

地点観測値に基づく地下水位分布の統計的推定と観測網の評価

Stochastic Estimation of Groundwater Head-Field and Evaluation of Observatory Network

名古屋大学工学部 原 田 守 博 M. Harada

名古屋大学工学部 高 木 不 折 F. Takagi

1. はじめに

自然現象の中には、面的に観測することが難しく、地点データに頼って状態を判断せざるを得ないものが多い。広域地下水の挙動もその一つであって、現在のところ、井戸地点における水位測定値が唯一の観測情報といってよい。現実問題として、観測値から地下水位の空間状態を知ろうとする場合、データが十分であることは稀であり、しばしば“暗闇での手探り”にも似た状況が生じている。

地下水観測を難しくする原因には、1) 現象が地下で起きており、非観測点の様子は視覚的にすらすら捉えられない。2) 観測井の数が限られるため、データは量的に多くを望めない。3) 帯水層は一般に不均質であり、人為的要因も影響して、データは局所的に特異な変動を示すことが多い、などが挙げられる。とくに場の不均質性の影響は、不圧地下水の場合に顕著であって、観測水位は降雨にともない井戸毎に大きく異なった変動をすることが少なくない。著者らは、こうした不圧地下水状態の時間的変化を確率場における物理現象として捉え、地点観測値をもとに水位の空間状態を統計的に推定することを試みてきた。既報^{1), 2)}では、確率変量として水位の変動速度や平均水位からの乱れ成分をとることにより、平均値一定の確率場を仮定した解析を行った。本研究ではそれをさらに進めて、本来、非定常(non stationary)である水位分布そのものを取り扱うとともに、併せて観測網のあり方について検討を加えるものである。

2. 地点観測値に基づく非定常確率場の統計的推定手法³⁾と適用上の問題点

降雨に対し複雑に挙動する地下水位の空間分布を2次元場における確率変量と考え、地点 X (X : 位置ベクトル)における水位を $Z(X)$ とおく。 $Z(X)$ は式(1)のように、drift $m(X)$ と残差 $R(X)$ から成っていると考え、 $m(X)$ は、小領域では式(2)のような多項式曲面で表現できるものとする。

$$Z(X) = m(X) + R(X) \quad (1) \quad E\{Z(X)\} = m(X) = \sum_l^k a_l f^l(X) \quad (2)$$

ここに、 $f^l(X)$ は多項式、 a_l はその係数、 k はdrift項数である。さて、距離 D はなれた任意の2地点 X_1, X_2 において、次式のような $Z(X)$ に関する統計量が定義できるものとする。

$$\text{Var}\{Z(X_1) - Z(X_2)\} = E\{[R(X_1) - R(X_2)]^2\} = 2\gamma(D), \quad D = |X_1 - X_2| \quad (3)$$

関数 $\gamma(D)$ はsemi-variogram(以下 variogramと略称)と呼ばれ、 $Z(X)$ の統計的な空間分布構造を表している。driftの存在する確率場において、variogramを媒介として、観測値をもとに非観測地点の状態推定を行う方法に Universal Kriging法がある。この手法は、観測値を確率場における実現値と考え、状態変数 $Z(X)$ の推定値 $\hat{Z}(X)$ を次式を満たす最良線形不偏推定量(BLUE)として求めるものである。

$$\text{Var}\{\hat{Z}(X) - Z(X)\} \rightarrow \min., \quad \hat{Z}(X) = \sum_i^n w_i Z_i, \quad E\{\hat{Z}(X) - Z(X)\} = 0 \quad (4)$$

ここに、 Z_i は観測地点 i における観測値($i=1, 2, \dots, n$)、 w_i は Z_i の荷重係数であり、 $\sum_i^n w_i = 1$ 。上記の諸式により、次のKriging方程式($i=1, 2, \dots, n, l=1, 2, \dots, k$)が導かれる。

$$\sum_j^n w_j \gamma(D_{ij}) + \sum_l^k \mu_l f^l(X_i) = \gamma(D_i) \quad (5) \quad \sum_i^n w_i f^l(X_i) = f^l(X) \quad (6)$$

ここに、 $D_{ij} = |x_i - x_j|$, $D_i = |x - x_i|$, μ_l はLagrange定数である。上式を解くことにより、任意の推定

地点の W_i と μ_i が得られ BLUE $\hat{Z}(X)$ が求められる。 $\hat{Z}(X)$ の推定誤差である Kriging 分散は次式となる。

$$\text{Var}[\hat{Z}(X) - Z(X)]_{\min.} = \sum_i^n W_i \gamma(D_i) + \sum_l^k \mu_l f^l(X) \quad (7)$$

Universal Kriging 法の適用に当たって、 $Z(X)$ の variogram $\gamma(D)$ と drift 項数 k を事前に知らねばならない。 $Z(X)$ が no drift (平均値一定) であれば、 $\gamma(D)$ はエルゴード性を仮定して観測データから推測することが可能である。しかし、 $Z(X)$ が drift をもつ場合には、残差 $R(X)$ は未知であり、 $\gamma(D)$ と $m(X)$ が互いに独立でないために、両者を同時に推定することは容易でない。仮りに $m(X)$ が何らかの方法で既知となったとしても、 $\gamma(D)$ の形状を $R(X)$ から見いだすためには、かなりの空間密度で観測地点が必要となる。地下水観測のように、空間的にまばらな観測点配置を考えると、これらの統計量をデータのみから評価することはきわめて困難であるといえよう。本研究では、この困難を緩和するために以下の方法で解析を行った。

- 1) 地下水流れの基礎方程式から出発して、時間的に変化する $\gamma(D)$ の形状を理論的に導出しておく。
- 2) $Z(X)$ の観測値から $m(X)$ を重回帰分析により求め、drift 項数を推定する。一般に $R(X)$ は空間相関をもっているため、通常の最小自乗法は厳密には使用できないが、ここでは観測点密度が粗いことを考慮して近似的に採用する。
- 3) drift の回帰により得られた残差 $R(X)$ の分散を利用して、 $\gamma(D)$ に含まれるパラメータを同定する。

3. 不均質場における地下水位分布の variogram

3-1. 場の不均質性による地下水位の乱れ成分

水平基盤上の二次元不圧地下水の支配方程式は、代表水深 $H_0 (= \text{const.})$ を用いて線形化できる場合には、

$$S(x, y) \frac{\partial H'(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [K(x, y) H_0 \frac{\partial H'(x, y, t)}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [K(x, y) H_0 \frac{\partial H'(x, y, t)}{\partial y}] \quad (8)$$

ここに、 $H'(x, y, t) = H^*(x, y, t) - H_0$ 、 $H^*(x, y, t)$: 不透水基盤上の地下水深、 $|H_0| \gg |H'(x, y, t)|$ 。

$S(x, y)$: 有効間隙率、 $K(x, y)$: 透水係数である。流れの場が空間的に不均質であり、 $S(x, y), K(x, y)$ は、

$$S(x, y) = S_0 + S'(x, y), \quad |S_0| \gg |S'(x, y)|$$

$$Y(x, y) = Y_0 + Y'(x, y), \quad |Y_0| \gg |Y'(x, y)|, \quad \text{ただし、} Y(x, y) = \log_e [K(x, y) H_0]$$

と表すことができるとする。 $H'(x, y, t)$ についても均質場での水位 $h_0(x, y, t)$ のまわりで変動すると考え、

$$H'(x, y, t) = h_0(x, y, t) + h_1(x, y, t)$$

これらを式(8)に代入し、流れの空間的・時間的変動が小さいとして微小項を省略すると、

$$\begin{aligned} \frac{S_0}{Y_0} \frac{\partial h_1(x, y, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 h_1(x, y, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 h_1(x, y, t)}{\partial y^2} &= g(x, y, t), \\ g(x, y, t) &= - \frac{S'(x, y)}{Y_0} \frac{\partial h_0(x, y, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [Y' \frac{\partial h_0(x, y, t)}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [Y' \frac{\partial h_0(x, y, t)}{\partial y}] \end{aligned} \quad (9)$$

解析領域として無限場を考え、初期時刻を降雨直後にとって $h_1(x, y, 0) = \phi_1(x, y)$ として解けば、

$$\begin{aligned} h_1(x, y, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, x', y', t) \phi_1(x', y') dx' dy' \\ &\quad + \lambda_0 \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, x', y', t-\tau) g(x', y', \tau) dx' dy' d\tau \end{aligned} \quad (10)$$

ここに、

$$G(x, y, x', y', t) = \frac{1}{4\pi\lambda_0 t} \exp\left[-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{4\lambda_0 t}\right], \quad \lambda_0 = \frac{Y_0}{S_0}$$

上式は、場の不均質性による水位の乱れ成分の時間的発展を与えている。

3-2. 水位の乱れ成分の構成要素

水位分布のvariogramを求める前に、式(10)の第一項と第二項の大小関係の評価しておこう。
簡単のために一次元場で考える。第一項を h_{11} 、第二項を h_{12} とおくと、両者は互いに独立であるから、

$$\text{Var}[H(x, t)] = E[h_{11}^2(x, t)] + E[h_{12}^2(x, t)] = \sigma_{h_{11}}^2 + \sigma_{h_{12}}^2 \quad (11)$$

$\phi_1(x)$ の分散を σ_ϕ^2 、自己相関関数を ρ_ϕ とおくとき、 ρ_ϕ が white noise 近似できるものとすれば、

$$\begin{aligned} \sigma_{h_{11}}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x, x', t) G(x, x'', t) E[\phi_1(x') \phi_1(x'')] dx' dx'' \\ &= \sigma_\phi^2 C_1 \int_{-\infty}^{\infty} G^2(x, x', t) dx' = \frac{\sigma_\phi^2 C_1}{\sqrt{8\pi\lambda_0 t}} \quad , \quad C_1 = \text{const.} \end{aligned} \quad (12)$$

つぎに、 $\sigma_{h_{12}}^2$ を求めるために、 h_0 に基づく平均的な流れを一様流と考え $\frac{\partial h_0}{\partial x} = J (= \text{const.})$ と仮定すると、

$$\begin{aligned} h_{12}(x, t) &= \lambda_0 \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(x, x', t-\tau') \left[J \frac{\partial Y(x')}{\partial x'} \right] dx' d\tau' \\ &= -\lambda_0 J \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} Y'(x') \frac{\partial G(x, x', t-\tau')}{\partial x'} dx' d\tau' \end{aligned}$$

$Y'(X)$ の分散を σ_Y^2 、自己相関関数を ρ_Y とし、 ρ_ϕ 同様 ρ_Y も white noise 近似すれば、

$$\sigma_{h_{12}}^2 = \sigma_Y^2 C_2 J^2 \sqrt{\frac{\lambda_0 t}{\pi}} (2 - \sqrt{2}) \quad , \quad C_2 = \text{const.} \quad (13)$$

図-1は、式(12)(13)による $\sigma_{h_{11}}^2$ 、 $\sigma_{h_{12}}^2$ を表したものである。 h_1 の初期分布 ϕ_1 は場の不均質性を反映していると考えられるから、 $\sigma_{h_{11}}^2$ と $\sigma_{h_{12}}^2$ をそれぞれ $\sigma_\phi^2 C_1$ 、 $\sigma_Y^2 C_2$ で除したものを示した。図からわかるように、後者は前者に比べはるかに小さく、通常の時間範囲では両者に大きなひらきがある。したがって、 h_1 の統計的性質を調べるうえでは、式(10)の第一項をとるだけで十分であるといえる。

3-3. 二次元場における水位の variogram の近似式

水位 $H(x, y, t)$ の variogram は、 x 方向に距離差(lag) D をとれば、

$$\gamma(D) = \frac{1}{2} E\{[h_1(x+D, y, t) - h_1(x, y, t)]^2\} \quad (14)$$

h_1 として式(10)の第一項を用いれば、次式が得られる。²⁾

$$\gamma(D) = \sigma_{h_1}^2 [1 - \rho(D)] \quad (15)$$

ここに、 $\sigma_{h_1}^2 = \frac{\sigma_\phi^2 C_3}{8\pi\lambda_0 t}$, $C_3 = \text{const.}$

$$\rho(D) = \exp\left(-\frac{D^2}{8\lambda_0 t}\right)$$

であり、 $\sigma_{h_1}^2$ は帯水層の不均質性に起因した水位の分散に、 $\rho(D)$ は $h_1(x, y, t)$ の自己相関関数に相当している。lag D を $x \cdot y$ 平面上の任意の方向にとる場合でも同じ結果に帰着する。 $\gamma(D)$ の時間的な変化は 図-2に示すようである。

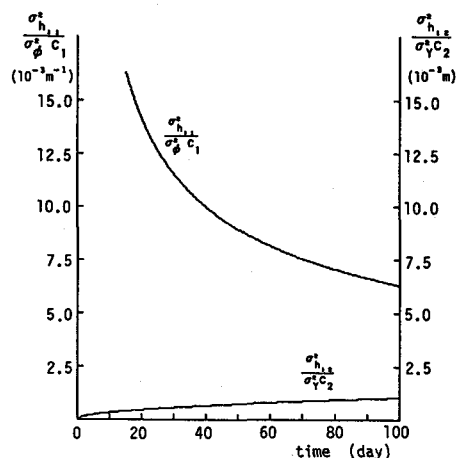


図-1 $\sigma_{h_{11}}^2$ と $\sigma_{h_{12}}^2$ の時間的変化
(一次元、 $\lambda_0 = 10 \text{ m}^2/\text{day}$, $J = 0.01$)

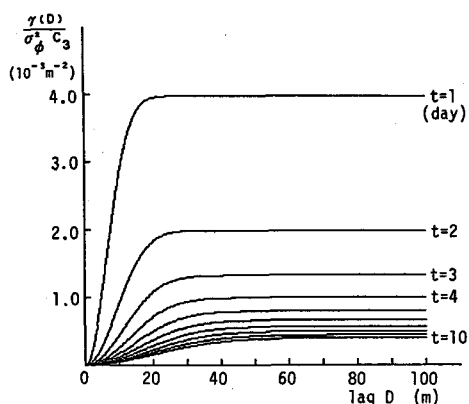


図-2 降雨後の水位分布のvariogram
(二次元、 $\lambda_0 = 10 \text{ m}^2/\text{day}$)

4. 実流域における地下水位分布の統計的推定

本章では、variogram の近似式(15)を媒介として、実測データに基づく水位分布のKriging推定を行う。

解析の対象領域は、図-3に示す面積約0.23km²の緩やかな傾斜地域である。観測井は8本設置され、図-4のような水位データが得られている。図からわかるように、各地点の観測水位は、標高30mから50m付近まで広い範囲に存在しているうえ、降雨に対し鋭く上昇するものからほとんど応答しないものまで、井戸により変動が大きく異なるために、データだけから水位分布を把握することは難しい。Kriging法は、こうした状況において客観的に空間状態を推定するばかりでなく、その推定誤差をも定量的に評価できる点に特徴がある。

4-1. drift項数とvariogramの推定

解析は、図-4に記した3つの時間断面(ST. I, II, III)について行うことにする。まず、水位の driftを重回帰分析により推定する。drift $m(X)$ は、領域が小さいことから、式(2)のように多項式曲面で表現し、赤池の情報量基準(AIC)⁴⁾によって最適項数を決定した。その結果、AICが最小になるdrift項数は、どの時間断面においても $k = 6$ (2次drift)であり、各項の係数値および残差分散は表-1のようであった。これをみると、 X , Y の係数は時間的に若干減少するものの、 X^2 , Y^2 , XY の係数に比べ3オーダー程度大きい。このことは、driftの多くの部分が 時間的に変化しない線形成分によって占められていることを意味する。当地域の地層が単斜構造を成している⁵⁾ことを考え合わせれば、この水位のdriftは 帯水層の傾斜を反映したものであると考えられる。

つぎに水位のvariogramの推定を行う。式(15)に示したように、variogram $\gamma(D)$ は 水位の分散 $\sigma_{h_1}^2$ と $h_1(x, y, t)$ の自己相関関数 $\rho(D)$ から構成されている。

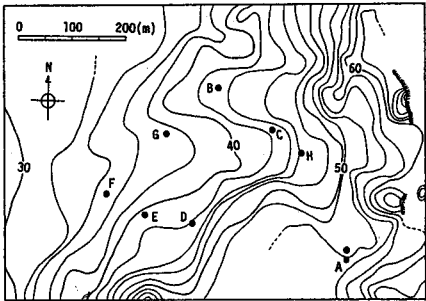


図-3 観測地域 (● 観測井)

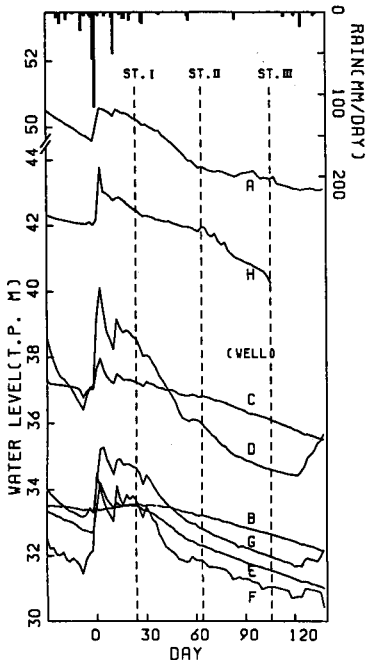


図-4 観測水位データ
(1983.9~1984.2)

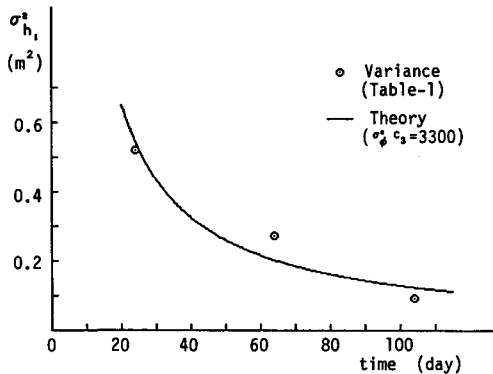


図-5 水位の分散の時間的変化

表-1 driftの推定結果

a_i	ST. I	ST. II	ST. III
a_1	19.4086	24.2950	26.1013
a_2	0.0511	0.0248	0.0164
a_3	0.0760	0.0416	0.0259
a_4	9.76E-06	3.67E-05	4.86E-05
a_5	-1.19E-04	-6.92E-05	-3.16E-05
a_6	-1.25E-04	-7.29E-05	-7.48E-05
Var. [m^2]	.52041	.27407	.09377

drift: $m(X) = a_1 + a_2X + a_3Y + a_4X^2 + a_5Y^2 + a_6XY$

$\rho(D)$ は帯水層の平均的水理特性 λ_0 のみに依存しているので、透水(量)係数や有効間隙率の平均値が与えられれば、 $\gamma(D)$ の空間的相関性をおさえることができる。ここでは、地質がシルト混じり細砂であるため、 $\lambda_0=10.0(\text{m}^2/\text{day})$ と仮定した。一方、 σ_{h1}^2 は、 λ_0 のほかに未知パラメータとして $\sigma_\phi^2 C_3$ を含んでいるが、drift推定により得られた残差分散と比較することにより同定することができる。図-5は両者の比較を示している。 $\gamma(D)$ の理論式における分散(実線)は残差分散(プロット)の時間的挙動をほぼ捉えているといえる。

4-2. 水位分布の Universal Kriging

求められた統計量を用いて、時刻 ST. I, II, IIIにおける水位分布のKriging推定を行った。推定地点は約20m 間隔の格子点とし、領域全体で600地点設けた。解析結果を図-6, 7に示す。図-6はdriftを考慮して推定された水位分布であり、図-7は推定誤差であるKriging偏差(分散の平方根)の分布である。これらの分布は、各時刻において 観測情報から期待される最も客観的な地下水状態とその信頼限界を表している。

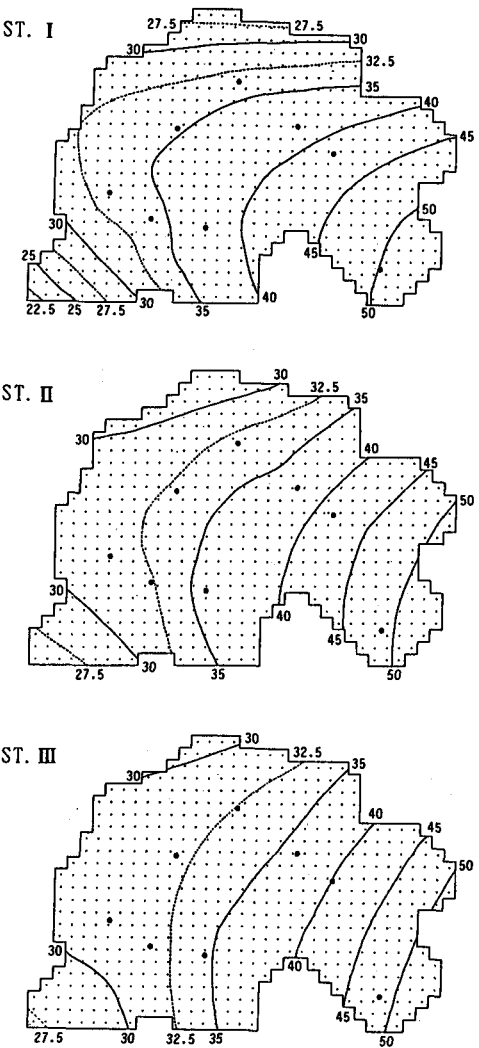


図-6 水位分布のKriging推定値 (T.P. m)

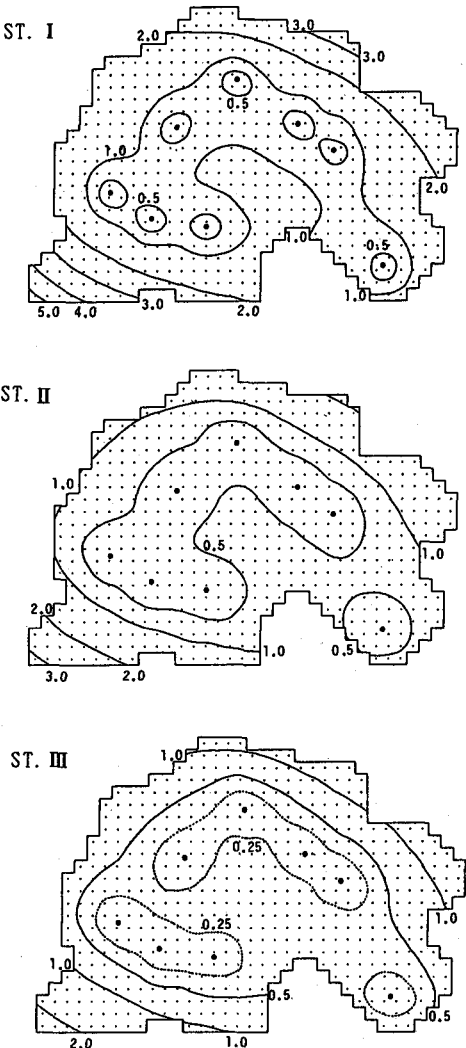


図-7 図-6のKriging推定誤差 (m)

まず、図-6をみると、水位分布は東(右)から北西(左上)にかけて尾根状に下がっており、時間とともに水位の「尾根」は崩れ、全体的に低下している。一方、これらに対する推定誤差の分布(図-7)をみると、当然のことながらどの時刻においても、誤差は観測井の存在する中央部で小さく、周辺部で大きい傾向にある。しかし、その絶対値は時刻によって大きく異なっている。ST.I では、中央部で1 m前後であるが、周辺部では数mにも達しているのに対し、ST.III になると、領域の大半で50 cm 未満、周辺部においても1 m程度にまで縮小している。これは、降雨後の時間経過に伴い、水位分布のランダム性が急速に衰退するために、水位の地点観測値の空間的代表スケールが増大し、推定精度が領域全体にわたって向上しているのである。

4-3. Kriging推定誤差と観測井の空間密度

Kriging分散は、現象の空間的変動性と観測井の配置で決まり、観測値そのものには依存しない。そこで、実際とは異なる観測網を仮想的に設定して、推定誤差を試算してみよう。現象の変動特性 σ_{h1}^2 、 $\rho(D)$ は前節の通りとし、観測井を領域全体に格子状に間隔 200m (CASE-1)、140m (CASE-2)、100m (CASE-3)で配置すると、観測井本数はそれぞれ7本、13本、25本となる。図-8は各CASEにおけるKriging誤差の領域平均値 $\bar{E}$ を示している。図中のプロットは 図-7の領域平均値である。図-7の場合 観測井は8本あるが、配置が中央に集中していたために、CASE-1のように井戸本数は少なくとも、より広い範囲に配置された場合の方が高い精度が得られている。CASE-1, 2, 3を比較すると、誤差はどの場合においても、時間とともに急速に減少しており、その値は観測井の多い場合ほど小さくなっている。しかし、井戸本数を増やした割に精度は上がっておらず、観測井の空間密度は現象の空間的変動性に見合った範囲でとられるべきであることを示している。

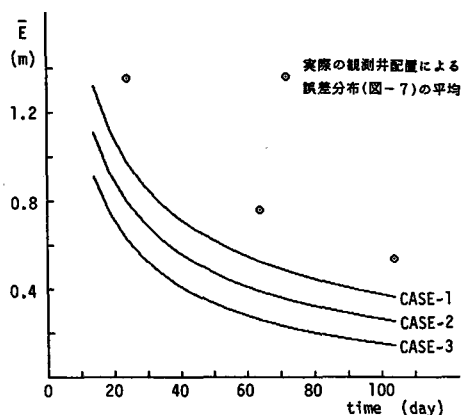


図-8 観測密度とKriging推定誤差

5. おわりに

不均質な流れ場における降雨後の地下水位を対象に、数少ない観測水位データから空間分布を推定する手法を示すとともに、その適用性について検討した。本研究で得られた成果をまとめると以下の通りである。

- [1] 二次元帯水層において、流れ場の不均質性の水位分布への影響を物理則に基づいて評価し、variogramを理論的に定式化した。
- [2] 水位のdriftを重回帰分析により求め、その際に得られる残差分散を理論的なvariogramに考慮することによって、観測井が少ない場合においても、Kriging法を用いた水位の空間推定が可能である。
- [3] 実流域における解析の結果、推定誤差は降雨直後にきわめて大きい、無降雨期間が続くにつれて急速に減少し、観測水位データの空間的代表性の向上することが示された。
- [4] 種々の観測井配置のもとで Kriging解析を行い、観測密度と推定誤差の関係を検討した。

参 考 文 献

- 1) 高木不折・原田守博：土木学会論文集，387/11-8，pp.85-94，1987。
- 2) 原田守博・高木不折：第3回水資源に関するシンポジウム前刷集，pp.439-444，1987。
- 3) Delhomme, J.P. : Kriging in the Hydrosiences, Advan. Water Resour., 1(5), pp.251-266, 1978。
- 4) 坂元慶行・石黒真木夫・北川源四郎：情報量統計学，共立出版，1983。
- 5) 高木不折・原田守博・内田光一：日本地下水学会誌，27-4，pp.171-182，1985。