

次に、上式を無次元化するために次の変数を導入する。

$$x = \frac{x}{L}, y = \frac{y}{L}, z = \frac{z}{D}, h = \frac{h}{D}, \xi = \frac{\xi}{D}, u = \frac{u}{U}, v = \frac{v}{U}, w = \frac{w}{U} \frac{L}{D}, P = \frac{P}{\rho g D} \quad (7)$$

$$t = ft, \tau_x = \frac{D}{A_v U} \tau_x, \tau_y = \frac{D}{A_v U} \tau_y \quad (8)$$

ここに、 U, D, L は解析対象の水域の流速、水深、水平長の代表量である。上式を代入して無次元化した式(3)を z から ξ の範囲で z 方向に積分して、大気圧を $P_s = 0.0$ とし、簡単のため以後下添え字(*)を省略すると

$$P = \rho g(\xi - z) \quad (9)$$

が得られる。同様に、式(4)を $-h$ から z の範囲で z 方向に積分して、 $u(-h)=v(-h)=0.0$ を用いると

$$w(z) = -\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^z \bar{u} \cdot dz - \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^z \bar{v} \cdot dz \quad (10)$$

が得られる。上式は u, v が既知になると w を求めるために用いられる。また、これらの式を代入した式(1), (2), (5)及び式(4)を $-h$ から ξ の範囲で z 方向に積分して水面の運動学的条件を用いると、それぞれの式は次のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + R_0 L' \cdot u - R_0 \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^z \bar{u} \cdot dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^z \bar{v} \cdot dz \right) \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{R_0}{F_r^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + D'' \cdot u + v \quad (11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + R_0 L' \cdot v - R_0 \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^z \bar{u} \cdot dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^z \bar{v} \cdot dz \right) \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{R_0}{F_r^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} + D'' \cdot v - u \quad (12)$$

$$\frac{1}{R_0} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^z \bar{u} \cdot dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^z \bar{v} \cdot dz = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + R_0 L' \cdot C - R_0 \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^z \bar{u} \cdot dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^z \bar{v} \cdot dz \right) \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} (F_h \frac{\partial C}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (F_h \frac{\partial C}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (F_v \frac{\partial C}{\partial z}) - \frac{K'}{\rho f} C + \frac{Q}{f} \quad (14)$$

ここに、 $R_0 = U/fL$ は Rossby 数、 $F_r = U/\sqrt{gD}$ は Froude 数、 D'' は D' の A_h, A_v をそれぞれ E_h, E_v にかえた式、 $E_h = A_h/fL^2$ 、 $E_v = A_v/fD^2$ はそれぞれ水平、鉛直 Ekman 数、 $F_h = A_h/fL^2$ 、 $F_v = A_v/fD^2$ である。上式のうち式(11) - (13)は、 u, v, ξ を未知量とする連立偏微分方程式で、風成流などの流れの準三次元解析モデルの基礎式である。これらの式より u, v, ξ が求められると、これらを代入した式(14)は C のみを未知量とする偏微分方程式となる。

3. 基礎方程式の離散化

基礎方程式をまず空間変数について離散化するために、未知量に次のような近似関数を採用する。

$$\left. \begin{aligned} u &= N_i \cdot \cos(A_p z') \cdot u_{p,i} \\ v &= N_i \cdot \cos(A_p z') \cdot v_{p,i} \\ \xi &= N_i \cdot \xi_i \\ C &= N_i \cdot \cos(B_{p'} z') \cdot C_{p',i} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} A_p &= \frac{2p-1}{2d} \pi, \quad (p=1, 2, \dots, m) \\ B_{p'} &= \frac{p'-1}{d} \pi, \quad (p'=1, 2, \dots, m') \end{aligned} \quad (i=i, j, k) \quad (15)$$

ここに、近似関数は図-1に示す三角柱要素内で定義されており、総和規約を用いている。また、 $N_i = N_i(x, y)$ は三角形一次要素の形状関数、 $\cos(A_p z')$ 、 $\cos(B_{p'} z')$ はそれぞれ流速と密度の鉛直形状関数、 i, j, k は三角形要素の頂点、 m, m' はそれぞれ流速と密度の展開項数、 $d = h + \xi$ である。上式を代入した式(11)、(12)には $N_i \cdot \cos(A_p z')$ を、式(13)には N_i を、式(14)には $N_i \cdot \cos(B_{p'} z')$ を重み関数として掛け、重み関数の定義域内で積分すると、単一要素の場合つぎのようになる。

$$\begin{aligned} M_{pqij} \cdot \dot{u}_{qj} + (RX_{pqri,jk} \cdot u_{qj} + RY_{pqri,jk} \cdot v_{qj}) \cdot u_{rk} \\ = EX_{p,i,j} \cdot \xi_j + (KX_{pqij} + KY_{pqij} + KZ_{pqij}) \cdot u_{qj} + C_{pqij} \cdot v_{qj} + FX_{p,i} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} M_{pqij} \cdot \dot{v}_{qj} + (RX_{pqri,jk} \cdot u_{qj} + RY_{pqri,jk} \cdot v_{qj}) \cdot v_{rk} \\ = EY_{p,i,j} \cdot \xi_j + (KX_{pqij} + KY_{pqij} + KZ_{pqij}) \cdot v_{qj} - C_{pqij} \cdot u_{qj} + FY_{p,i} \end{aligned} \quad (17)$$

$$M_{ij} \cdot \dot{\xi}_j + CX_{qij} \cdot u_{qj} + CV_{qij} \cdot v_{qj} = 0 \quad (18)$$

$$M'_{p,q,i,j} \cdot C_{q,j} + (RX'_{p,q,r,i,j,k} \cdot u_{rk} + RY'_{p,q,r,i,j,k} \cdot v_{rk}) \cdot C_{q,j} \\ = (KX'_{p,q,i,j} + KY'_{p,q,i,j} + KZ'_{p,q,i,j} + RA'_{p,q,i,j}) \cdot C_{q,j} + F'_{p,i} \quad (19)$$

(q=1,2,...m, q'=1,2,...m', r=1,2,...m, j=i,j,k, k=i,j,k)

ここに、 $u_{q,j}$ などの上付きの(・)は時間微分を意味する。また、 $p=1,2,...m$, $p'=1,2,...m'$, $i=i,j,k$ である。要素が多数存在する場合は、上式の各項を各要素に対して求め、重み関数にしたがって重ね合わせると、上式と同様の式が求まる。上式の各係数は、式(16) - (18)については紙面の都合上文献2)を参照されたい。また、式(19)については以下に示す。

$$M'_{p,q,i,j} = \int_{\Omega} C_i N_i N_j d\Omega \quad (20)$$

$$RX'_{p,q,r,i,j,k} = R_0 \int_{\Omega} N_i \left[\frac{\partial N_k}{\partial x} (T_0 + T_h) + N_j \left(\frac{\partial N_k}{\partial x} + \frac{N_k}{d} \frac{\partial d}{\partial x} \frac{B_r}{A_r} \{T_0 - T_h + C_m(-1)^r (1 - (-1)^{p'+q'}) B_q \cdot T_r\} \right) \right] d\Omega$$

$$KX'_{p,q,i,j} = - \int_{\Omega} F_h \left[C_i \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} d - C_n \left(N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial x} N_i \right) \frac{\partial d}{\partial x} + C_n N_i N_j \left\{ \left(\frac{\partial d}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{d}{6} B_p \cdot^2 - \frac{1}{4d} \right) - \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial h d}{\partial x^2} B_p \cdot^2 \right\} \right. \\ \left. + C_n \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial x} (-1)^{p'+q'} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \left\{ -N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} B_p \cdot^2 + \frac{\partial N_j}{\partial x} N_i B_q \cdot^2 + N_i N_j \frac{\partial d}{\partial x} B_p \cdot^2 B_q \cdot^2 T_r \right\} T_r \right] \cdot d\Omega \\ + n_x \int_{\Omega} F_h N_i \left[C_i \frac{\partial N_j}{\partial x} d - C_d N_j \frac{\partial d}{\partial x} + C_n N_j \left\{ \frac{\partial h}{\partial x} (-1)^{p'+q'} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right\} B_q \cdot^2 T_r \right] \cdot d\Omega$$

$$KZ'_{p,q,i,j} = - \int_{\Omega} F_v C_n N_i N_j \frac{d}{2} B_p \cdot^2 d\Omega, \quad RA'_{p,q,i,j} = - \frac{K'}{\rho f} \int_{\Omega} C_i N_i N_j d\Omega, \quad F'_{p,i} = \frac{Q}{f} \int_{\Omega} N_i d\Omega$$

$RY'_{p,q,r,i,j,k}$, $KY'_{p,q,i,j}$ は、 $RX'_{p,q,r,i,j,k}$, $KX'_{p,q,i,j}$ における $\partial / \partial x$, n_x の x を y にかえた式
ここで、 $p'=q'=1$; $C_i=1.0$, $C_m=0.0$, $C_n=0.0$. $p'=q'>1$; $C_i=0.5$, $C_m=0.0$, $C_n=1.0$.

$$p'=q' \quad ; \quad C_i=0.0, \quad C_m=1.0, \quad C_n=0.0. \quad p'=q'; T_r=0.0. \quad p'=q'; T_r=1/(B_p \cdot^2 - B_q \cdot^2).$$

$$T_0 = \frac{1}{2} \frac{A_r - B_q}{B_p \cdot^2 - (B_q \cdot^2 - A_r)^2} (-1)^{p'+q'+r}, \quad T_h = \frac{1}{2} \frac{A_r + B_q}{(B_q \cdot^2 + A_r)^2 - B_p \cdot^2} (-1)^{p'+q'+r}$$

次に、時間変数に関する離散化法について述べる。時間微分項以外を全て右辺に移して、行列形式に表すと、式(15) - (17), 及び式(18)はそれぞれ

$$M \cdot \frac{d}{dt} V = F \quad (21)$$

と、同じ形の式となる。ここに、 M はそれぞれ $M_{p,q,i,j}$, $M_{i,j}$, または $M'_{p,q,i,j}$ よりなる質量行列、 V はそれぞれ $u_{q,j}$, $v_{q,j}$, ξ_j , または $C_{q,j}$ よりなる列行列、 F は V の関数である列行列である。上式は時間に関する常微分方程式であり、この時間積分法として陽的時間積分法を用いる場合には、質量行列は

$$M_{p,q,i,j} = \int_{\Omega} C_q N_i N_j d\Omega, \quad M_{i,j} = \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega, \quad (p=q=1; C_q=1.0, \quad p,q>1; C_q=0.5, \quad p,q>1; C_q=1.0) \quad (22)$$

または式(20)とそれぞれ $p=1,2,...m$ または $p'=1,2,...m'$ に対してお互いに絡み合い(coupling)がない。このために、それぞれ $u_{q,j}$, $v_{q,j}$, ξ_j または $C_{q,j}$ の未知量に関する連立方程式を、各展開項ごとの連立方程式に替えて解くことができるために、かなりの計算機容量や計算時間の節約ができる。さらに、 $M_{p,q,i,j}$, $M'_{p,q,i,j}$ は p, p' に対して定数が異なるのみでまったく同じ形をしている。このために、流速成分や拡散物質濃度の各展開ごとの境界条件が同じ場合には、各展開項ごとの質量行列は兼用可能で、さらに計算機容量や計算時間の節約が可能である。

4. 数値解析結果と考察

開水路の等流における非定常拡散問題 本解析モデルの流れ解析については既に検討済み²⁾であるので、ここでは拡散解析の妥当性と各種時間積分法の検討のために、まず解析解の得られる開水路等流における非定常拡散問題に適用する。解析モデルは、幅 12m 水深 2.0m の清水の開水路等流の座標原点に突然 10.0 の拡散物質濃度を連続的に負荷するもので、各経過時間における流れ方向の濃度分布を、本解析モデルに陰的時間積分法の一つである Crank-Nicholson 法と陽的時間積分法の一つである Runge-Kutta

法を適用して三次元解析によって数値解を求め、厳密解³⁾のそれらと比較を行う。

流速は厳密解が求められるように一様流速としているが、これを精度良く近似するために流速の展開項数を $m=8$ と大きくしている。また、拡散物質濃度の展開項数は $m'=4$ 、解析領域は幅 12m、流れ方向 (x 方向) に 402m で、ここに節点数 99 要素数 128 の二次元メッシュを組んだ。解析例は、 $Q=0.0$ として

ケース 1: $\bar{u}=2.0\text{m/s}$, $K_h=K_v=10.0\text{m/s}$

$$K'=-0.1\cdot 1/\text{s}$$

ケース 2: $\bar{u}=0.1\text{m/s}$, $K_h=K_v=0.5\text{m/s}$,

$$K'=-0.005\cdot 1/\text{s}$$

の 2 ケースで、図-2、3 に各ケースの結果を示す。ここで、時間刻み幅は、試算的にいろいろと変えて、解の安定する最大値とした。計算結果において、拡散物質濃度の水路幅方向や鉛直方向の変化はほとんど認められなかった。図-2 では、Runge-kutta 法の解は厳密解のそれより濃度のピーク付近より下流で少し外れるのに対して、Crank-Nicholson 法の解は厳密解のそれに良い一致を示している。これに対して、図-3 では両者とも良い一致を示している。なお、two-step Lax-Wendroff 法でも Runge-Kutta と同様の解が得られている。

上の積分法で、計算機の記憶容量は Runge-Kutta 法が小さい。一方、計算時間は、用いる計算機やプログラムの最適化などのために比較が難しいが、本研究では Crank-Nichol-

son 法が Runge-Kutta 法の 1/2 であった。このために、一般的には両者の優劣はつけ難いが、本研究では計算精度や計算時間の短縮を優先し、後の拡散計算には Crank-Nicholson 法を用いる。

諏訪湖釜口水門付近の処理水放流問題 以上の結果を踏まえ、次に諏訪湖釜口水門付近の下水処理水の放流問題を取り挙げる。湖への流出入としては、 $3.54\text{m}^3/\text{s}$ の処理水が処理水放流点より釜口水門の中心方向へ、また釜口水門の 2 地点よりそれぞれ $5.6\text{m}^3/\text{s}$ の湖水が放流され (図-4)、さらに諏訪湖の南西岸に位置する上川から $7.66\text{m}^3/\text{s}$ の河川水が流入しているとする。また各種の係数として、水平渦動粘性係数は Richardsson の経験式より $A_h=0.01\cdot L^{4/3}$ (cm, s 単位, L は要素長)、鉛直渦動粘性係数は

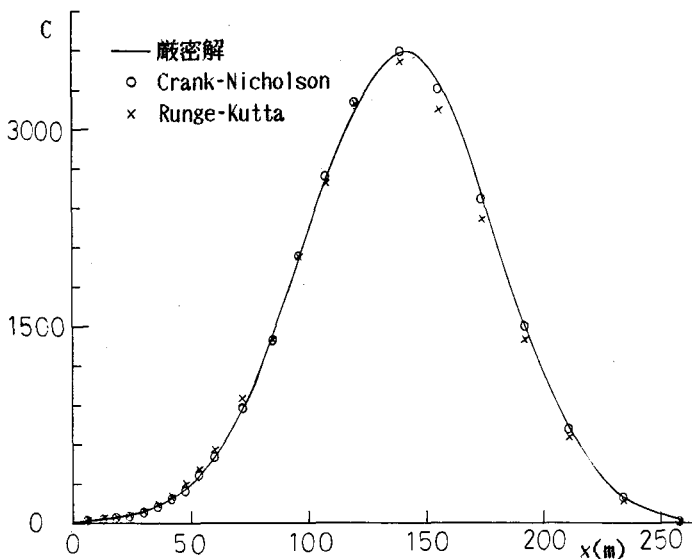


図-2 経過時間 75 秒の拡散物質濃度 (ケース 1)

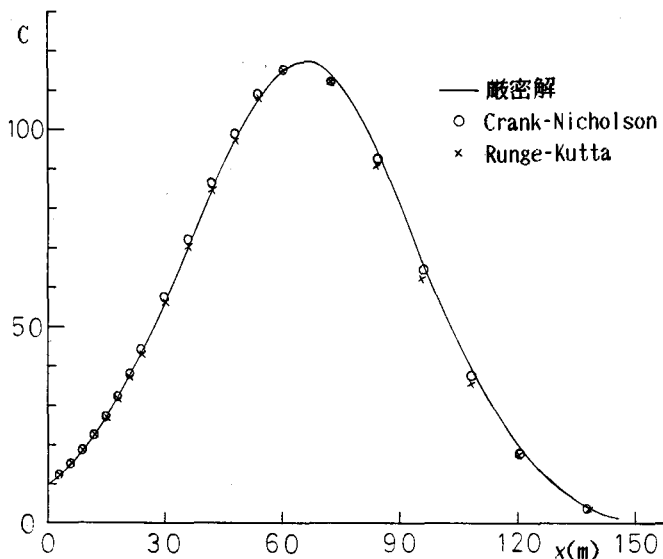


図-3 経過時間 750 秒の拡散物質濃度 (ケース 2)

鉛直渦動拡散係数と等しいと仮定して、 $A_v = 0.068n \sqrt{g(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)} \cdot h^{5/6}$ ($n=0.01$ はマンニングの粗度係数)と平均流速と水深の関数にする。また、処理水放流点付近では、流れが激しいことを考慮して、図-4のA、Bの領域では A_v を大きくしている。さらに、風は湖面全体で一様な 3m/s の西風と東風の2ケースとする。そして流速の解析は、流速の展開項数を $m=4$ として、静止状態にある湖水に突然上に述べた流入を与え、またそれぞれのケースの風を連吹させる条件で、時間積分法として Runge-Kutta 法を用いて非定常解析を行い、その定常解を求めた。結果は紙面の都合上省略するが、各ケースとも湖の中央部では、鉛直平均流速から見ると吹送流特有の湖を二分する水平還流が現れている。これに対して釜口水門付近では、処理水と水門からの放流に伴う流れが現れ、全体的には水門に向かう流れとなっている。

また拡散解析は、上の流速場上で、全ての濃度が零である状態に、処理水濃度のみを 10.0 に変化させる場合について行う。ただし、濃度の展開項数は $m'=4$ 、水平拡散係数は $K_h=500\text{m}^2/\text{s}$ 、鉛直拡散係数は鉛直渦動粘性係数に等しいとする。図-5は西風の非定常解析結果であるが、これより拡散物質は時間の経過と共に湖中央に広がるが、水門に向かう流れのために比較的狭い範囲に留まっている。東風の場合では、この傾向が一層顕著になる。

次に図-6は、各ケースの水面と水面下 4.0m の定常状態の拡散物質濃度分布であり、三次元性が顕著に現れている。上で述べたように全体的には西風の方が東風より濃度の広がりが大きい、水面下 4.0m の図では逆にになっている。これは、風の影響を受けて水門方向に向かう水底付近の流速が西風より東風の場合の方が小さいためである、ことを示している。

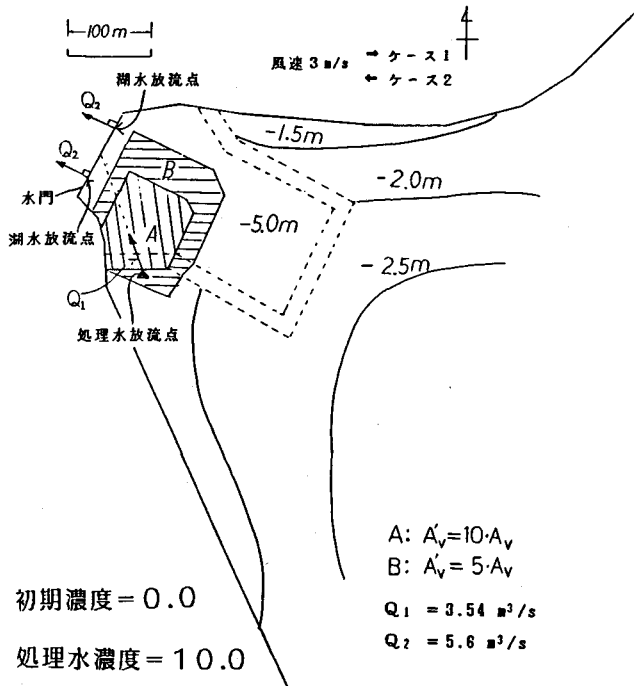


図-4 釜口水門付近の深度分布と解析条件

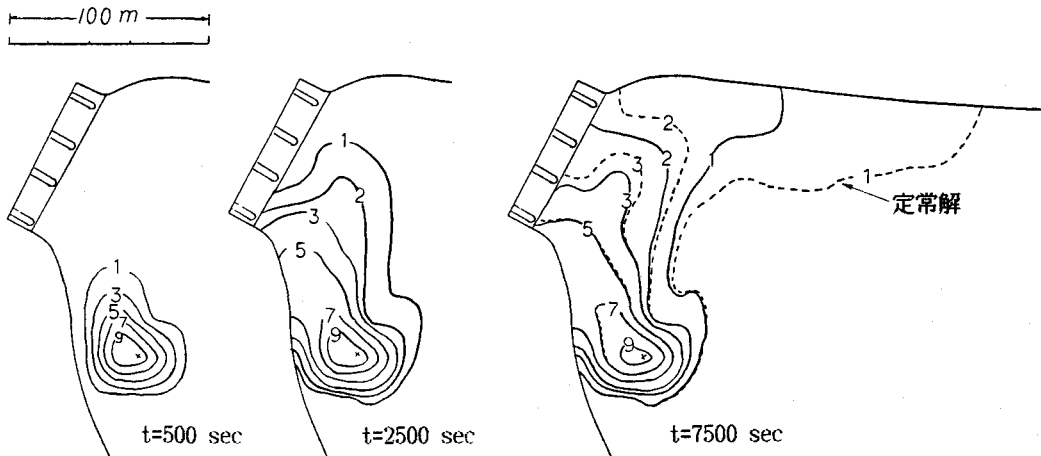


図-5 各経過時間における鉛直平均濃度分布 (西風 3m/s)

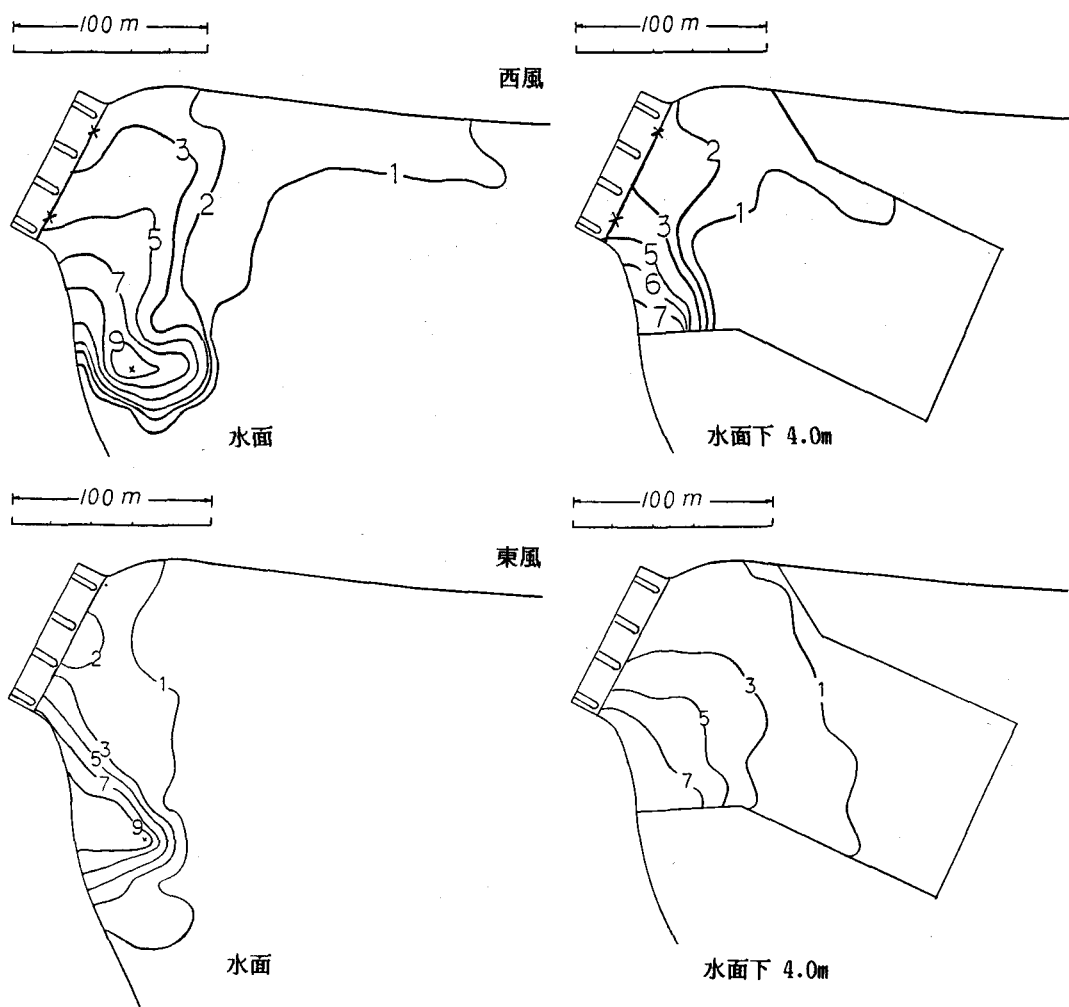


図-6 水面と水面下 4.0m の濃度分布 (定常解)

5. まとめ

本研究は、閉鎖浅水域における流れと拡散の新しい三次元解析法のうち、主に拡散解析について論じたが、開水路の等流の非定常拡散問題において、数値解と厳密解はよい一致を示した。なお、拡散解析の時間積分法としては、精度面からみると Crank-Nicholson 法が最も良いと思える。また、諏訪湖における下水処理水の放流問題の数値解は、物理的にみて妥当なものであり、本解析法は閉鎖水域における流れと拡散現象を三次元的に予測するのに有効な一手段であると言える。

参考文献

- 1) 富所五郎；連続成層状態にある閉鎖水域における風成流の三次元数値解析法，第1回数値流体力学シンポジウム，（投稿中），1987
- 2) 富所五郎；閉鎖水域の風成流への風応力分布の影響に関する研究，第30回水理講演会論文集，pp. 769-774, 1986.
- 3) L.a.Loziuk, J.C.Anderson and T.Belytschko: Transient Hydrothermal Analysis of Small Lakes, Proc. of ASCE, P02, pp.1983-1997, 1973