

浮遊砂流に対するk-ε乱流モデルの適合性について

Applicability of k-ε Turbulence Model to Flow with Suspended Sediments

長岡技術科学大学大学院 学生員 福田 雅晴

長岡技術科学大学工学部 正 員 福嶋 祐介

1. はじめに

河川、用水路、貯水池などにおける浮遊砂の予測は重要なテーマである。しかしながら、浮遊砂流では、清水流に比べ、渦動粘性係数が変化し、更に渦拡散係数が変化するので、これらと底面濃度、底面の粗度等との関係については、充分には明らかにされていないのが現状である。また、現実の流れでは、非平衡浮遊砂量を知ることが重要であるが、このためには底面での濃度の境界条件を与える必要がある。

本研究の目的は、浮遊砂流に対するk-ε乱流モデルの適合性を検討することである。このため、平衡浮遊砂流に対して、k-εモデルを適用し、流速分布と濃度分布の実測値を用いて、渦動粘性係数と渦拡散係数の比 σ_t の値を同定する。次に、非平衡浮遊砂流についての実験を行い、濃度の底面条件について考察を行う。

2. 平衡浮遊砂流に対するk-εモデル

(a) 基礎方程式と境界条件 十分に幅の広い開水路において、砂が浮遊状態で輸送されている場合を考える。流れは2次元、等流とし、十分発達した乱流であり粘性の影響は無視できるものとする。考えている区間で砂は堆積も沈降もせず、浮遊砂は平衡状態であるとする。座標系を図-1に示す。このとき、基礎方程式は次のように与えられる。

運動量方程式

$$(1 + Rc)g \sin \theta + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_t \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0 \quad (1)$$

浮遊砂の拡散方程式

$$v_s c + \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial c}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

乱れエネルギー保存式

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + Rg \cos \theta \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial c}{\partial z} - \epsilon = 0 \quad (3)$$

エネルギー逸散率

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial z} \right) + c_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} \left\{ \nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + (1 - c_{3\epsilon}) Rg \cos \theta \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial c}{\partial z} \right\} - c_{2\epsilon} \frac{\epsilon^2}{k} = 0 \quad (4)$$

ここで、 u は流れ方向の平均流速成分、 c は浮遊砂の平均濃度、 k は乱れの運動エネルギー、 ϵ は乱れの粘性逸散率である。さらに、 v_s は浮遊砂の沈降速度、 $R (= (\rho_s - \rho_0)/\rho_0)$ は浮遊砂の水中比重、 θ は流路床勾配、 ρ_s 、 ρ_0 は、それぞれ、浮遊砂と清水の密度である。また、渦動粘性係数 ν_t 、渦拡散係数 Γ は、k-εモデルにおいては次のように定義される。

$$\nu_t = c_M k^2 / \epsilon, \quad \Gamma = \nu_t / \sigma_t \quad (5)$$

モデル中のパラメータ c_M 、 σ_k 、 σ_ϵ 、 $c_{1\epsilon}$ 、 $c_{2\epsilon}$ の値は一般的な値¹⁾とした。ここで同定されるべき係数は σ_t 、 $c_{3\epsilon}$ の二つである。しかしながら、 $c_{3\epsilon}$ の感度は極めて鈍い事が判ったので、特別な場合を除き $c_{3\epsilon} = 1.0$ として、 σ_t のみについて考察を行う。

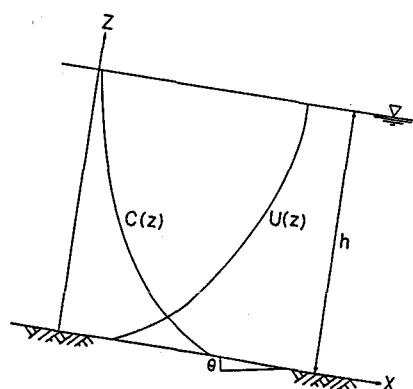


図1 座標系と記号

平衡浮遊砂流の計算において、次のような条件を与える。すなわち、水面ではせん断応力は零、浮遊砂の直角方向のfluxは零、 k と ϵ には対称条件を与える。底面では、乱流モデルで通常よく用いられる壁関数法を用いた²⁾。

水面 ($z = h$) において

$$\partial u / \partial z = 0$$

$$v_s c + \frac{\nu t}{\sigma t} \frac{\partial c}{\partial z} = 0$$

$$\partial k / \partial z = 0$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial z} = 0$$

(6)

底面 ($z = z_0$) において

$$c = c_b$$

$$u = \frac{u_*}{\kappa} \ln \left(\frac{z_0}{k_s} \right) + A_s$$

$$\epsilon = \frac{u_*^3}{\kappa z_0}$$

$$k = \frac{u_*^2}{\sqrt{C_M}}$$

(7)

表 1 水理条件と同定結果

Run. No	q cm ² /s	qs cm ² /s	h cm	θ	Ds mm	vs cm/s	ks cm	kd mm	σ_t	C _{3c}	C _b
VN. 1	382	.542	8.66	.00250	.105	.945	.944	.105	1.2	1.0	.006
3	500	.612	7.44	.00250	.105	.945	.018	.105	1.7	3.0	.014
5	571	.678	7.83	.00200	.105	.945	.020	.105	1.8	6.0	.020
7	608	.183	7.79	.00206	.161	1.890	.016	.161	1.3	1.0	.006
V. 2	825	.086	9.62	.00258	.160	1.372	.053	.470	2.5	1.0	.003
5	1653	.417	15.04	.00250	.160	1.798	.046	.470	2.4	1.0	.009
15	654	.160	8.34	.00250	.160	1.759	.059	.880	2.1	1.0	.012
20	1433	.414	14.09	.00250	.100	.869	.066	.880	2.9	1.0	.002

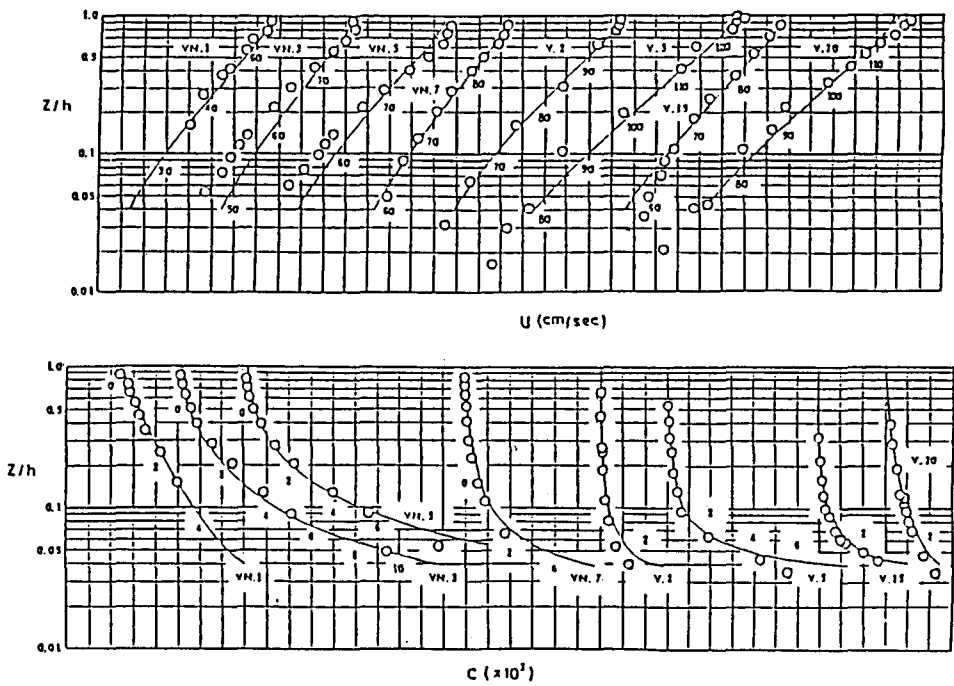


図 2 流速、濃度分布の比較

ここで、 z_0 は境界条件を与える底面からの距離である。

(b) 計算結果と実験結果との比較 比較に用いた実験は、Vanoni & Nomikos³⁾の Run1, 3, 5, 7とVanoni⁴⁾の Run 2, 5, 15, 20である。これらの実験の流速、濃度分布と最も良く一致するように σ_t , c_{ae} の値を同定した。表-1に同定されたパラメータおよび水理条件を与える。また、図-2に流速と濃度分布の実験値と計算値との比較を示す。この図から、 k - ϵ モデルで適切なパラメータの値を選択してやれば実験結果をかなりの精度で表現できることがわかる。また、表-1において、底面砂の中央粒径 k_0 と計算から得られた相当粗度 k_s は、dunes があると報告されているVN.1を除いて、ほぼ同程度のオーダーであり妥当な値であろう。 k_s は k_0 と関係しており、VN.1ではdunesの波高に相当した値になっている。また、 $1/\sigma_t$ と浮遊砂の沈降速度 V_s と摩擦速度 u_* の比との関係を図-3に示す。 $1/\sigma_t$ は沈降速度と摩擦速度との比の増加にともなって増加する傾向があり、辻本⁵⁾が示したものと傾向は一致する。しかし、値は本研究の方が小さくなっている。また、同じ沈降速度と摩擦速度の比であっても粒径が大きいほど $1/\sigma_t$ は小さくなるようである。以上のことから、平衡浮遊砂流に対して適切なパラメータの値を選択することによって、 k - ϵ 乱流モデルを適用することは可能である。また、 $1/\sigma_t$ は浮遊砂の沈降速度と摩擦速度の比の関数であることもわかった。

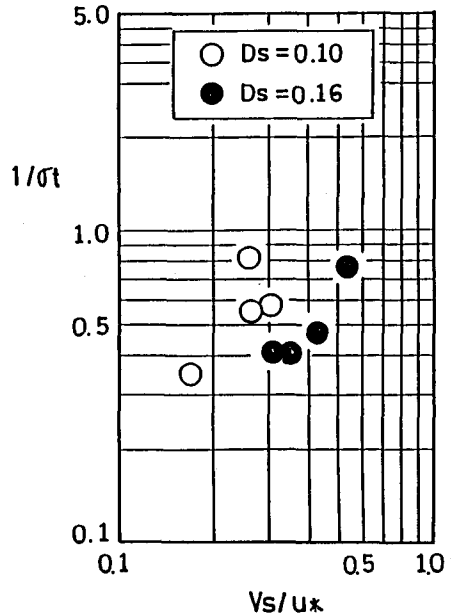


図3 $1/\sigma_t$ と V_s/u_* の関係

3. 非平衡浮遊砂流の濃度に対する底面の境界条件

流れは、図-4に示すように路床から砂を巻き上げ、発達あるいは減衰過程を経て、流れに適した平衡濃度分布になる。実際に問題となるのは、路床の洗掘あるいは堆積を左右する非平衡時の浮遊砂流である。しかしながら、その底面での濃度の境界条件については明確ではない。そこで、非平衡浮遊砂流の実験を行い、濃度の底面での境界条件について考察する。

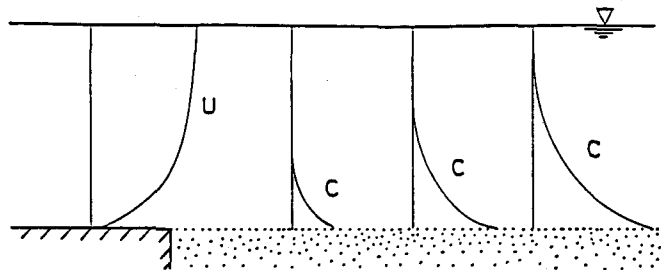


図4 非平衡浮遊砂流の概念図

(a) 実験装置および方法 実験に使用した水路は、幅40cm、深さ40cmの長方形断面を有する全長11mの両面ガラス張り鋼製可変勾配水路である。水路入口から下流6.5m (stn. 65)の区間には直径3~5mmの小石を張り付けた厚さ2cmのアクリル板を敷設し、それより下流端には比重2.65、中央粒径0.16mm、沈降速度1.57cm/sの珪砂を一樣厚さに

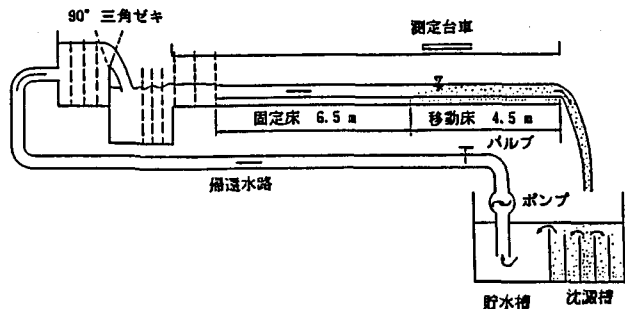


図5 実験装置の概要

敷いた移動床を設定した。今回は水路床勾配を固定(1/400)し、供給流量のみを変化させた。流速および濃度分布の測定は、移動床区間のそれぞれ3断面(stn. 70, 80, 90)で行った。濃度測定は、内径1mmの銅製パイプを5mm 間隔で配したサイフォンで3断面同時採水によって行った。流速は測定台車に設置した直径3mmのプロベラ流速計を用いて測定した。

(b) 底面での境界条件

測定された流速および濃度分布の一例を図-6に示す。この

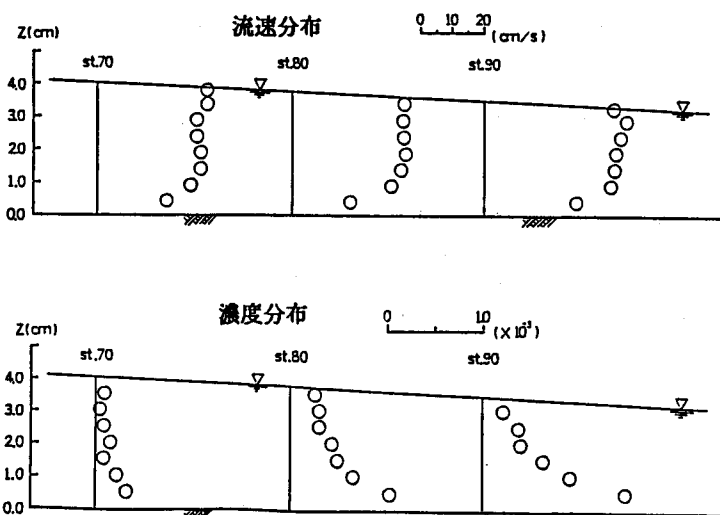


図6 実験結果の一例

図から濃度が流下方向に増加し、平衡の濃度分布に近づく過程がよくわかる。なお、この図は通水前の河床を基準として流速および濃度をプロットしたものである。通水後には測定区間では、波長15cm、波高0.5cm程度の砂澱が形成されていた。これらの実験結果をもとに底面での境界条件について、次のような解析を行った。水面における浮遊砂の境界条件(6)式を考慮すると非平衡の浮遊砂の質量保存式は次のようになる。

$$-\frac{\partial}{\partial x} \int_a^h u c \, dz = - \left| \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial c}{\partial z} + v_s c \right|_{z=a} \quad (8)$$

ここで、 $z = a$ は底面近傍の任意の距離を示している(通常 $a = 0.05h$)。上式は距離 $a \sim h$ 間での浮遊砂の体積バランスを規定する式である。そして浮遊砂の沈降するフラックスDは

$$D(a) = v_s c \big|_{z=a} \quad (9)$$

である。また、乱れによって下の層から浮上するフラックスEは

$$E(a) = - \left| \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial c}{\partial z} \right|_{z=a} \quad (10)$$

である。これらから式(8)は次式のようにになる。

$$-\frac{\partial}{\partial x} \int_a^h u c \, dz = E(a) - D(a) \quad (11)$$

上式の右辺は平衡状態においてのみ零である。

著者の一人⁶⁾は、"連行速度は底面に作用する流体力と底質自身の特性の関数である"として、連行速度Eを無次元連行係数 E_s を用いて次のように定義した。

$$E(a) = v_s E_s \quad (12)$$

さらに、次元解析により E_s を次のように与えた。

$$E_s = f(u_* / v_s, \text{Rep}) \quad (13)$$

ここで、 $\text{Rep} \equiv (R_g D_s)^{0.5} D_s / \nu$ は、砂粒子の粒子レイノルズ数である。

そして、平衡状態においては $E_s = c(a)$ であることから、彼らは既存の平衡浮遊砂流の実験データを再整理し、次の結果を得た。

$$E_s = m^* Z^n (1 - Z_c / Z) \quad (m, n: \text{empirical constants}) \quad (14)$$

ここで、 $Z = u_* / v_* \sqrt{Re_p}$ であり、 $Z_c = 5$ は無次元連行係数 Es が零になる Z の限界値である。本研究では、は、彼らの手法に沿って砂粒子の連行係数を求める。(11)式を差分化すると次式が得られる。

$$Es = \frac{1}{2} (c(a)_1 + c(a)_2) + (\int_0^h u c dz |_2 - \int_0^h u c dz |_1) / (\Delta x v_*) \quad (15)$$

上式に、2断面（つまりstn.70と80, stn.80と90）で測定された流速と濃度分布を与え、数値積分を施して無次元連行係数を導いた。また、 Z については、2断面間の水深差からエネルギー勾配を誘導し、 $u_* = (gh_s I_0)^{0.5}$ より摩擦速度を算定し（ h_s : 径深）求めた。この結果を示したのが図-7である。また、この図には Akiyama & Fukushimaが整理した結果も示している。本研究から得られた関数形は彼らのものと比べてかなり勾配が小さい。また、彼らの結果では $Z = 5.0$ が連行限界となっているが、本研究の多くのケースは $Z \leq 5$ の領域にあり、これらの理由はよくわからない。

4. おわりに 平衡浮遊砂流に対して $k-\epsilon$ モデルを適用し、その適合性について検討した。また、非平衡浮遊砂流の底面での濃度の境界条件について若干の実験的考察を行った。その結果、平衡浮遊砂流に対して、 $k-\epsilon$ モデルを適用することは可能であることが示された。また、非平衡浮遊砂流については、今後さらに良質のデータの蓄積を図るとともに、実験から得た底面での濃度の境界条件を用いて、不等流解析を進める必要がある。

最後に、実験に協力された本学大学院 常松 優、岩田浩一の両君に深甚な謝意を表する。

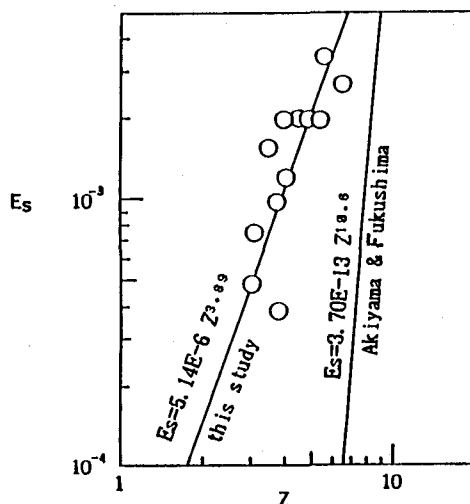


図7 Es と Z の関係

5. 参考文献

- (1) Rodi, W.: Turbulence Models and thier Application in Hydraulics, State of the Arts paper, IAHR, 1980.
- (2) Launder, B.E. and Spalding, .D.B.: The Numerical Computation of Turbulence Flows, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 3, 1974.
- (3) Vanoni, V.A. and Nomicos, G.N.: Resisittance Properties of sediment-laden Streams, Trans. of ASCE, Vol. 125, 1960.
- (4) Vanoni, V.A.: Transportation of Suspended Sediment by Water, Trans. of ASCE, Vol. 111, 1946.
- (5) 辻本哲郎: 乱流による土砂輸送 -浮遊砂の拡散係数に対する検討-, 第30回水理講演会論文集, 1986.
- (6) Akiyama, J. and Fukushima, Y.: Entarainment of Noncohesive Bed Sediment into Suspension, External Memorandum No. 195, St. Anthony Falls Hydraulic Laboratory, U. of Minnessota, 1985
- (7) Vantier, A. and Larock, E.: Sediment Transport in Stratified Turbulent Flow, Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 109, No. 12, ASCE, 1983.
- (8) Celic, I. and Rodi, W.: Mathematical Modeling of Suspended Sediment Transport in Open Channels, 21st IAHR Congress, Melbourne, Australia, 1985.
- (9) 福嶋祐介: 開水路浮遊砂流の乱流構造の解析, 第30回水理講演会論文集, 1986.
- (10) 芦田和男、岡部健士: 非平衡な浮遊砂濃度の算定法に関する研究, 第26回水理講演会論文集, 1982.