

流れの非定常性の掃流砂量への影響
Effect of Flow Unsteadiness on Bed Load Transport

金沢大学工学部 辻本 哲郎 T. Tsujimoto
ローザンヌ工科大学 W.H. グラフ Walter H. Graf

1. まえがき

流れの非一様性、非定常性が著しいとき、これまでに蓄積された定常等流下の平衡状態での流砂についての知見がどの程度適用し得るか、どの程度相違するかを知ることは重要かつ興味深い問題である。流れの非定常性の効果は、次の2つに大別される。(1)流れのパラメータ(ここでは形式的に h で代表)の時間微分の直接的効果;(2)流れのパラメータの急変に追従しきれないために生じる緩和過程(図-1参照)。これらの2つの効果は多くは複合して出現するが、ある条件ではこれらのどちらか一方が卓越する。また、図-1に示す基本的あるいは模式的「機構」はその横軸を空間とすることで、流れの場所的変化の効果の場合と「相似」である。本研究では図-1に示す2つの「模式的機構」に数学的表現を与えることで、その機構と効果の相違を明確にし、その後その物理的意味を考察、さらにとくに第1の直接的効果について実験資料を用いた検討を行なう。

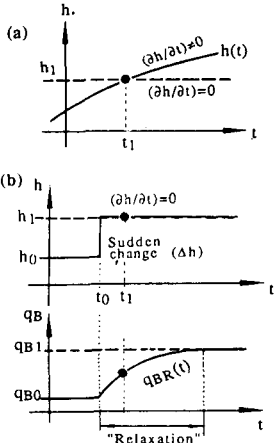


図-1 2つの非定常効果

2. 流れの非定常性の直接的効果

いま簡単のため、河床勾配(S_0)と河床材料の与えられた流路での掃流砂量と流れの代表パラメータ(ここでは便宜的に h を用いる)の間に、定常等流下平衡状態では、唯一の関数関係があるとする。

$$q_{S0} = q_{S0}(h_0) \dots\dots\dots (1)$$

ここで q_S :掃流砂量、添字0は定常等流平衡状態の値であることを示す。非定常流に対しては、形式的に、

$$q_S = q_S(h, dh/dt) = q_S(h, \partial h/\partial t, c \partial h/\partial x) \dots\dots\dots (2)$$

と書け、 c は流れの非定常擾乱の伝播速度である。流れのパラメータ h について、非擾乱値 h_0 に擾乱値 h' を付加し、線型近似($h' \ll h_0$)で議論を進めることにすると、式(2)は、

$$q_S = q_{S0} [1 + \beta \{(h'/h_0) + p_1 (\partial h'/\partial x) + (p_2/u_{*0}) (\partial h'/\partial x)\}] \dots\dots\dots (3)$$

と書け、ここに、 u_* =摩擦速度、 $\beta \equiv (dq_S/dh)(h_0/q_{S0}) = d(\log q_S)/d(\log h)$ であり、 p_1, p_2 は非定常流れの性質によって(流れの運動方程式によって)決められるパラメータである。

擾動分 h' を微小振幅正弦波、

$$h'/h_0 = \eta_0 \sin(\omega t - \kappa x) \dots\dots\dots (4)$$

で表わすとき($\eta_0 h_0$:振幅、 ω, κ :角周波数及び角波数で、 $c = \omega/\kappa$)、もし定常等流下で得られた流砂量式(1)をそのまま適用すると(非定常効果を考えないと)、

$$q_S(x, t) = q_{S0} \{1 + \beta \eta_0 \sin(\omega t - \kappa x)\} \dots\dots\dots (5)$$

で表わされる。しかし、式(2)(又は(3))のように流れの非定常項を加味した表現を用いると(式(4)を式(3)に代入することから)、

$$q_S(x, t) = q_{S0} \{1 + \alpha_1 \beta \eta_0 \sin(\omega t - \kappa x - \phi_1)\} \dots\dots\dots (6)$$

ただし、

$$\alpha_1 = \sqrt{1 + \lambda_0^2}; \quad \phi_1 = \arctan \lambda_0 \dots\dots\dots (7)$$

$$\lambda_0 = \kappa p_1 - \omega p_2 / u_{*0} \dots\dots\dots (8)$$

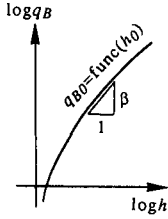


図2 パラメータ
 β の意味

となり、振幅及び位相差に流れの非定常性の効果が出現することが理解できる。式(7)、(8)よりわかるようにこの効果は定常等流に対する流砂量式を瞬間瞬間に適用した場合（式(6)）に比べ、「増幅」作用、「位相ずれ」（ λ_0 、よって p_1 、 p_2 に依存して「進み」にも「遅れ」にもなり得る）として現れる（図-3 参照）。

先にも述べたように、掃流砂量に対する流れの非定常効果は2つの異なる機構に依存するが、たとえば、急勾配礫床河川では、流れの非定常性が強く（ハイドログラフが鋭い）、また河床材料の大きさと対象とする時間がdunesなどの bed forms の発達時間に比べ短いことから、流れの非定常性の直接的効果が、流れと流砂の相互作用システムに現れる緩和過程にもとづく間接的效果に比べ著しく卓越すると考えられる。こうした条件での実験がローザンヌ工科大学で行われ良質のデータが収集された（Graf-Suszka^{1), 2)}。実験は中央粒径（ d ）が 12.2、23.5 mm の2種類のほぼ均一礫を用い S_0 を 0.05 から 0.025 まで変えて行われた。非定常流のハイドログラフは図-4 にその例を示すように、線型解析で扱えるものではないが、ワイヤで吊るした採礫箱の重量の連続計測より得られた掃流砂量の時間的波形は、図に斜線で示した定常等流時の流砂量式を直接適用して求めたものに比べ「増幅作用」が見られ、またある条件（粗礫、急勾配）では位相遅れ、ある条件（細礫、緩勾配）では位相の進みが見られるなど、線型解析の結果と定性的な一致を示している。

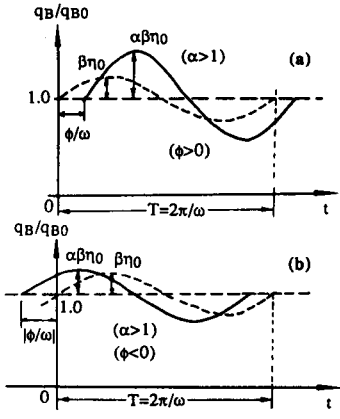


図-3 流れの非定常性の直接効果

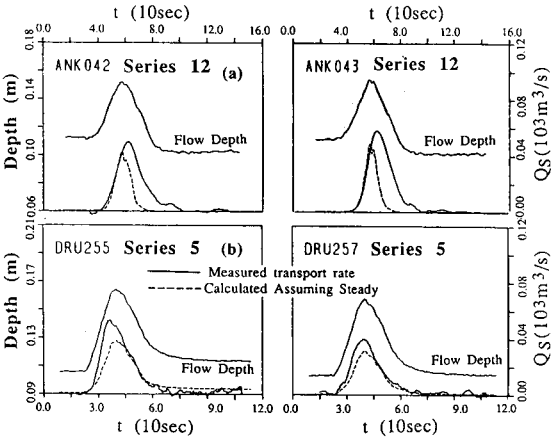


図-4 E.P.F.L.の実験結果に見られる「非定常効果」の例

3. 緩和過程の出現

流砂量や移動床現象はその process rate の遅さのため流れの変化に即時に応答できない場合が多い。たとえば、掃流現象において step length によってもたらされる「場所的緩和過程」^{3), 4)} や dunes の発達・変形に依存する「時間的緩和過程」^{4) ~ 7)} はそのあらわれである。こうした空間的または時間的緩和過程（遅れ）のいずれも、impulse response の概念を用いて共通の数学的表現で記述することができる⁴⁾。

ここで、掃流砂量を流砂機構または移動床過程で代表されるシステムの output と考える。input は考えているシステムにより、流れのパラメータ、流路境界形状など様々にとれる。いま一般的な議論のため、input process を $\theta(s)$ 、output process を $\phi(s)$ と書き（ s は時間または空間）、図-5 に示すような input process の急変を考える。急変後もは $\partial\theta/\partial s = 0$ であるにも関わらず、非定常（又は非一様な）変化が ϕ に認められる（ $\partial\phi/\partial s \neq 0$ ）。

input process の急変（ $\theta_0 \rightarrow \theta_0 + \Delta\theta$ ）に対する output process の挙動 $\phi_R(s)$ が知られると、系の impulse response $g_R(\xi)$ は、

$$g_R(\xi) = (1/\Delta\theta) [d\{\phi_R(s) - \phi_0\}/ds]$$

と求められ、これを用いると input process の任意の変化に応答する output

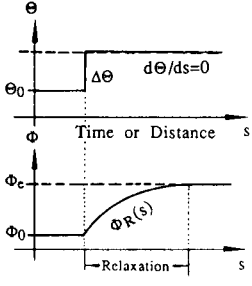


図-5 緩和過程

processの挙動が次のように記述される。

$$\phi(s)=\int_0^\infty \theta(s-\xi) g_R(\xi) d\xi \quad \dots\dots\dots (9)$$

{ $\phi_R(s)-\phi_0$ } が指数関数で表わされると、 $g_R(\xi)$ は指数関数で表わされ、次のような緩和時間スケール A を定義することができる。ただし、 $\theta_0 + A\theta$ に対する ϕ の平衡値を ϕ_e と書く。

$$\phi_R(s)-\phi_0=(\phi_e-\phi_0)\{1-\exp(-s/A)\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$g_R(\xi)=(1/A)\exp(-\xi/A) \quad \dots\dots\dots (11)$$

もし、掃流過程が dunes の変形等に起因する「緩和過程」を内包しており、その impulse response が $g_R(\xi)$ で表わされるとすると、何らかの流れのパラメータ h の時間的变化に応答する流砂量変化は、

$$q_S(x,t)=\int_0^\infty h(s-\xi) g_R(\xi) d\xi \quad \dots\dots\dots (12)$$

で求められる。いま h の変化を式(4)のように仮定すると、非定常流砂量は次式のように表わされる。

$$q_S(x,t)=q_{S0}\{1+\alpha_2\beta\eta_0\sin(\omega t-\kappa x-\phi_2)\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここに、

$$\alpha_2=1/\sqrt{1+(\kappa A)^2} ; \quad \phi_2=\arctan(\kappa A) \quad \dots\dots\dots (14)$$

である。この結果は図-6に示すように、振幅の「抑圧」と「位相遅れ」を示す。流れの非定常性の直接効果として求めた前章の結果(式(7),(8))とは全く異なるところが注目される。

先に述べたように、dunes などの変形がここで述べるような「緩和過程」を通しての非定常効果をもたらす。こうした現象が卓越する典型例を Phillips-Sutherland^{6),7)}による実験に見ることもできる。彼らの実験はローザンヌ大学(E.P.F.L.)とほとんど同様の装置で行われたが、中央粒径 $d=1.80\text{ mm}$ のほぼ一様砂を河床材材として用い、dunes の形成を許したと、対象とするハイドログラフは流れの非定常性の直接効果を生むほどには鋭くなく(図4,7を比較)、また流れの変化時間スケールは dunes の発達時間スケールのオーダーでこの時緩和過程の効果が最も卓越する⁴⁾ことから、本章で議論した効果が期待される。事実図-7に示すように図中に細線で併示した定常等流時に対する流砂量式を直接用いた計算値に比べ、振幅の抑圧、位相の遅れを認めることができる。

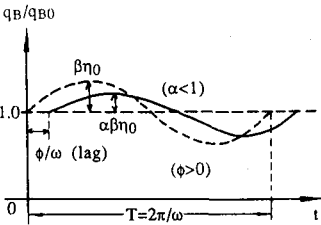


図-6 緩和過程の効果

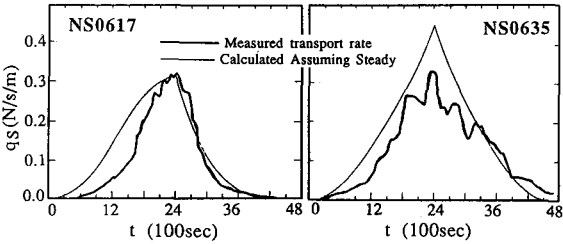


図-7 Phillipsらのデータにみられる緩和過程の効果の例

4. 流れの非定常性を示すパラメータ

非定常開水路流れに対する一次元運動方程式は(Saint-Venant方程式)、

$$\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{U}{g} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} - S_0 + S_e = 0 ; \quad \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

であり、 U ：断面平均流速、 S_e ：エネルギー勾配である。あえて式(4)で表わされる擾乱をこの式に課し、線型近似すると、連続式の方から、平均流速の擾乱の振幅 $a_U U_0$ 、位相差 ϕ_U について、

$$\phi_U = 0 ; \quad \alpha_U \equiv a_U/U_0 = \tau - 1 ; \quad \tau \equiv c/U_0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

が得られ、これを用いると、

$$S_e = S_0 \left[1 + \frac{1}{S_0} \left\{ -(\alpha_U F r_0^2 + 1) \frac{\partial h'}{\partial x} - (\alpha_U F r_0^2 \cdot \frac{u_{*0}}{U_0}) \frac{1}{u_*} \frac{\partial h'}{\partial t} \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (17)$$

が得られる。ここに $Fr_0 = U_0 / \sqrt{gh_0}$ である。もし、 $q_S \sim \tau_b^2$ ($\tau_b = \rho gh S_0$: 底面せん断応力) であれば (流砂量と掃流力の間に一意的関係を認めるならば), p_1, p_2 は次のように表される。

$$p_1 = -(\alpha_U Fr_0^2 + 1) / S_0 \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$p_2 = -\alpha_U Fr_0^2 (u_{*0} / U_0) / S_0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

式(8)に代入すると、流れの非定常性に起因する位相ずれ、増幅を支配するパラメータ λ_0 は、

$$\lambda_0 \equiv \{h_0 \omega / (r u_{*0})\} \{(\alpha_U Fr_0)^2 - 1\} / \{S_0 (U_0 / u_{*0})\} \quad \dots\dots\dots (20)$$

と表わされる。非擾乱フルード数が $(1/\alpha_U)$ よりも大きければ流砂量の位相は水深変化の位相より遅れるのに対し、小さければ位相が進むことがわかる。 Fr_0 は抵抗則によって河床勾配 S_0 と関係づけられるから、式(20)が S_0 の減少関数とは断定できない。擾乱の伝播速度に関わるパラメータ r 、水深と平均流速の変動振幅比 α_U 、 (U_0 / u_{*0}) 、 Fr_0 と S_0 の関係は抵抗則に依存する。もし抵抗則を $U / u_{*0} = A_0 (h/d)^m$ の型式で定式化できれば、これらをすべて決定できる。たとえば、Manning-Strickler 式を用いると、「臨界フルード数」は 1.5 となる。

5. 流れの非定常性による直接効果についての E.P.F.L. のデータとの比較

先述した E. P. F. L. の実験資料と本論文第 2 章の線型解析の比較をもう少し進めてみよう。

E. P. F. L. の実験^{1), 2)} は長さ約 17 m, 幅 0.6 m の可変勾配水路で行われ、先述のように流砂量の時間的変化を測定できるように工夫されており (文献 8) に詳しい説明がある), Graf-Suszka^{1), 2)} により、急勾配礫床流路の掃流砂量に及ぼす流れの非定常効果が実験的に検討された。彼らはその効果の指標として式(21)で定義される ϵ ををとりあげ、次元解析によって、 ϵ が流れの非定常性を表わすパラメータ $\Delta h / (u_{*0} \Delta T)$ と、他の 1 つのパラメータ $S_0 (d/h_0)$ の組み合わせで決することを示し式(23)で近似される回帰式を提案した²⁾。

$$\epsilon \equiv \frac{V_S - V_{S0}}{V_{S0}} \quad \dots\dots\dots (21)$$

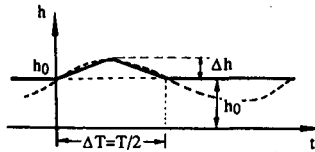


図-8 ハイドログラフの定義図

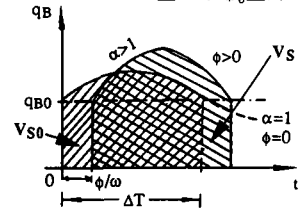


図-9 V_S, V_{S0} の定義

ただし、

$$V_{S0} \equiv \int_{t_0}^{t_0 + \Delta T} q_{SS}(t) dt; \quad V_S \equiv \int_{t_0 + \phi/\omega}^{t_0 + \Delta T + \phi/\omega} q_{Sm}(t) dt \quad \dots\dots\dots (22)$$

で、 q_{SS} : 定常等流時の流砂量式、 q_{Sm} : 実測流砂量である。

$$\epsilon = 115 \sqrt{\Delta h / (u_{*0} \Delta T)} \cdot \sqrt{d S_0 / \Delta h} \quad \dots\dots\dots (23)$$

さて、E. P. F. L. の実験は $\Delta h \ll h_0$ でない上、単独の非定常波であるため、厳密には第 2 章の線型解析の結果を適用することは明らかに不可能であるが、非定常流砂過程の研究の初期段階として、これらの比較は興味深いし、意義のあるものと思われる。そこで、 $\Delta T = \pi / \omega$ 、 $\eta_0 = \Delta h / h_0$ を考慮して V_{S0}, V_S をそれぞれ式(5)、式(6)を適用して求め、次のように線型解析結果としての ϵ の値を得た。

$$V_{S0} = q_{S0} \Delta T (1 + 2\beta \eta_0 / \pi); \quad V_S = q_{S0} (1 + 2\alpha_1 \beta \eta_0 / \pi) \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$\epsilon = \{2\beta \eta_0 (\alpha_1 - 1)\} / (1 + 2\beta \eta_0 / \pi) \quad \dots\dots\dots (25)$$

この結果によると、 ϵ は次の 2 つの異質の成分 r_1, r_2 より構成されると考えるべきである。

$$\epsilon \equiv r_1 \cdot r_2 \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$r_1 \equiv 2\beta \eta_0 / (1 + 2\beta \eta_0 / \pi) \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$r_2 \equiv \alpha_1 - 1 = \sqrt{1 + \lambda_0^2} - 1 \equiv \sqrt{1 + \Psi^2 / (u_{*0} \Delta T / h_0)^2} - 1 \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$\Psi \equiv \pi (p_1 u_{*0} / \pi (p_1 u_{*0} / \pi - p_2)) \quad \dots\dots\dots (29)$$

r_1 は流砂量式の特徴を示すパラメータ β と、非定常流れの振幅 η_0 に関わっており、一方、 r_2 は流れの非定常性を直接示すパラメータ $(u_{*0} \Delta T / h_0)$ と、第 4 章で検討した非定常流れの運動方程式の特徴に関わるパラ

ラメータ p_1, p_2 及び $r \equiv c/U_0$ に依存している。

流砂量式に Meyer・Peter-Müller 式を用いると β は、次のように表わされる。

$$\beta = \frac{3}{2} \frac{h_0}{d} / \left\{ \frac{h_0}{d} - \frac{0.047 (\sigma/\rho - 1)}{S_0} \right\} \quad \dots\dots\dots (30)$$

ここに σ/ρ : 河床材料の比重である。ただ急勾配水路における礫の掃流についてはとくに無次元掃流力が勾配とともに増加する傾向を示すなど、Meyer・Peter-Müller 式で表わされるものとは若干相違するようで、 β を Graf-Suszka の定常等流に対する結果⁸⁾ より評価すると図-10 のようである。とくに相対水深の小さいとき式(30)からのずれが大きい。 β が推定されると、 η_0 は実験条件より知られるので、式(27)で与えられる r_1 は容易に評価される。図-11 は β をパラメータにして、 r_1 と r_0 の関係を描いたところへ、Graf-Suszka²⁾ の実験範囲を示したもので、Series No 1 を除くと r_1 の値はほとんど 0.8 ~ 0.85 の限られたところにあることがわかる。Graf-Suszka²⁾ の ε についての回帰式(23)で Δh が分子分母で消去できることになるのはこのことに依存すると考えられる。式(23)中 Δh を h_0 に置き換えて、 $\varepsilon \sim u_* \Delta T/h_0$ 関係を実験値と Graf-Suszka の回帰曲線を併示したものが図-12 で、図-11 と式(26)、(28)よりわかるように、これはもはや $r_2 \sim u_* \Delta T/h_0$ の傾向を示すものであると考えられる。

図-13 は $r_2 \equiv \varepsilon/r_1$ として η_0 の効果を除去したものであるが、図-11 に示したように Graf-Suszka の実験では η_0 の影響が小さく、彼らの回帰曲線は r_2 に対してもなお充分な適合性を有している。式(28)が示す通り、 r_2 を支配する最も重要なパラメータは $u_* \Delta T/h_0$ で、彼らの回帰でもこの無次元パラメータが抽出されている。もう一つのパラメータとして Graf-Suszka²⁾ は、 $(h_0/d)/S_0$ を提案しており図-13 と式(28)を併せ検討すると、式(29)で定義される Ψ がこのパラメータと強く相関しているものと推測される。 Ψ と $(h_0/d)/S_0$ の関係について、 Ψ を Graf-Suszka²⁾ のデータより逆算して調べると概略的に、

$$\Psi \sim \sqrt{S_0/(h_0/d)}$$

が推測される(図-14 参照)。第 4 章において p_1, p_2 が検討されており、これより理論的に Ψ を評価することが可能とはいえ、先述したようにこれらの評価には主として抵抗則の確立が必要で、とくに Graf-Suszka の実験範囲のような相対水深の小さい流れでは Manning-Strickler 式はもはや適用できない。そこで、

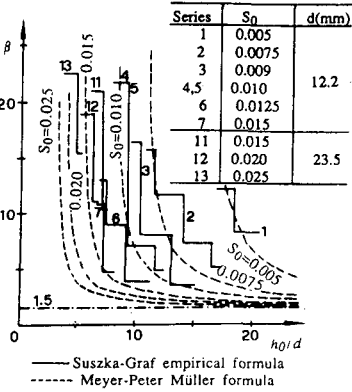


図-10 β 値と相対水深の関係

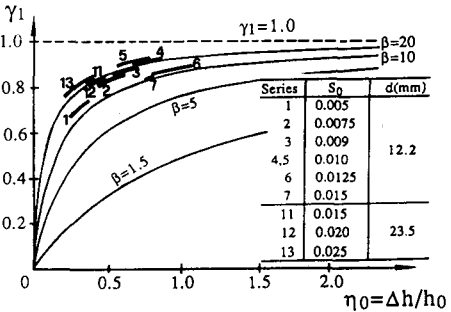


図-11 r_1 と η_0 との関係

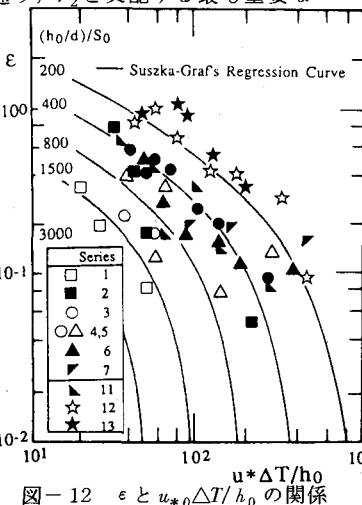


図-12 ε と $u_* \Delta T/h_0$ の関係

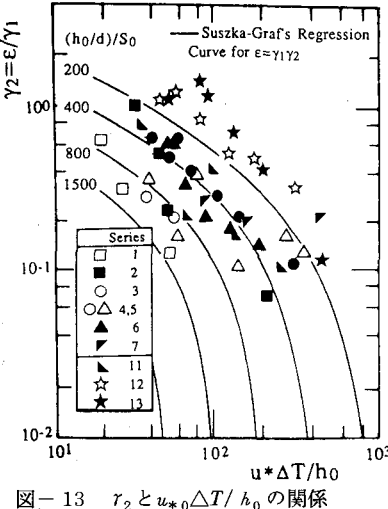


図-13 r_2 と $u_* \Delta T/h_0$ の関係

ここでは便宜的に図-14より比例定数を決め、すなわち Ψ の関数形を経験的に決め、これを用いて r_2 を評価、そして r_1 と組み合わせて、流れの非定常性の掃流砂量への影響の指標である ε を評価することとした。図-15は図-14を用いて Ψ を決めたときの $r_2 \sim u_{*0} \Delta T / h_0$ 関係をE.P.F.L.のデータと併示したものである。

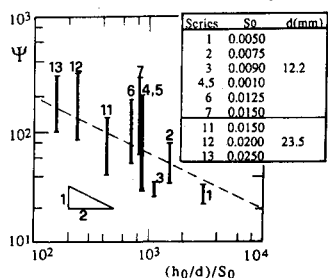


図-14 Ψ と $(h_0/d)/S_0$ の関係

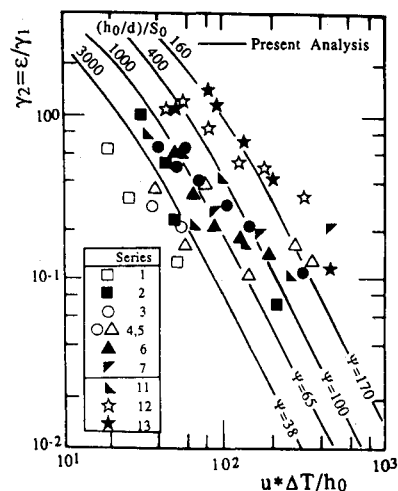


図-15 r_2 と $u_{*0} \Delta T / h_0$ の関係

6. あとがき

本研究ではまず流れの非定常性の直接効果と、移動床系を通して出現する緩和過程による間接的效果とについて、線型解析によってその本質的機構と効果の相違を明らかにした。前者は位相ずれと流砂量の増幅、後者は位相遅れと流砂量変動の抑圧として出現する。この2つの機構は一般には複合するが、実験室でうまく抽出されたこれらのどちらかが卓越する例を示した。とくに流れの非定常性の直接効果については、E.P.F.L.のデータをもとに議論を進め、その効果も流れパラメータの変化幅に依存する分と、まさに流れの非定常性を示す $u_{*0} \Delta h / h_0$ に依存する分とに分離して検討されることを示した。

今後、礫床河川（そこでは流れの非定常性の直接効果の卓越することが多いと予想される）での抵抗、非定常流の伝播特性など、流速分布についての検討を媒介に研究を進めてゆきたい。また、2つの非定常効果の複合、非線型効果の扱いなども残された課題と言える。

参 考 文 献

- 1) Graf, W. H. and L. Suszka (1985) "Unsteady flow and its effect on sediment transport." Proc. 21st IAHR Congress, Australia, Vol. 3, pp. 539-544.
- 2) Suszka, L. and W. H. Graf (1987) "Sediment transport in steep channels at unsteady flow." Proc. 22nd IAHR Congress, Switzerland, Vol. 1, pp. 166-170.
- 3) Nakagawa, H. and T. Tsujimoto (1980) "Sand bed instability due to bed load motion." Jour. of Hydraulics Division, ASCE, Vol. 106, HY12, pp. 2029-2051.
- 4) 中川・辻本 (1981) 「Lower regimeにおける非定常移動床流れの抵抗の遅れ性状」第25回水理講演会論文集, pp. 1 ~ 7.
- 5) 中川・辻本・竹束 (1983) 「河床波を伴う非定常流れの特性」第27回水理講演会論文集, pp. 665-671.
- 6) Phillips, B. C. and A. J. Sutherland (1984) "Spatial and temporal lag effects in bed load transport." Research Report No. 84-10, Univ. of Canterbury, New Zealand.
- 7) Phillips, B. C. and A. J. Sutherland (1985) "Numerical modelling of spatial and temporal lag effects in bed load sediment transport." Proc. 21st IAHR Congress, Australia, Vol. 3, pp. 571-576.
- 8) Graf, W. H. and L. Suszka (1987) "Sediment transport in steep channels." Jour. of Hydroscience and Hydraulic Engineering, JSCE, Vol. 5, No. 1, pp. 11-26.