

湖沼における大規模流れの水理学的研究および数値解析手法の検討

The hydraulic reaserch of large-scale flows in lakes and
studies on numerical simulation method

京都大学大学院 学正員 申 輝 華 H. Shen

京都大学工学部 正 員 岩 佐 義 朗

京都大学工学部 正 員 井 上 和 也

1. はじめに

湖沼における流れの機構については、各方面より研究されているが、現象が複雑なためまだ十分に解明されてないようである。現実の複雑な流れの中からいくつかの卓越する現象を抽出し、それぞれについての機構を個別に考察することは一つの有効な方法と思われる。本研究は、非成層期の湖沼において、物質輸送に大きな影響を与える水平循環流（地形性循環流）、地形性の波を取扱い、数値シミュレーションを行うとともに、それら流れに影響を及ぼす各主要な因子について解析する。計算手法には、ADI法及びoperator splitting法を用い、各手法の利点、欠点及び適用範囲を考察する。また、各単純化された現象の解析解を数値計算結果と比較し、各現象の機構を明らかにする。

2. 基礎式及び数値シミュレーション

2. 1 基礎式

本研究は、非成層期の湖沼を対象としている。そこで、その最も単純なモデルとして、平面二次元一層流れを取り上げることとする。すなわち、流れの基礎式は、二次元の長波の方程式によって表わされる。水平粘性項は底面摩擦と比べて小さいと考えて、これを無視する。したがって、本研究で用いる基礎式は以下のようである。

$$\text{連続式} \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial(h+\xi)u}{\partial x} + \frac{\partial(h+\xi)v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

運動方程式

$$\text{x 方向: } \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = fu - g \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{gn^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{(h+\xi)^{4/3}} + \frac{\tau_{sx}}{\rho_0(h+\xi)} \quad (2)$$

$$\text{y 方向: } \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -fu - g \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{gn^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{(h+\xi)^{4/3}} + \frac{\tau_{sy}}{\rho_0(h+\xi)} \quad (3)$$

ξ : 湖の水位

u, v : それぞれ水深方向に平均化された流速の x, y 方向の成分

h : 湖底から静止水面までの深さ

n : Manning の粗度係数

τ_{sx}, τ_{sy} : それぞれ風応力の x, y 方向の成分

f : コリオリのパラメーター

本研究では単純な形状の湖を考え、また河川の流出入はないとしているので、境界条件は、湖岸に垂直な方向の流速成分は0とする方法を用いている。

2. 2 計算手法

時間方向の差分は、explicit scheme と implicit scheme に大別される。一般に、explicit法は計算式は簡単であるが、ノイマン安定条件より、微少擾乱の伝播速度を用いたクーラン数

$$Cr = \Delta t \sqrt{gn} \sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta y}\right)^2}$$

を満足しなければならないので、 Δt をみじかく取らざるをえない。それに対して、implicit法は無条件安定

なので大きな が許される。しかし、完全なimplicit法は計算式は複雑となり、また、連立方程式を解くため多くの反復を必要とし、時間を費やすといわれる。本計算では、このような問題を生じないADI法及びoperator splitting法をそれぞれ用いることにする。

(1) ADI法

ADI法はimplicit法の一種であり、時間刻みを取り分けることにより、単純な三重対角行列を求めるだけで多次元のimplicit解が得られる¹⁾。

ADI法を基礎式に適用した差分式は次のようである。(各変数の定義位置は図1のように定める。)

・第一段階 ($t \rightarrow t + \Delta t/2$ において)

連続方程式

$$\frac{\xi_{i,j}^{n+1/2} - \xi_{i,j}^n}{\Delta t/2} = - \frac{(\bar{h} + \xi^n)_{i+1/2,j} u_{i+1/2,j}^{n+1/2} - (\bar{h} + \xi^n)_{i-1/2,j} u_{i-1/2,j}^{n+1/2}}{\Delta x} - \frac{(\bar{h} + \xi^n)_{i,j+1/2} v_{i,j+1/2}^n - (\bar{h} + \xi^n)_{i,j-1/2} v_{i,j-1/2}^n}{\Delta y} \quad (4)$$

x方向の運動方程式

$$\frac{u_{i+1/2,j}^{n+1/2} - u_{i+1/2,j}^n}{\Delta t/2} = - u_{i+1/2,j}^{n+1/2} \frac{u_{i+3/2,j}^n - u_{i-1/2,j}^n}{2\Delta x}$$

$$- v_{i+1/2,j}^n \frac{u_{i+1/2,j+1}^n - u_{i+1/2,j-1}^n}{2\Delta y} + f v_{i+1/2,j}^n - g \frac{\xi_{i+1/2,j}^{n+1/2} - \xi_{i-1/2,j}^{n+1/2}}{\Delta x} - g n^2 \frac{u_{i+1/2,j}^{n+1/2} \sqrt{u_{i+1/2,j+1}^{n+1/2} + u_{i+1/2,j-1}^{n+1/2}}}{(\bar{h} + \xi^n)_{i+1/2,j}^{3/4}} + \frac{\tau_{sx}}{\rho_0 (\bar{h} + \xi^n)_{i+1/2,j}^2} \quad (5)$$

y方向の運動方程式

$$\frac{v_{i,j+1/2}^{n+1/2} - v_{i,j+1/2}^n}{\Delta t/2} = - u_{i,j+1/2}^{n+1/2} \frac{v_{i+1,j+1/2}^n - v_{i-1,j+1/2}^n}{\Delta x} - v_{i,j+1/2}^{n+1/2} \frac{v_{i,j+3/2}^n - v_{i,j-1/2}^n}{2\Delta y} - f u_{i,j+1/2}^{n+1/2} - g \frac{\xi_{i,j+1/2}^{n+1/2} - \xi_{i,j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta y} - g n^2 \frac{v_{i,j+1/2}^{n+1/2} \sqrt{u_{i,j+1/2+1}^{n+1/2} + u_{i,j+1/2-1}^{n+1/2}}}{(\bar{h} + \xi^n)_{i,j+1/2}^{3/4}} + \frac{\tau_{sy}}{\rho_0 (\bar{h} + \xi^n)_{i,j+1/2}^2} \quad (6)$$

ここに、 $F_{i+1/2}^n = (F_i + F_{i+1})/2$

$$F_{i+1/2}^{n+1/2} = (F_i + F_{i+1})/2$$

式(4)と(5)を整理して得られた連立方程式の係数行列は単純な三重対角行列なので、二重掃出し法によって、 $u^{n+1/2}$ 、 $\xi^{n+1/2}$ が求められ、更に、 $u^{n+1/2}$ 、 $\xi^{n+1/2}$ を(6)に代入すれば $v^{n+1/2}$ が解かれる。

・第二段階の $t + \Delta t/2 \rightarrow t + \Delta t$ においては、以上の場合と全く同じ手順(xとyを入れかえる点だけが異なる)を経て、 u^{n+1} 、 v^{n+1} 、 ξ^{n+1} が求められる。

(2) operator splitting法

最近operator splitting法が開発され、広い範囲に応用されている。この解法は一個あるいはいくつかの中間変を導入し、複雑な偏微分方程式をいくつかの簡単な微分方程式に分割し、それぞれに適切な差分スキームを用い方程式を解いていくものである。運動方程式から二つの移流項を取り出し独立に扱うのが多いようであるが²⁾、本研究では連続方程式と運動方程式をx方向とy方向によってsplittingする³⁾。詳しくは次のようである。

・第一段階においては、(1)，(2)，(3)式より、次のように分割される。

$$\frac{\xi^* - \xi^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(\bar{h} + \xi)u}{\partial x} \right)^n + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(\bar{h} + \xi)v}{\partial y} \right)^* = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\xi^{n+1} - \xi^*}{\Delta t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(\bar{h} + \xi)v}{\partial y} \right)^* + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(\bar{h} + \xi)u}{\partial x} \right)^{n+1} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{u^* - u^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} (u^* + u^n) \frac{\partial u}{\partial y} = f v - g \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^n + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^* \right) - g n^2 \frac{u \sqrt{u^2 + v^2}}{(\bar{h} + \xi)^{4/3}} + \frac{\tau_{sx}}{\rho(\bar{h} + \xi)} \quad (9)$$

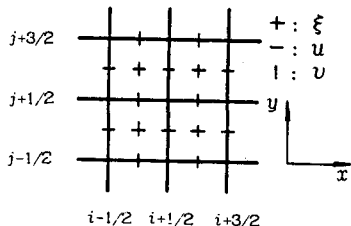


図1. 各変数の定義位置

$$\frac{u^{n+1}-u^*}{\Delta t} + v \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{v^*-v^n}{\Delta t} + u \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{v^{n+1}-v^*}{\Delta t} + \frac{1}{2}(v^*+v^{n+1}) \frac{\partial v}{\partial y} = -fu - \frac{1}{2}((\frac{\partial \xi}{\partial y})^* + (\frac{\partial \xi}{\partial y})^{n+1}) - gn^2 \frac{v \sqrt{u^2+v^2}}{(h+\xi)^{4/3}} + \frac{\tau_{sy}}{\rho(h+\xi)} \quad (12)$$

(7) および (9) 式において、前と同じく二重掃出し法を用い $\xi^{n+1/2}$, $u^{n+1/2}$ を求め、(11) 式より風上差分スキームを使って、 $v^{n+1/2}$ を解く。同じように (8) および (12) 式より、 ξ^{n+1} , v^{n+1} を求め (10) より u^{n+1} を解く。

第二段階で次式が用いられる。

$$\frac{\xi^{**}-\xi^{n+1}}{\Delta t} + \frac{1}{2}(\frac{\partial(h+\xi)v}{\partial y})^{n+1} + \frac{1}{2}(\frac{\partial(h+\xi)v}{\partial y})^{**} = 0$$

$$\frac{\xi^{n+2}-\xi^{**}}{\Delta t} + \frac{1}{2}(\frac{\partial(h+\xi)u}{\partial x})^{**} + \frac{1}{2}(\frac{\partial(h+\xi)u}{\partial x})^{n+2} = 0$$

$$\frac{v^{**}-v^{n+1}}{\Delta t} + \frac{1}{2}(v^{n+1}+v^{**}) \frac{\partial v}{\partial y} = -fu - \frac{g}{2}((\frac{\partial \xi}{\partial y})^{n+1} + (\frac{\partial \xi}{\partial y})^{**}) - gn^2 \frac{v \sqrt{u^2+v^2}}{(h+\xi)^{4/3}} + \frac{\tau_{sy}}{\rho(h+\xi)}$$

$$\frac{v^{n+2}-v^{**}}{\Delta t} + u \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{u^{**}-u^{n+1}}{\Delta t} + v \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\frac{u^{n+2}-u^{**}}{\Delta t} + \frac{1}{2}(u^{n+2}+u^{**}) \frac{\partial u}{\partial x} = fv - \frac{g}{2}((\frac{\partial \xi}{\partial x})^{**} + (\frac{\partial \xi}{\partial x})^{n+2}) + \frac{\tau_{sx}}{\rho(h+\xi)}$$

第一段階と全く同じ解法で u^{n+2} , v^{n+2} , ξ^{n+2} が求められる。

3 数値シミュレーション

考察の便宜のために、図2のような水深分布をもつ長方形の単純なモデル湖を想定し、数値シミュレーションを行う。

数値計算では、5m/s の南風を連吹させ、 $\Delta x = \Delta y = 500m$ とした。またADI法の場合、 $\Delta t/2=60$ 秒、operator splitting法では、 $\Delta t = 90$ 秒とした。なお、Manning 係数 $=0.023$ とし、風の応力は、 $(\tau_{sx}, \tau_{sy}) = \rho_a^2 \rho_a (w_x, w_y) \sqrt{w_x^2 + w_y^2}$ で表わし、 $\rho_a^2 = 1.3 \times 10^{-3}$ とする。

3. 計算結果およびそれらの理論的な考察

モデル湖に対する数値計算結果をまとめて各現象の物理的な機構を考察する。

3.1 地形性循環流

一様な南風が時間 $t=0$ に突然吹き始めると、湖の東西兩岸の付近には強い沿岸流、湖の中央には風と逆向きの反流が見られる。

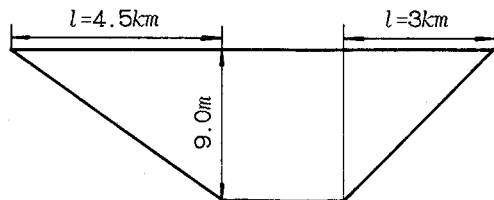


図2. 横断面の形状

これらの流れは吹送時間に比例して増大し沿岸のほうが中央より速く定常流に達する(図3)。この循環流は以下のように理解できよう。x方向の風が吹いた場合、(2)式より地球の自転を考えなければ、次式が得られる。

$$\frac{\partial H v}{\partial t} = -gH \frac{\partial \xi}{\partial y} + (\tau_{sy} - \tau_{by}) \quad (13)$$

(13) 式を幅の方向(x方向)に積分し、 $\int_0^b H v dx = 0$ を用いれば

$$-gH \frac{\partial \xi}{\partial y} + (\tau_{sy} - \tau_{by}) = 0$$

ここに、 H は横断方向の平均水深 ($H = \frac{1}{b} \int_0^b H dx$) であり、 τ_{by} は底面におけるせん断応力の平均値である。いま、風の吹き始めの初期には、 $\tau_{by}=0$ であるから、これより、

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{1}{gH} \tau_{sy} / \rho_0 \quad (14)$$

(14) 式を (13) 式に代入すれば

$$\frac{\partial H v}{\partial t} = (1 - \frac{H}{H}) \tau_{sy} \quad \text{であり} \quad v = \frac{t}{H} (1 - \frac{H}{H}) \tau_{sy} \quad (15)$$

が得られる。

(14) 式から、風による吹き寄せ (y 方向の水面こう配) は風の応力に比例し、吹送時間に関係しないということがわかる。

(15) 式より次のことがわかる。もし、水深 H が一定であれば、 $v=0$ であり、以上の循環流は全く生じない。水深が一定でない場合には、沿岸付近では H が小さいので、 v は正 (すなわち風と同じ方向) であり、かつ、 v の値は大きくなる。湖の中央部では、水深 H が横断方向の平均水深より小さいと、流速 v は風と逆向きであり、流速の値は小さい。また、流速 v は風応力及び吹送時間に比例して増大する。

これらの物理的な意味を考えると、浅いところでは、圧力勾配力は小さく、風の応力はほぼ水の運動量に変換される。しかし、深いところでは、圧力勾配力は大きく、風の応力の相当な部分が圧力勾配力と釣り合い、水の運動量は小さくなる。

地球の自転を考えると、地衡流の釣り合い $\frac{\partial \xi}{\partial x} = f v$ により⁴⁾、湖の西岸では、湖面は下がり、東岸では、湖面は高くなる。この現象は計算結果の図4に見られる。

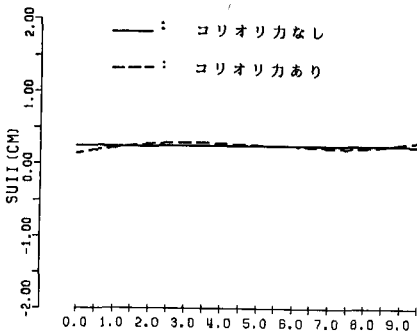


図4. コリオリ力の影響

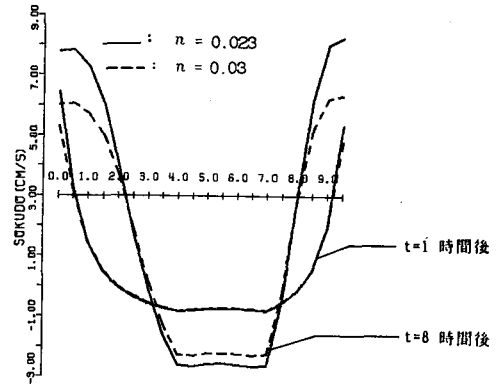


図5. 底面摩擦の影響

図5は底面摩擦の影響を示したものである。この図より、風が吹くにつれて、底面摩擦の影響が大きくなっていくということがわかる。つまり、深いところより、浅いところでは、流速は摩擦係数によって大きく変わり、風が吹き続けると、中央領域でも、底面摩擦の影響が大きくなる。

3. 2 地形性の波

強風の連吹後に静穏が続くと、沿岸域に流れの反転が見られ、この流れの反転は時間とともに、伝播する⁵⁾。この波は地形性の波と呼ばれる。図6は、風が12時間連吹した後の、流れの分布図である。これらの図を見れば、湖の西北部及び東南部において、流れが反転し、更にこの反転は時間とともに湖を反時計回りに移動していくことが確かめられる。また図より、この反時計回りの伝播の周期は約144時間と見られる。

地形性の波は慣性周期 $2\pi/f$ より長い周期をもつ波動である。この波を扱うとき、周期が長かつ水位変化も小さいという仮定より $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ は無視される。つまり rigid lid の仮定によって、表面重力波や

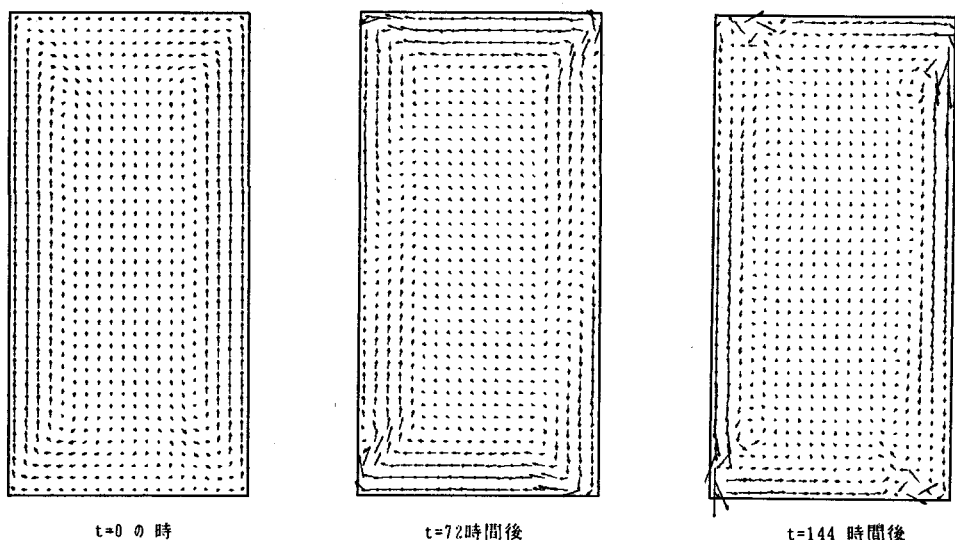


図6. 強風連吹後の流れの反転（地形性の波）

barotropic Kelvin 波などが取り除かれる。これらより、地形性の波に関する方程式は以下のように書ける

$$-fu = -gH \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + fU = -gH \frac{\partial \xi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

ここに $U=uH, V=vH$ である。この方程式は Gill と Schumann によってすでに解かれており⁵⁾、その結果だけを示すと、本モデル湖に対して、波の伝播速度 $C_i (i=1, 2, \dots)$ は、

$$C_i = \frac{fl}{3.67}, \frac{fl}{12.30}, \frac{fl}{25.87}, \dots$$

ここに、 l は図2のように定義される。今、 $l=4.5\text{km}$ 、 $f=8.39 \times 10^{-5}$ 秒とすれば、最低次の伝播速度 $C_1=1.03 \times 10^{-3} \text{m/s}$ であり、湖の周長 $L=60\text{km}$ より、地形性波の周期は162時間となる。

C_i の表示を見れば、以下のことがわかる。地形性の波の周期は、 l の値により、 l が大きいほど周期は小さくなる。水深が一定の場合（ $l=0$ の場合）、地形性の波は存在しない。また、 $f=0$ であれば、水深一定の場合と同様に波は生じない。これより地形性の波は地球の自転によるものであり、湖底傾斜の存在する沿岸に限られる。前に述べたように、沿岸付近においては岸に平行な流れが圧倒的に強い。これは湖に流入する水の分散を考えると、非常に重要であって、岸に平行な強い流れの存在により、沿岸より流入した水は沖合へ流れず、岸に沿う細長い帯にとじこめられることが考えられる。しかし、地形性の波によって、沿岸流の流向が反転するときに、沿岸域と沖合域との間で水の交換が生じよう。したがって、地形性の波は湖に排出される水の分散にきわめて重要である。

4. 計算手法の検討

本研究では従来より使われてきた explicit 法を用い、数値計算を行った。図7、8はそれぞれ explicit 法、ADI 法、operator splitting 法による数値計算結果を比較したものである。これらの図により、各手法による計算結果は互いによく一致していることがわかる。

explicit 法にくらべて、ADI 法は大きな時間ステップが許容され、また時間に関して二次の正確度を有する。ノイマンの安定解析から見れば完全な implicit 法と同じく無条件安定であり、二次元問題にもかかわ

らず、一次元問題のimplicit法に表われる三重対角行列を解くことに帰着される。しかし、大きなクーラン数にたいして、ADI法は数値減衰、非物理的な振動、及び位相誤差をもたらし、波の伝播の再現性が悪いとされている²⁾。いくつかのクーラン数に対して計算した結果ではADI法は、クーラン数が3～5以下でexplicit法の結果をよく再現することがわかった。

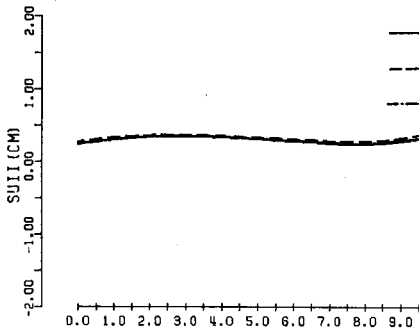


図7. 各手法における水位の横断方向分布

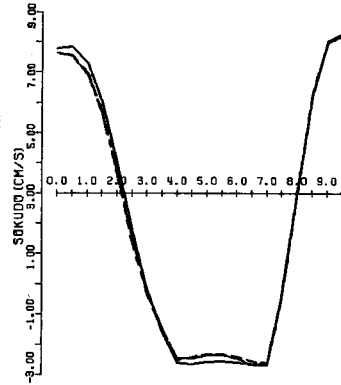


図8. 各手法による流速の横断方向分布

operator splitting法は ADI法とほぼ同じ利点を有しているが、ADI法より計算式が簡単であり、ADI法より僅かながら大きなクーラン数にも応用できる。この方法ではクーラン数が6～8以下でexplicit法の結果と一致した計算結果が得られる。

6. 終りに

本研究は、平面二次元一層モデルを用いて、explicit法により計算時間が短いADI法、及び、operator splitting法を展開し、湖沼における流れの数値シミュレーションを実施した。地形性循環流や地形性の波の形成、及び物質輸送に対するそれらの重要性を考察するとともに、それらの流れに影響を及ぼす各因子について検討した。またADI法、operator splitting法の特徴及び適用性について若干の考察を行った。今後、成層した湖沼における、地形性の波及び内部Kelvin波や、それらの物質輸送に対する影響を検討するとともに、計算法として、operator splitting法を三次元に拡張したいと考えている。

参考文献

1. 村上和男, 森川雅行, 堀江毅: ADI法による高潮の数値計算法 港湾技研資料, No.529. Sep 1985
2. Jean Pierre Benque, etc : New Method For Tidal Current Computation, ASCE Vol.108 WW 1982
3. He.Shaolin and Lin.Bingnan : "Application of the operator splitting method to the Caluculation of two-dimensional tides" Acta Oceanologica sinica Vol.6, No.2, 1984 (Chinese)
4. K.Hutter (1984) : Hydrodynamics of Lakes, Springer-Verlag
5. A.レイマン編, 奥田節夫ら訳 : 湖沼の科学, Springer-Verlag