

乱流モデルによる非平衡浮遊砂流の解析

Numerical Analysis of Non-uniform Suspension Flow by Turbulence Model

長岡技術科学大学工学部 福 嶋 祐 介 Y. Fukushima
 (財)建設技術研究所 福 田 雅 晴 M. Fukuda

1. はじめに

路床の侵食、堆積を伴う非平衡な浮遊砂流は、河川における流砂の問題を考える上で基本的に重要である。しかしながら、非平衡浮遊砂流を解析し、流速分布、濃度分布を知ることは難しい。浮遊砂流の乱流構造の変化を予測すること、浮遊砂の底面条件が不明確だからである。著者らはこれまでk-ε乱流モデルによる浮遊砂流の解析を試みてきた。この結果、乱流モデルのパラメーターを適切に選べば、平衡浮遊砂流の流速分布と濃度分布を説明できることを明らかにした。このことより、非平衡浮遊砂流についても乱流モデルによる解析が有力であると考えられる。

非平衡浮遊砂流の底面条件について、これまで様々な検討がなされている。底面条件を大きく分類すると、濃度そのものの値を指定する濃度型の条件式、底面での濃度フラックスを与える勾配型の条件式、あるいはこれらの混合型の条件式があげられる。底質の巻き上げを伴う非平衡の浮遊砂流については、濃度型の条件式では表されず、勾配型の条件式がより妥当であると考えられる。

本研究では、非平衡浮遊砂流に対してk-ε乱流モデルを用いた解析モデルを提案している。浮遊砂の底面条件としては、連行係数を用いてフラックス型の境界条件を定式化し、実験的に検討する。以上により、底質の巻き上げを伴う非平衡浮遊砂流の数値解析を行い、流速分布、濃度分布の実測値と計算値の比較によりモデルの妥当性を検討する。

2. 非平衡浮遊砂流に対するk-εモデル

水深が流下方向にわずかに変化する開水路流で砂が浮遊状態で輸送されている場合を考える。座標系と記号を図1に示す。流れは、二次元、定常であり、十分に発達した乱流状態にある。このため、粘性の影響は無視できる。水深が流下方向に変化するので、浮遊砂の濃度も流下方向に変化する。しかしながら、水深の変化はわずかで、主流の流速 u に比べてこれと直交する流速 w は充分小さい場合を考える。すなわち、

$$u \gg w \quad dh/dx \ll 1 \quad (1)$$

である。ここで、 h は水深である。このような流れでは境界層近似が許される。流れの連続式、 x 方向、 z 方向の運動方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = (1 + Rc)g \sin \theta - \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_t \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (3)$$

$$0 = -(1 + Rc)g \cos \theta - \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (4)$$

ここで、 p は圧力、 c は浮遊砂の濃度、 g は重力加速度、 $\tan \theta$ は水路床勾配、 ρ_s は水の密度、 $R = (\rho_s - \rho_w)/\rho_s$ は砂粒子の水中比重、 ρ_s は砂粒子の密度である。 ν_t は渦動粘性係数であり、k-εモデルによ

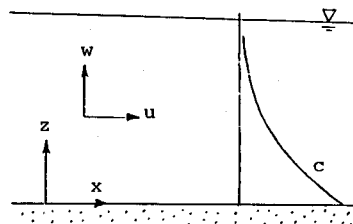


図1 座標系と記号

表1 k-εモデルの係数

C_M	σ_k	σ_ε	$C_{1\varepsilon}$	$C_{2\varepsilon}$	$C_{3\varepsilon}$
0.09	1.0	1.3	1.44	1.92	1.0

り求めることができる。式(4)をz方向に積分し、水面で圧力が零という境界条件を用いると、圧力が次のように求められる。

$$p = \rho_0 g \cos \theta \left\{ (h - z) + R \int_z^h c \, dz \right\} \quad (5)$$

ここで、式(5)を式(3)に代入して整理すると、x方向の運動方程式として、次式を得る。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = g(\sin \theta - \frac{dh}{dx} \cos \theta + Rc \sin \theta - R \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} \int_z^h c \, dz) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_t \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (6)$$

k-εモデルは、乱流運動エネルギーkに対する輸送方程式、粘性逸散率εに対する輸送方程式、渦動粘性係数の関係式より構成される¹⁾。

$$u \frac{\partial k}{\partial x} + w \frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + \nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + Rg \cos \theta \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial c}{\partial z} - \varepsilon \quad (7)$$

$$u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + w \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} \left\{ \nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + (1 - C_{3\varepsilon}) Rg \cos \theta \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial c}{\partial z} \right\} - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (8)$$

$$\nu_t = C_M k^2 / \varepsilon \quad (9)$$

ここで、 C_M 、 σ_k 、 σ_ε 、 $C_{1\varepsilon}$ 、 $C_{2\varepsilon}$ 、 $C_{3\varepsilon}$ は、無次元係数であり、種々の流れの計算結果から表1のような値が用いられている¹⁾。このうち、 $C_{3\varepsilon}$ の値は著者ら⁸⁾が平衡浮遊砂流の計算に基づいて決定したものである。

浮遊砂の拡散方程式は、次のように与えられる。

$$u \frac{\partial c}{\partial x} + (w - v_s) \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial c}{\partial z} \right) \quad (10)$$

ここで、 v_s は砂粒子の沈降速度、 σ_t は渦拡散係数と渦動粘性係数との比である。 σ_t の値は砂粒子と流れの特性により変化するが、平衡浮遊砂流の場合ほぼ1.0から3.0の範囲にある^{7), 8)}。式(1)の条件により、式(6)から式(10)の輸送方程式においてx方向の拡散項は省略されており、方程式は放物型となっている。

境界条件は次のように与えられる。まず、水面においてレイノルズ応力が零であることから、

$$z = h \text{ で } \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (11)$$

乱流運動エネルギーkと粘性逸散率εの水面条件については多くの議論があるが、浮遊砂の影響が水面近くまでは及ばないことを考え水面での対称条件を用いる。水面は水路床と平行ではないが、式(1)の条件が成立する範囲で対称条件は次のように近似できる。

$$z = h \text{ で } \frac{\partial k}{\partial z} = 0 \quad (12) \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = 0 \quad (13)$$

濃度の水面条件は、水面を通過する浮遊砂のフラックスが零であることから、次のようになる。

$$z = h \text{ で } v_s c + \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial c}{\partial z} = 0 \quad (14)$$

底面での境界条件を次のように考える。式(7)、(8)で表される乱流モデルが底面近傍の粘性の卓越する領域を表し得ないこと、式(10)の拡散方程式が底面近傍まで拡張されないことから、基準点高さを $z = z_0$ として壁関数法を用いる¹⁾。wについては、底面が流線であることが境界条件となる。

$$z = z_0 \quad \text{で} \quad u = \frac{u_*}{\kappa} \ln\left(\frac{z_0}{k_s}\right) + A_r \quad (15) \quad w = 0 \quad (16)$$

$$k = \frac{u_*^2}{\sqrt{cu}} \quad (17) \quad \varepsilon = \frac{u_*^3}{\kappa z_0} \quad (18)$$

ここで、 u_* は底面での摩擦速度、 κ はカルマン定数、 k_s は相当粗度、 A_r は定数である。

浮遊砂の底面条件についても多くの議論がある⁹⁾。一般に、浮遊砂の底面条件として、濃度そのものの値を指定する濃度型の条件式、底面での濃度フラックスを与える勾配型の条件式、あるいはこれらの混合型の条件式が用いられている。非平衡の浮遊砂流については、濃度型の条件式では表されず、勾配型の条件式がより妥当な結果を与えるとの考えから次のような境界条件を採用する。

$$z = z_0 \quad \text{で} \quad -\frac{\nu t}{\sigma t} \frac{\partial c}{\partial z} = v_s E_s \quad (19)$$

ここで、 E_s は底面からの砂の浮上フラックスを砂の沈降速度で無次元化したものであり、以下では砂の連行係数と呼ぶ。砂の連行係数は、砂粒子の特性と流れの乱流特性によって決まると考えている。この値については、4.で考察する。

3. 離散化方程式

数値解析を行うため方程式を次のように離散化する。

図2のように格子点Pのまわりに波線で示すようなコントロールボリュームを考える。不等流の解析を容易にするため、コントロールボリュームは台形にとる。ここでは、Patankar⁴⁾の方法により方程式を離散化する。但しコントロールボリュームの斜辺からの流出流入を考慮する点が異なる。

連続式をコントロールボリュームについて積分する。

まず式(2)を z 方向に積分する。界面の位置が x 方向に変化することを考慮して、

$$\int_{z_s}^{z_n} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_s}^{z_n} u dz - \frac{\partial z_n}{\partial x} u_n + \frac{\partial z_s}{\partial x} u_s + w_n - w_s = 0 \quad (20)$$

を得る。この式をさらに x 方向に積分すると次式を得る。

$$F_o - F_w + F_n - F_s - F_{nx} + F_{sx} = 0 \quad (21)$$

ここで、 F_o 、 F_w 、 F_n 、 F_s は、コントロールボリューム界面を通過する流量であり、 F_{nx} 、 F_{sx} は、界面 s 、 n を通過する流量の x 成分である。各界面での流速を一定と見なすことができるとき、これらは次のように表すことができる。

$$F_o = u_o \Delta z_o \quad F_w = u_w \Delta z_w \quad F_n = w_n \Delta x \quad F_s = w_s \Delta x \\ F_{nx} = u_n \Delta z_n \quad F_{sx} = u_s \Delta z_s \quad (22)$$

次に輸送方程式について考える。任意の従属変数 ϕ に対する定常、二次元の輸送方程式は、一般的に次のようにかける。

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = S \quad (23)$$

ここで、 S は、生成項であり、 J_x 、 J_z は、それぞれ、 x 方向、 z 方向の全流束であり次のように定義される。

$$J_x = u\phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad J_z = w\phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (24)$$

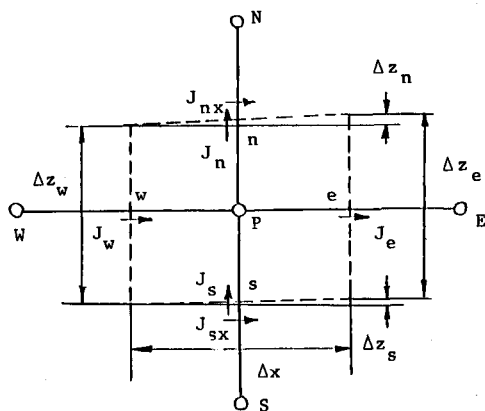


図2 コントロールボリューム

ここで、 Γ は拡散係数である。式(23)を連続式を導いたのと同様に積分すると、

$$J_e - J_w + J_n - J_s = (S_e + S_p \phi_p) \Delta x \Delta z + \Delta z_n J_{nx} - \Delta z_s J_{sx} \quad (25)$$

ただし、 $\Delta z = (\Delta z_e + \Delta z_w)/2$ である。 J_e, J_w, J_n, J_s は、コントロールボリューム界面にわたって、全流量を積分したものであり、 J_e はe界面での $\int J_x dz$ 等である。また、 J_{nx}, J_{sx} は、 $z = z_n, z = z_s$ での J_x である。式(25) - 式(21) $\times \phi_p$ を実行すると、

$$(J_e - F_e \phi_p) - (J_w - F_w \phi_p) + (J_n - F_n \phi_p) - (J_s - F_s \phi_p) \\ = (S_e + S_p \phi_p) \Delta x \Delta z + (\Delta z_e J_{nx} - F_{nx} \phi_p) - (\Delta z_s J_{sx} - F_{sx} \phi_p) \quad (26)$$

移流拡散式⁴⁾を用いると $J_e - F_e \phi_p = a_E (\phi_p - \phi_E)$ のように書くことができる。すなわち、式(26)は次のようになる。

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_w \phi_w + a_n \phi_n + a_s \phi_s + b \quad (27)$$

ここで、

$$a_E = D_e A(|P_e|) + \llbracket -F_e, 0 \rrbracket \quad (28a)$$

$$a_w = D_w A(|P_w|) + \llbracket F_w, 0 \rrbracket \quad (28b)$$

$$a_n = D_n A(|P_n|) + \llbracket -F_n, 0 \rrbracket \quad (28c)$$

$$a_s = D_s A(|P_s|) + \llbracket F_s, 0 \rrbracket \quad (28d)$$

$$b = S_e \Delta x \Delta z + F_{nx} (\phi_n - \phi_p) - F_{sx} (\phi_s - \phi_p) \quad (28e)$$

$$a_p = a_E + a_w + a_n + a_s - S_p \Delta x \Delta z \quad (29)$$

拡散コンダクタンス D 、ペクレ数 P は、次のように定義されている。

$$D_e = \frac{\Gamma_e \Delta z_e}{(\delta x)_e} \quad D_w = \frac{\Gamma_w \Delta z_w}{(\delta x)_w} \quad D_n = \frac{\Gamma_n \Delta x}{(\delta z)_n} \quad D_s = \frac{\Gamma_s \Delta x}{(\delta z)_s} \quad (30)$$

$$P_e = \frac{F_e}{D_e} \quad P_w = \frac{F_w}{D_w} \quad P_n = \frac{F_n}{D_n} \quad P_s = \frac{F_s}{D_s} \quad (31)$$

ここで、 $(\delta x)_e$ は、P点から界面eまでの距離を表す。関数 $A(|P|)$ としては、べき乗法⁴⁾を用いる。

$$A(|P|) = \llbracket 0, (1 - 0.1|P|)^5 \rrbracket \quad (32)$$

$\llbracket a, b \rrbracket$ は、 a, b のうちで大きいほうをとることを意味する。

以上のようにして得られた離散化式は楕円型である。これから放物型の式は次のようにして得られる。式(28)において、 $P \rightarrow E$ 、式(28b)において、 $D_w \rightarrow 0$ とする。このとき、式(28b)より、 $a_w = F_w$ となり、式(27)は次のようになる。

$$a_p \phi_p = a_w \phi_w + a_n \phi_n + a_s \phi_s + b \quad (33)$$

ここで、

$$a_p = a_w + a_n + a_s - S_p \Delta x \Delta z \quad (34)$$

である。係数 a_n, a_s, b は、式(28c)、(28d)、(28e)で与えられる。この手法を式(6)、(7)、(8)、(10)に適用すれば、 u, k, e, c に対する離散化方程式が得られる。 w は離散化した連続式(21)から求められる。二次元放物型流れでは圧力補正は必要ではないが、計算された流速 u が巨視的な連続の式を満たすように水面勾配を補正する。

4. 底面での浮遊砂の境界条件

非平衡浮遊砂流の解析を行うためには、式(19)の砂の連行係数 E_s がどのような関数になっているかを知る必要がある。著者らはこのことを明らかにするため室内実験を行っている³⁾。実験に用いた水路は、幅40cm、全長11mの可変勾配水路である。流入端より下流6.5m(stn. 65)までの区間には直径3~5mmの小石を張り付けたアクリル板を敷設し、それより下流には比重2.65、中央粒径0.16mm、沈降速度1.57cm/sの珪砂を一樣厚さに敷いた移動床を設定した。今回は水路床勾配を固定(1/400)し、供給流量のみを変化させた。流速および

濃度分布の測定は、移動床区間のそれぞれ3断面(stn. 70, 80, 90)で行った。濃度測定はサイフォンによる採水で行い、流速測定には直径3 mm のプロペラ流速計を用いた。

砂の連行係数 E_s を求めるため、浮遊砂の拡散方程式の断面積分を行う。式(10)を $z = z_0$ から $z = h$ まで積分し、境界条件、式(14)、(19)を考慮すると次のようになる。

$$\frac{d}{dx} \int_{z_0}^h uc \, dz = v_s (E_s - c_0) \quad (35)$$

ここで、 c_0 は $z = z_0$ での濃度である。これを差分化すると次式を得る。

$$E_s = \frac{1}{2} \left(c_0 \Big|_{X=X_1} + c_0 \Big|_{X=X_2} \right) + \frac{1}{v_s \Delta X} \left(\int_{z_0}^h uc \, dz \Big|_{X=X_2} - \int_{z_0}^h uc \, dz \Big|_{X=X_1} \right) \quad (36)$$

この式から明らかなように砂の連行係数は、流下方向の2断面での濃度フラックスと底面濃度より求めることができる。

Akiyama & Fukushima⁵⁾は、従来の平衡浮遊砂流の実験結果を整理し次元解析を行った結果、砂の連行係数が次式で表されることを示した。

$$E_s = 3.0 \cdot 10^{-12} Z^{1.0} (1 - Z_0/Z) \quad (37)$$

ここで、 $Z = \sqrt{R_0} u_* / v_s$ 、 $R_0 = \sqrt{R_0 D_s} / \nu$ は砂の粒子レイノルズ数、 D_s

は砂の粒子径、 ν は動粘性係数である。 $Z_0 = 5.0$ は砂の浮遊限界を表す。式(37)は、砂の連行係数が砂粒子の特性である沈降速度と粒子レイノルズ数、底面での摩擦速度の関数として与えられることを示している。

図3は、非平衡浮遊砂流に対して得られた砂の連行係数を無次元パラメーター Z に対してプロットしたものである。図には式(37)を実線で示し、他の研究者による平衡浮遊砂流のデータが比較のためプロットしてある。黒丸で示した本実験の結果は、他のデータに比べて砂が連行されやすい傾向を示すが、実験誤差の範囲にあると考える。そこで、今回の数値解析では、底面での境界条件として式(37)の係数を実験値に合わせたものを用いた。

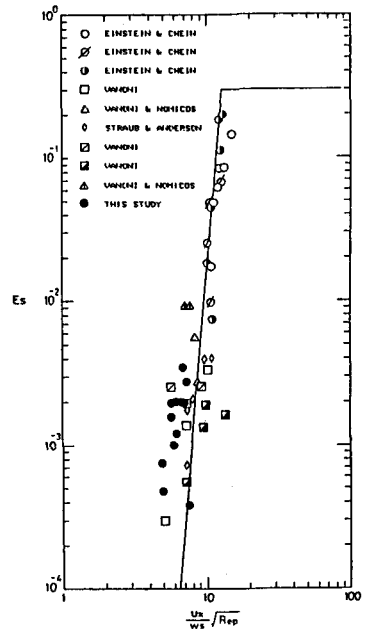


図3 砂の連行係数

5. 数値解析結果

数値計算は、測定断面stn. 70で実測の濃度分布を与え、等流であると仮定して流速分布、 k 、 ϵ の分布を求めこれを上流端の境界条件とした。計算領域である水深の分布は実測値を与えた。実験では、通水後河床形状が変化し砂澱が形成された。計算では、河床波の影響は底面粗度として考慮される。また、浮遊砂の巻き上げ、沈降に伴う河床変動を無視した。

図4は、流速分布、濃度分布の計算値を実験値と比較したものである。この条件では、河床に波長 15 cm、波高 0.5 cm 程度の砂澱が測定区間にほぼ一様に形成されていた。流速分布から得られた相当粗度の値は、 $k_s = 0.61$ cmであ

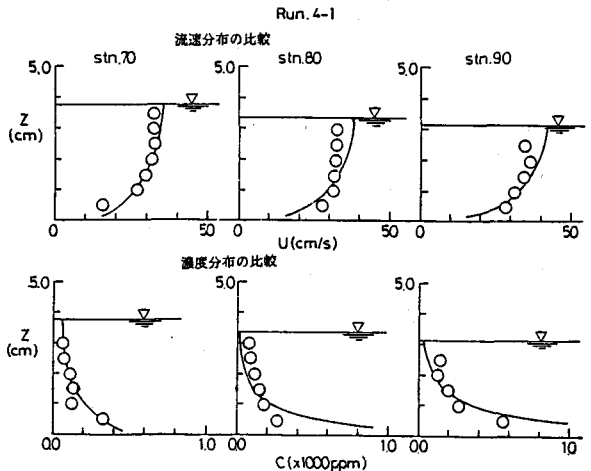


図4 実験結果と $k-\epsilon$ モデルによる計算結果との比較 (Run 4-1の場合)

り、砂漣の波高にほぼ対応している。この図から、濃度分布が流下方向に発達する様子がよく再現されていることがわかる。図5には、別の実験条件に対して流速分布、濃度分布を比較した結果を示している。この場合には、計算値では底面付近の濃度が大きめであるが、両者の一致は良好である。

以上のように浮遊砂の底面条件をフラックス型で与え、乱流モデルを用いた今回の解析法により、流下方向に濃度が増加する非平衡浮遊砂流の特性を十分に表現できることが示された。しかし、実際の現象はより複雑であり、河床波の存在を明確に考慮するなどさらに高度な解析が必要であると考ええる。

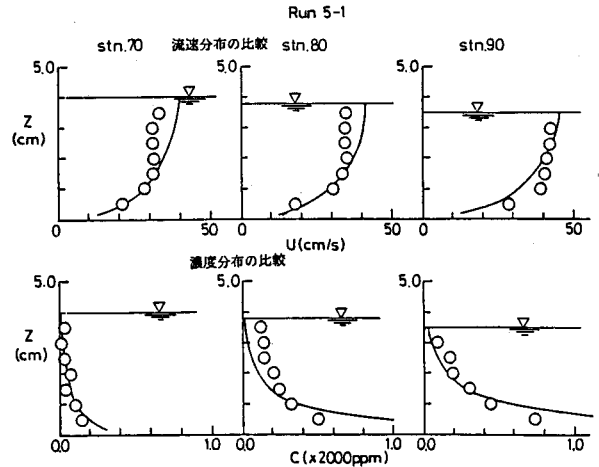


図5 実験結果と $k-\epsilon$ モデルによる計算結果との比較
(Run 5-1の場合)

6. まとめ

$k-\epsilon$ 乱流モデルを用いた非平衡浮遊砂流の解析法を提案し、移流拡散式を用いる離散化の手法を示した。モデルでは、浮遊砂に対する底面条件をフラックス型で与えている。この浮遊砂の底面条件である砂の連行係数を実験的に求め、平衡浮遊砂流の値と比較したところ、両者は実験誤差の範囲で同じ傾向を示した。この底面条件を用いて、解析モデルにより数値計算を行い、流速分布、濃度分布の実測値と比較したところ、良好な一致を見た。しかし、実験では乱流運動エネルギーなどの乱流特性量を測定しておらず、 k 、 ϵ の分布については検討が行えなかった。この点についてはモデルの改良と共に今後の課題としたい。

7. 参考文献

- (1) Rodi, W.: Turbulence Models and their Application in Hydraulics, State of the Arts paper, IAHR, 1980.
- (2) Celic, I. and Rodi, W.: Mathematical Modeling of Suspended Sediment Transport in Open Channels, 21st IAHR Congress, Melbourne, Australia, 1985.
- (3) Vantier, A. and Larock, E.: Sediment Transport in Stratified Turbulent Flow, Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 109, No. 12, ASCE, 1983.
- (4) 水谷幸夫、香月正司共訳、Patankar, S. V. 原著：コンピュータによる熱移動と流れの数値解析、森北出版、1985.
- (5) Akiyama, J. and Fukushima, Y.: Entrainment of Noncohesive Bed Sediment into Suspension, External Memorandum No. 195, St. Anthony Falls Hydraulic Lab., U. of Minnesota, 1985.
- (6) 福嶋祐介：開水路浮遊砂流の乱流構造の解析、第30回水理講演会論文集、1986.
- (7) Fukushima, Y. and Fukuda, M.: Analysis of Turbulent Structure of Open-Channel Flow with Suspended Sediments, Jour. of Hydrosience and Hydraulic Engineering, Vol. 4, No. 2, 1986.
- (8) 福田正晴、福嶋祐介：浮遊砂流に対する $k-\epsilon$ 乱流モデルの適合性について、第31回水理講演会論文集、1987.
- (9) 岡部健士：貯水池における堆砂過程とその予測に関する基礎的研究、京都大学博士論文、1982.