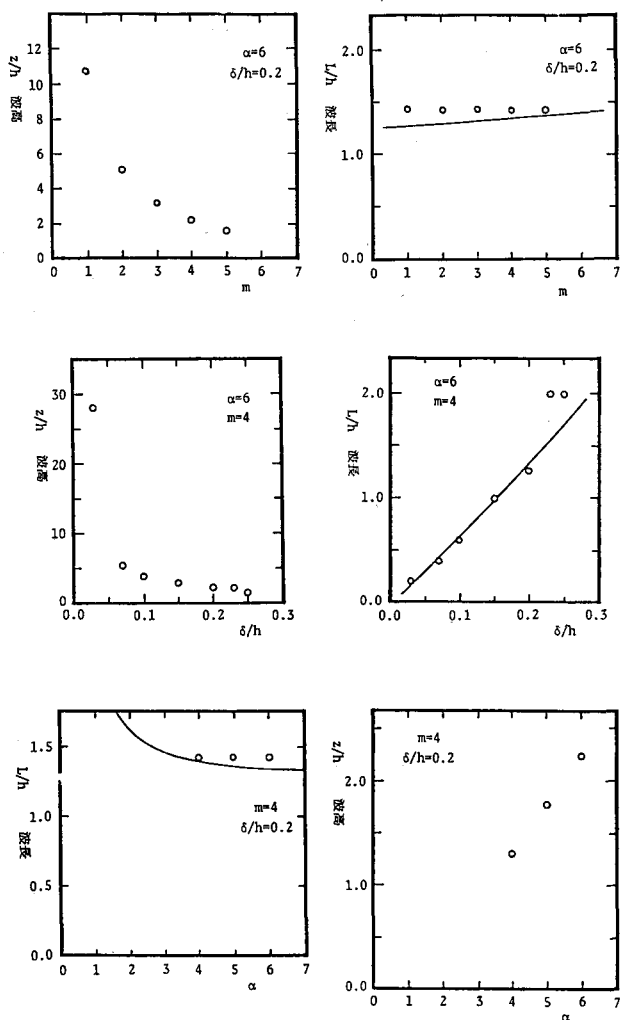


図4 各パラメータと波形の関係

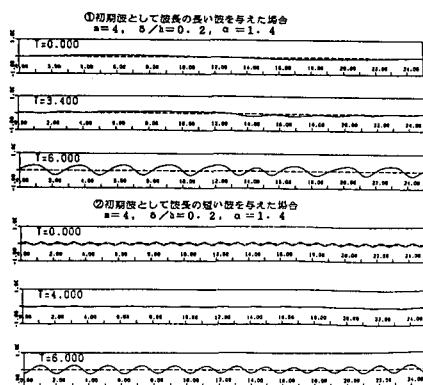


図5 計算による波形

(2) 実験結果

① 風速と流砂量の関係

図6は風速と流砂量の関係を示すものである。図に示すように見かけの流砂量（空隙を含む体積）は砂の粒径よりも風速に関係するところが大きく、今回の実験では砂1の流砂量と砂2の流砂量は互いに良く一致しており風速の4乗程度に比例している。本実験では砂1の移動限界は風速 $V=4.8\text{ m/s}$ であり、砂2の場合は風速 $V=4.4\text{ m/s}$ 、砂3の場合は風速 $V=10.3\text{ m/s}$ であった。

② 砂漣の形状

図7は各々の実験中最も波形がきれいな部分を100cm区間にわたり抜き出したものである。砂漣はやや前傾しており風速が増すと共にその傾向が顕著になっている。砂3においては砂漣の発生がみられなかった。

③ 砂漣の移動

砂漣の存在下における砂の運動を大別すると、大跳躍をするものと、河床を転がっているものに分類することができる。また、これら二つの状態は、砂漣の移動に関し、それぞれ別々の役割を果しているように思われる。砂漣が移動する時は常に河床の洗掘と堆積が生じており、洗掘箇所では砂の激しい運動があり、一方、堆積は河床を転がっている粒子によるものが支配的である。この実験では、水流中にできる砂漣に見られる剝離渦を確認することはできず、剝離渦を考慮にいれていない本理論の検証に適していることが考えられる。図8は砂漣の移動速度と風速の関係を示すものであるが、この図より、砂漣の移動速度は平均風速に対して直線的に増加しているようである。

④ 風速と砂漣波形の関係

図9は波長を風速ごとに度数割合の形で表したものである。定常状態の波長は風速と共に長くなっている。

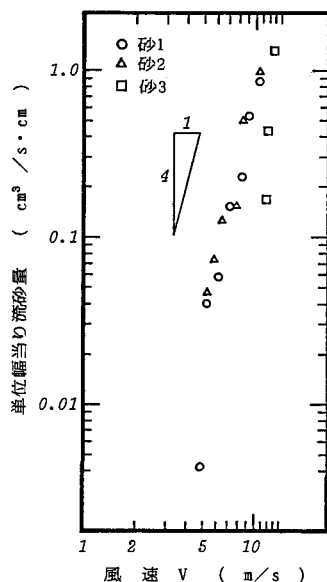


図6 風速と流砂量の関係

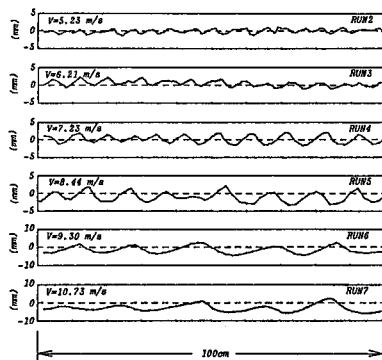


図7 風速と砂漣波形

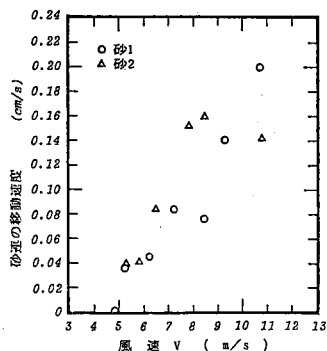


図8 風速と砂漣の移動速度

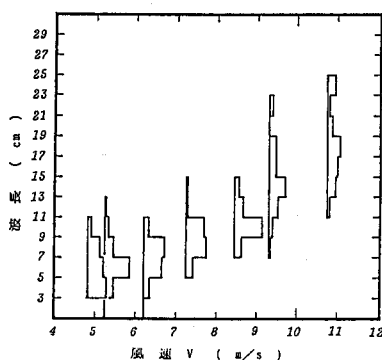


図9 風速と波長の関係

る。風速が増すと波高が増す傾向がある。また、風速が増すと波高のばらつきも大きくなる傾向が見受けられる。砂1では波形勾配は風速によらずほぼ一定である。このことは波長が長ければ波高も高いことを示しており、風速に対し波長・波高とも同じ様な傾向があると言える。さらに詳細に調べると風速 $V = 7 \sim 8 \text{ m/s}$ のあたりで若干波形勾配が大きくなっているようである。この風速はちょうど砂澱の発達が進んでいる場合にあっている。これらの事を考えると砂澱のでき易い条件では波形勾配が大きくなるということができる。

6. 理論の適合性

風洞を用いた実験においては、風速が増すと連れて波長が長くなる傾向を得ている。このことから逆に、発生波長を支配する遅れの距離 δ は流速とともに増加していると考えられる。理論においては、遅れの距離 δ が大きくなると波長が長くなるという結果を得ており、実験結果と良く一致している。波高について理論では、遅れの距離 δ の増大に対し減少していく傾向にあり、実験結果と一致していない。風洞実験においては風速が速くなると m の値が若干小さくなる傾向があった。また、風速が速くなると波高が高くなる傾向があったので、波高と m の関係にすると、 m が大きくなると波高が低くなるということが出来る。数値計算においても同様な結果を得ており、良く適合している。風洞実験において、砂1の風速 $7 \sim 9 \text{ m/s}$ 、砂2の風速 $5 \sim 7 \text{ m/s}$ では、砂澱の発達が非常に速く、また、発生した砂澱の形状が良くそろったものであった。この風速での波形勾配は、その他の風速に対応するものよりも若干大きくなっている。数値計算においては、inclination factor α は、波形の発達時間に深く関わりを持っており、 α の値が大きくなると、波形の発達が速くなることが解っている。また、 α は波長に対して大きな影響を持つことはないが、波高には大きく影響している。 α の値が大きくなると波形勾配は大きくなる。よって、発達時間が短い場合には波形勾配は大きくなると言える。よって、発達時間と波形勾配の関係は数値計算と風洞実験の結果において良く一致している。

本理論中には未だ不明確な点もあるが、全体の傾向としては風洞実験によって得られた結果と良い一致を示している。

Appendix

本論文では既述のように流砂の連続式に基づき河床波の基礎式を導いているが、ここではステップ長の分布 f (1) を考慮した連続式を用いても同様の式を導き出すことができることを示す。ここで基本式としては中川・辻本らによって常用される流砂のピックアップ率 Ps を用いて、(A1) 式で表される。ここに、 c_0 は定数である。次に Ps に関しては $Ps \propto \tau$ の関係が存在することが中川・辻本らによって示されていることから、 Ps としては (A2) 式が本文と同様に仮定できる。次に $Ps(x-\xi)$ を x のまわりにテーラー展開すると (A3) 式を得る。(A3) 式を (A1) 式に代入すると、(A4) 式の項が出る。ここで、 $I_n = \int_0^\infty \xi^n f(\xi) d\xi$ とおくと I_n はステップ長の分布 f (1) の n 次モーメントになっており、これを用いると最終的に (A5) 式を得る。この式は線形化した (10) 式と同形をしている。さらにステップ長の分布とそのモーメントを含む形で式が得られていることより、(10) 式より、より詳細な情報を内包した基本式であると言えよう。

○謝辞：本研究は文部省科学研究費（代表：吉川秀夫早大教授）の補助を受けている。ここに記して感謝の意を表す。

○参考文献(1) Kennedy, J.F., J.F.M., 1963. (2) 林泰造, Proc. ASCE, 1970. (3) 林泰造, 尾崎幸男, 水講, 1976. (4) 岸力, 黒木幹男, 水講, 1982. (5) 山田正, 他2名, 水講, 1987. (6) Abrams, J. & Hanratty, T.J., J.F.M., 1985.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = c_0 \left\{ \int_0^\infty Ps(x-\xi) f(\xi) d\xi - Ps(x) \right\} \quad \text{.....(A1)}$$

$$Ps(x) = (a+b\eta) \left(1 + \alpha \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = (a+b\eta + \alpha b \frac{\partial \eta}{\partial x}) \quad \text{.....(A2)}$$

$$P(x-\xi) = a + b \left\{ \eta - \xi \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{2} \xi^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{1}{6} \xi^3 \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + \frac{1}{24} \xi^4 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} \right\} + \alpha a \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial x} - \xi \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \xi^2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} - \frac{1}{6} \xi^3 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} \right\} \quad \text{.....(A3)}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty Ps(x-\xi) f(\xi) d\xi &= a \int_0^\infty f(\xi) d\xi + b \eta \int_0^\infty f(\xi) d\xi \\ &\quad - \left\{ b \int_0^\infty \xi f(\xi) d\xi \right\} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left\{ \frac{b}{2} \int_0^\infty \xi^2 f(\xi) d\xi \right\} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \\ &\quad - \left\{ \frac{b}{6} \int_0^\infty \xi^3 f(\xi) d\xi \right\} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + \left\{ \frac{b}{24} \int_0^\infty \xi^4 f(\xi) d\xi \right\} \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} \quad \text{.....(A4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 b I_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} - c_0 \left(\frac{b I_2}{2} - \alpha a I_1 \right) \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \\ + c_0 \left(\frac{b I_3}{6} - \frac{\alpha a I_2}{2} \right) \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + c_0 \left(\frac{\alpha a I_3}{6} - \frac{b I_4}{24} \right) \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} = 0 \quad \text{.....(A5)} \end{aligned}$$