

開水路乱流における沈降性物質の移流分散現象

On the Dispersion Phenomena of Suspended Solid in Turbulent Open-Channel Flow

九州工業大学工学部 藤崎一裕 K. Fujisaki

九州工業大学大学院 谷川弘樹 H. Tanigawa

九州大学工学部 栗谷陽一 Y. Awaya

1. 序論

開水路乱流中に投入された沈降性粒子の移流分散現象について調べた。本研究は、二次元開水路中での物質の縦分散に関するElderの研究に拡散物質の沈降性を考慮に入れて考察したものである。

沈降性を有する物質が流水中に投入されると、その物質は移流、乱流拡散の作用を受けつつも、沈降しながら流れの中を拡がっていく。この物質の沈降性のために現象が複雑になっており、さらに水路底部に達した粒子の挙動を明確に記すことが非常に難しいことも現象の解析を困難なものにしている。

沈降性粒子の移流分散については、水路底部への粒子の沈積がない、完全反射の場合を対象としたSumerの研究¹⁾がある。一方筆者らは、これに対して水路底部に達した粒子はすべて沈積するという完全吸収の場合について先に検討した²⁾。本研究は、これら両極端の場合をも包括する、より一般的な場合について検討したものである。

Taylorが円管内の物質の分散現象に導入した手法³⁾を用いて、沈降性粒子クラウドの平均移流速度や移流分散係数と沈降パラメータとの関係を論じた。また、理論解析の結果を室内実験により検証した。

2. 理論的解析

この現象に対する基礎方程式は流水中に投入された拡散物質の保存則である。流下方向に x 軸、これに垂直に y 軸を取ると、次式が得られる。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial C}{\partial y} + w_0 C \right) \quad (1)$$

$$D \frac{\partial C}{\partial y} + w_0 C = 0 ; y = h \quad (2.1), \quad D \frac{\partial C}{\partial y} + (1-\alpha)w_0 C = 0 ; y = y_0 \quad (2.2)$$

ここに、 u : 流速、 c : 粒子濃度、 D : 乱流拡散係数、 h : 水深、 w_0 : 粒子の沈降速度、であり y_0 は後の(3)式における $u = 0$ となる高さである。

水路底部における粒子の挙動に関して、(2.2)の境界条件式を採用した。式中のパラメータ α は、bed absorptency coefficientと呼ばれて、水路底部に達した粒子がそこに沈積する確率に対応するとされている。したがって、 $\alpha = 1$ は完全沈降、 $\alpha = 0$ は完全反射を意味する。(2.2)式のような考え方は必ずしも一般的に最も妥当性のある境界条件の表示式として受け入れられているとはいえず、むしろ、より現実的には水路底部における掃流砂の濃度との関連等を考慮して検討すべきものとも考えられる。しかし、次のような理由からこの境界条件を用いた。この研究の主たる目的が主としてバルク流中での粒子の分散現象の解析の手法を示すことにあり、(2.2)式の考え方が類似の問題の取扱に採用されていること(例えば、Sayre⁴⁾、Jobson and Sayre⁵⁾、高松ら⁶⁾)、また、現状では著者の知る限りにおいて上式に代わる普遍性のある取扱も見出し難いことなどである。

流れの場合は対数則に従うものとして、流速分布および過動拡散係数の分布を次式で表す。

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{K} \ln \frac{y}{y_0} \quad (3)$$

$$D = \kappa u_* y (1-y/h) \quad (4)$$

u_* : 摩擦速度

基礎方程式の無次元表示は次式で与えられる。

$$\frac{\partial C}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\bar{D} \frac{\partial C}{\partial \bar{y}} + ZC \right) \quad (5)$$

$$\bar{y}(1-\bar{y}) \frac{\partial C}{\partial \bar{y}} + ZC = 0 ; \bar{y} = 1 \quad (6.1), \quad \bar{y}(1-\bar{y}) \frac{\partial C}{\partial \bar{y}} + (1-\alpha)ZC = 0 ; \bar{y} = \bar{y}_0 \quad (6.2)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \bar{t} &= t/(h/(\kappa u_*)) , \quad \bar{x} = x/h , \quad \bar{y} = y/h , \quad \bar{y}_0 = y_0/h , \quad \bar{u} = u/(\kappa u_*) \\ \bar{D} &= D/(\kappa u_* h) = \bar{y}(1-\bar{y}) , \quad Z = w_0/(\kappa u_*) \end{aligned} \quad (7)$$

分散係数を求めるために、(5)式の解は流下方向に濃度勾配がない場合の解 $\tilde{C}$ とその補正項 $\hat{C}$ とを用いて次式で近似できるものとする。

$$C(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \tilde{C}(\bar{y}, \bar{t})(1+K\bar{x}_1) + \hat{C}(\bar{y}, \bar{t}) \quad (8)$$

ここに、

$$K = \frac{1}{\langle C \rangle} < \frac{\partial C}{\partial \bar{x}_1} > = \frac{1}{\langle C \rangle} \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial \bar{x}} \quad (9), \quad \bar{x}_1 = \bar{x} - \bar{U}_s \bar{t} \quad (10), \quad \langle * \rangle \equiv \int_{\bar{y}_0}^1 * d\bar{y} \quad (11)$$

であり、 K は平均濃度の流下方向勾配の無次元表示、 $\tilde{C}$ は流下方向に濃度勾配が無い場合の濃度分布（クラウド中央部の濃度分布にも対応する）、 $\bar{U}_s$ は粒子の平均流速、 $\bar{x}_1$ はクラウド中央部（ $\partial/\partial \bar{x} = 0$ ）からの移動座標であり、 $\langle \rangle$ は水深方向に平均化することを意味する。

まず最初に次式の解である $\tilde{C}$ を求める。

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\bar{D} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \bar{y}} + Z\tilde{C} \right) \quad (12)$$

変数分離の手法を用いて、(12)式の形の解を考えると、(14)、(15)、(16)式が得られる。

$$\tilde{C} = \tilde{C}_0(\bar{y}) \cdot T(\bar{t}) \quad (13)$$

$$\bar{y}(1-\bar{y})\tilde{C}_0'' + (1-2\bar{y}+Z)\tilde{C}_0' + \lambda_0\tilde{C}_0 = 0 \quad (14)$$

$$\bar{y}(1-\bar{y})\tilde{C}_0'' + Z\tilde{C}_0 = 0 ; \bar{y} = 1 \quad (15.1), \quad \bar{y}(1-\bar{y})\tilde{C}_0' + (1-\alpha)Z\tilde{C}_0 = 0 ; \bar{y} = \bar{y}_0 \quad (15.2)$$

$$T'/T = -\lambda_0 \quad (16)$$

(14)、(15)式は通常の固有値問題であり、この場合の解 $\tilde{C}_0$ は次式で与えられる。

$$\tilde{C}_0 = \sum_{i=0}^{\infty} A_i \tilde{C}_{0i} \exp(-\lambda_{0i} \bar{t}) \quad (17)$$

$\tilde{C}_{0i}$ は固有値 λ_{0i} に対応する固有関数である（ A_i ：定数）。現象が移流分散過程として考慮できるのは流れが十分に発達した後のことであるから、(17)式の高次の項が省略できる場合を考える。以後、 $\tilde{C}_{00} \rightarrow \tilde{C}_0$ 、

$\lambda_{00} \rightarrow \lambda_0$ と記す。

図1に $\tilde{c}_0$ と Z , α の関係、図2に λ と Z , α の関係の1例を示す。図1は流下方向に濃度勾配がないときの鉛直方向濃度分布を表し、 $\alpha = 0, 1$ のときにはそれぞれ(18), (19)式で表される。

$$\tilde{c}_0 = \frac{\sin \pi Z}{\pi Z} ((1-\bar{y})/\bar{y})^Z \quad (18)$$

$$\tilde{c}_0 = (1+Z)(1-\bar{y})^Z \quad (19)$$

また、図2の λ_0 は(17)式からも明かなように、沈降による濃度減少の速さを示し、 $\alpha = 1$ の完全沈降の場合には次式となる。

$$\lambda_0 = Z(Z+1) \quad (20)$$

図3に、この場合の粒子の平均移流速度を示す。

$\bar{U}_s$ の値は(21)式で求めた。

$$\bar{U}_s = \frac{\int_0^1 \tilde{c}_0 \bar{u} d\bar{y}}{\int_0^1 \tilde{c}_0 d\bar{y}} \quad (21)$$

図3から、 α の値が小さく、 Z の値が大きいほど水路底部の低速部に存在する粒子の割合が多くなり、流体の平均流速と粒子群のそれとの差が大きくなる様子がわかる。

次に、この $\tilde{c}_0$ を用いて(8)式の $\hat{c}$ を求めるため、 c を次式のように表す。

$$c = \{\tilde{c}_0(1+K\bar{x}_1) + \hat{c}_0\} \exp(-\lambda \bar{t}) \quad (22)$$

$$\lambda = \lambda_0 + K\mu \quad (23)$$

(22)式は、流下方向濃度勾配が濃度減少に及ぼす影響を取り入れて、 λ_0 を補正することを示す。(22)式を(5)式に代入し、 $\tilde{c}_0$ が(18)式の解であることを利用すると、

$$\bar{y}(1-\bar{y})\hat{c}_0'' + (1-2\bar{y}+Z)\hat{c}_0' + \lambda\hat{c}_0 = K\bar{u}_s\tilde{c}_0 - (\lambda-\lambda_0)(1+K\bar{x}_1)\tilde{c}_0 \quad (24)$$

が導かれる。ここに、 $\hat{u}_s$ は次式で与えられる。

$$\hat{u}_s = \bar{u} - \bar{U}_s \quad (25)$$

(24)式の解は、(14)式の固有関数を用い、これらの関数が(23)式を重み関数として直交することを利用すると次のように与えられる。

$$\mu = \int_0^1 \gamma \hat{u}_s \tilde{c}_0^2 d\bar{y} / \int_0^1 \gamma \tilde{c}_0^2 d\bar{y} \quad (26)$$

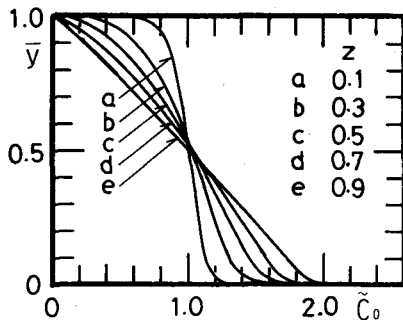


図1 濃度分布 $\tilde{c}_0$ 。

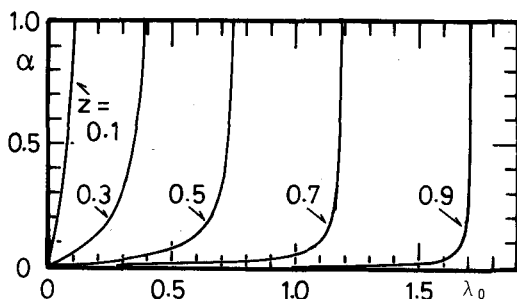


図2 λ_0 と Z , α との関係

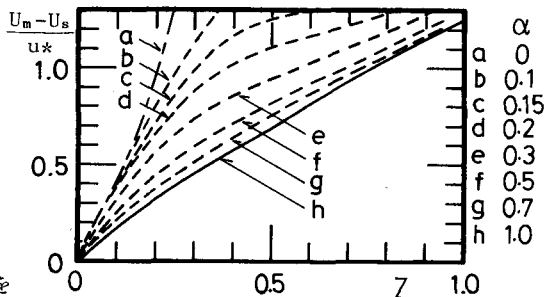


図3 粒子の平均移流速度 ($d/dx = 0$)

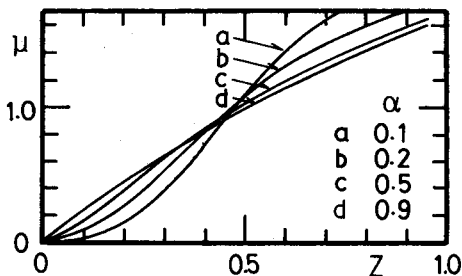


図4 μ と Z , α との関係

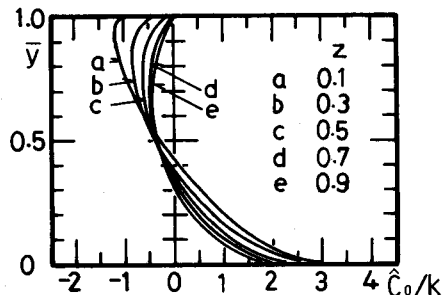


図5 $\hat{c}_0/k$ と Z との関係

$$\hat{c}_0 = K \sum_{i=0}^{\infty} a_i \hat{c}_{0i} \quad (27)$$

$$a_i = -\frac{1}{(\lambda_0 - \lambda_i)} \frac{\int_0^1 \gamma \hat{u}_s \hat{c}_{0i} d\bar{y}}{\int_0^1 \gamma \hat{c}_{0i} d\bar{y}}, \quad i=1, 2, \dots$$

ただし、

$$\gamma = (\bar{y}/(1-\bar{y}))^2 \quad (28)$$

$\hat{c}_0$ は積分表示で次のようにも表示される。

$$\hat{c}_0 = K \hat{c}_0 \int_0^1 \frac{\bar{c}_0^{-2}}{\bar{y}(1-\bar{y})} \gamma^{-1} d\bar{y} \int_0^1 \gamma (\hat{u}_s - \mu) \hat{c}_0^2 d\bar{y} + A_1 \hat{c}_0, \quad (A_1: \text{const.}) \quad (29)$$

図4に λ の補正項 μ と Z , α との関係を、図5に $\hat{c}_0/K$ と Z , α との関係を示す。

この場合の移流分散係数は、次式で与えられる。

$$\frac{D_L}{hu_*} \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial x} = -K \langle \hat{u}_s \hat{C} \rangle \quad (30)$$

上式に(28)式を代入して次式が得られる。

$$\frac{D_L}{hu_*} = -K \int_0^1 \hat{u}_s \hat{c}_0 d\bar{y} \int_0^1 \frac{\bar{c}_0^{-2}}{\bar{y}(1-\bar{y})} \gamma^{-1} d\bar{y} \int_0^1 \bar{c}_0^2 (\hat{u}_s - \mu) \gamma d\bar{y} \quad (31)$$

D_L/hu_* と Z との関係が図6に示されている。この図で $\alpha=0$ の場合は、粒子の水路底部への沈積がない場合で、この場合は $\lambda_0=0$ となる。このときの解はSumerがモーメント変換の手法を用いて先に発表しているもの¹⁾と一致する。また、 $\alpha=1$ のときの解は筆者らが先に検討した完全沈降の解²⁾となる。

(5)式を水深方向に積分して

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial x} + \bar{U}_s \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial x} \langle \hat{u}_s \hat{C} \rangle - \lambda \langle C \rangle \\ &= \bar{D}_L \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle C \rangle - (\lambda_0 + K\mu) \langle C \rangle \end{aligned} \quad (32)$$

となり、さらに(28)式を用いると

$$\frac{\partial \langle C \rangle}{\partial x} + (\bar{U}_s + \mu) \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial x} = \bar{D}_L \frac{\partial^2 \langle C \rangle}{\partial x^2} - \lambda_0 \langle C \rangle \quad (33)$$

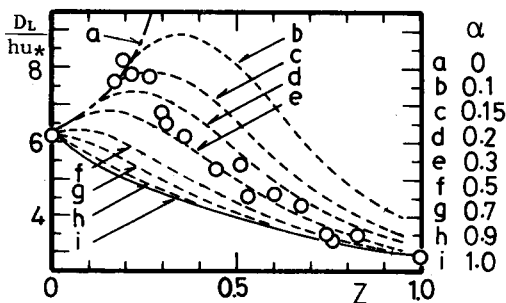


図6 D_L/hu_* と Z との関係

となる。上式右辺第2項は、 $\partial/\partial x=0$ のときの粒子の平均流速 $\bar{U}_s$ に比べて μ だけの粒子クラウドにみかけの加速が生じることを表している。このことについては後に考察する。図7に $\bar{U}_s + \mu$ と Z との関係を示す。 ($U_s^+ = \bar{U}_s + \mu$)

3. 実験的検討

実験装置及び方法

実験は長さ8 m、幅0.4 mの亚克力製のモデル水路により行った。ポンプで水路中に水を循環させ、流量は系内の2つのバルブにより調節した。実験時の平均流速は0.2～0.5 m/sの間で、また水深は2.5～5 cmの間でそれぞれ調節して必要な水理条件を設定した。拡散粒子はポリ塩化ビニール樹脂粉末で比重は1.22、この粉末を48, 70, 100 meshフルイで整粒し、平均沈降速度がそれぞれ0.31, 0.26 cm/sとなるものを用いた。

粒子濃度測定には手製の光電式濁度計を用いた。

3個のプロープは水深の半分の位置に設置されており、各プロープのトレーサ投入点からの距離はそれぞれ2 m, 3 m, 4 m, である。

粒子トレーサとしては前述の粒子を用い、一度の投入には濃度、0.07 g/ccの懸濁液20 mlをビーカーで瞬時に水面上1 cmから注いだ。また、懸濁液中には微量の食塩も溶解させて、粒子濃度計のすぐ近くにセットした電気導度計の導電率の変化から投入流体自身の輸送拡散現象も同時に調べた。

実験結果と考察

実験により得られた粒子の濃度分布から次式により分散係数を求めた。結果の一部は図6にもプロットされている。

$$D_L = \frac{1}{2} \frac{d\sigma^2}{dt} \tag{34}$$

σ は濃度分布の標準偏差、 t はトレーサ投入時からの経過時間である。粒子クラウド平均流速についても同様に図7にプロットして1例を示した。図6, 7は $Re = 20000$ の場合のものであるが、他の Re 数についても図6, 7と同様の図を描き、実験値に比較的適合する α を定めた。

図8及び図9は分散係数及び粒子クラウドの中心の移流速度の理論値と実験値との比較を示したものである。このときの理論的予測値は図6及び図7から各々の実験条件に対応する値を求めた。両者の関係は多少ばらついてはいるが、実験の性質や結果の解析の困難性を考えると、実験値は理論値をほぼ再現しており、理論解析の妥当性が示されているといえる。

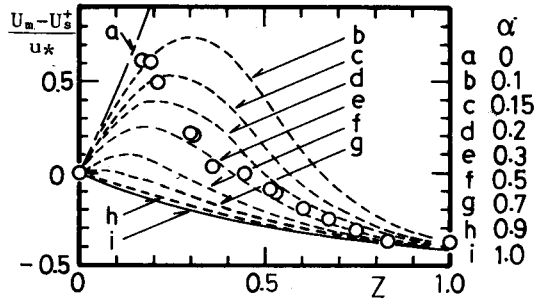


図7 $(U_s - U_s^+) / u_*$ と Z との関係

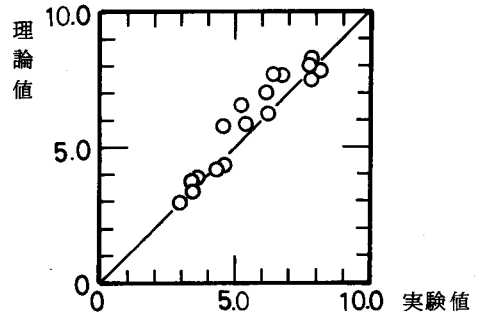


図8 分散係数の理論値と実験値の比較

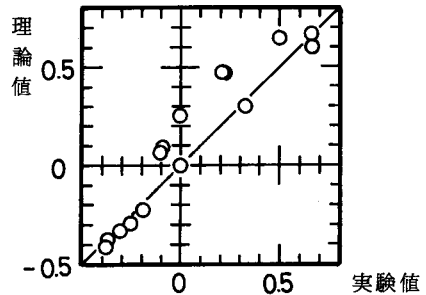


図9 平均移流速度の理論値と実験値の比較

図7や図9には $(u_m - u_s) < 0$ となる部分がある。このことは、粒子クラウドの中心部の流速が水路内の流体の平均流速よりも速くなることを意味する。この現象はクラウド内部における水路底部への粒子の沈積フラックスの場所的な相違にもとづくものである。図10に示されているように、クラウド後部においては、前部に比較して、水路床近傍の粒子濃度が高い。したがって粒子の底部への沈積フラックスも前部に比べて大きくなる。このことは、クラウドの中心（重心）を前方に移動させることになり、これがクラウドを「加速」しているように作用すると考えられる。

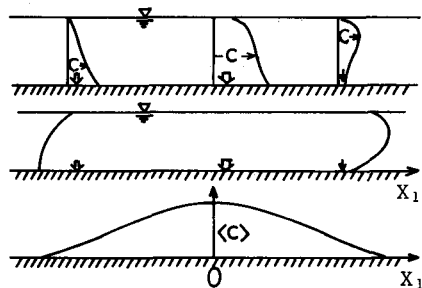


図10 粒子クラウドの概略図

4. 結言

開水路乱流中における沈降性粒子の移流分散現象について検討した。Elderが開水路の分散解析に用いた手法⁷⁾を応用して縦分散現象に及ぼす沈降速度の影響に着目して考察した。水路底部に達した粒子が水路床に沈積する確率を表すパラメータ α と沈降のパラメータ Z を用いて現象を考察し、粒子クラウドの分散係数や平均移流速度をこれらのパラメータの関数として示した。また理論解析の結果を室内実験により検証し、その妥当性を確認した。

沈降性粒子の縦分散に関しては、これまでに、水路床に達した粒子が完全に反射する場合と、完全に沈積する場合の両極端の場合について検討がなされていたが、これらの結果も本報で考察したより一般的な結論の中に含まれる。

なお、本研究の実験に協力された九州工業大学学生吉武範幸君に感謝する。

参 考 文 献

- 1) Sumer, B.M. (1974), "Mean Velocity and Longitudinal Dispersion of Heavy Particles in Turbulent Open-Channel Flow", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 65, pp. 11-28
- 2) 栗谷陽一、藤崎一裕 (1981), 開水路流れにおける沈降性粒子の平均移流速度と縦分散係数, 土木学会論文報告集, 第311号, pp. 71-79
- 3) Taylor, G.I. (1954), "The Dispersion of Matter in Turbulent Flow through a Pipe", *Proceedings of the Royal Society, A*, Vol. CCXXIII, pp. 466-488
- 4) Sayre, W.W. (1969), "Dispersion of Silt Particles Open Channel Flow", *Proceedings of ASCE*, Vol. 95, No. HY3, pp. 1009-1038.
- 5) Jobson, H.E. and Sayre, W.W. (1970), "Predicting Concentration Profiles in Open Channels", *Proceedings of ASCE*, Vol. 96, No. HY10, pp. 1983-1996.
- 6) 高松武一郎、内藤正明、芝 定孝 (1970), 矩形沈澱層における沈澱物の再浮上に関する一考察, 土木学会論文報告集, 第183号, pp. 43-54
- 7) Elder, J.W. (1959), "The Dispersion of Marked Fluid in Turbulent Shear Flow", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 5, pp. 544-560