

混相流での $k-\epsilon$ モデルの構成*The Basic Equations of $k-\epsilon$ model in Multi-Phase Flows*

広島大学工学部 正員 細田 尚

広島大学工学部 正員 余越 正一郎

1. 序 論 : 本研究は、層流での混相流の基礎式に二、三の仮定と Reynolds の手法を用いて、乱流での液相の乱れエネルギー、乱れエネルギー散逸率の関係式 (k -方程式, ϵ -方程式) の定式化と適用限界を検討したものである。乱流モデルを浮遊砂を含む流れの解析に適用する試みも行われている。^{1),2)} そこで用いられている基礎式の誘導仮定を詳細に検討するとともに、 k -方程式中の固相・液相の乱れ速度相関項の取り扱いを述べる。また、 ϵ -方程式中に現れる固相・液相の相互作用に起因する項が、濃度変動場の解析に用いられる ϵ_c -方程式³⁾ の生成項と類似であることを示す。

2. 層流での基礎式 : 液相、固相の質量保存則は各々次のように表される。

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_f (1-c) + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho_f (1-c) \cdot u_{fj} = 0 \quad (\text{液 相}) \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_p c + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho_p c u_{pj} = 0 \quad (\text{固 相}) \quad (2)$$

ここに、 ρ_f , ρ_p : 液相、固相の密度, u_{fj} , u_{pj} : 液相、固相の流速ベクトルの成分, c : 固相の体積濃度, t : 時間, x_j : 空間座標。

ρ_f , ρ_p を一定と考え、(1), (2) 式を各々 ρ_f , ρ_p で除し加えることにより混相流の連続式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \{ (1-c) u_{fj} + c u_{pj} \} = 0 \quad (3)$$

一方、液相の運動方程式は次のように表せる。⁴⁾

$$\rho_f (1-c) \frac{\partial u_{fi}}{\partial t} + \rho_f (1-c) u_{fj} \frac{\partial u_{fi}}{\partial x_j} = \rho_f (1-c) g_i - \frac{\partial p_f}{\partial x_i} + (1-c) \frac{\partial \tau_{fij}}{\partial x_j} - R_i \quad (4)$$

ここに、 g_i : 重力加速度ベクトルの成分, p_f : 液相の圧力, τ_{fij} : 液相の応力テンソルの成分, R_i : 固相と液相間の相互作用力。ここで、相互作用力として粘性抵抗、浮力のみを考慮して R_i を次のように表す。

$$R_i = c \frac{18\mu_f}{d^2} (u_{fi} - u_{pi}) - \rho_f g_i c \quad \left[\begin{array}{l} R_{di} \text{ として Stokes の法則を適用。} \\ d \text{ は固相粒子の直径。} \end{array} \right] \quad (5)$$

(4) 式を $\rho_f (1-c)$ で除すると次式となる。

$$\frac{\partial u_{fi}}{\partial t} + u_{fj} \frac{\partial u_{fi}}{\partial x_j} = \frac{g_i}{(1-c)} - \frac{1}{\rho_f (1-c)} \frac{\partial p_f}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \tau_{fij}}{\partial x_j} - \frac{R_{di}}{\rho_f (1-c)} \quad (6)$$

$$\tau_{fij} = \rho_f \nu \left(\frac{\partial u_{fi}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{fj}}{\partial x_i} \right) \quad (7)$$

一方、固相の運動方程式は用いずに次式を仮定する。

$$u_{pi} = u_{fi} - w_0 \delta_{i3} \quad (w_0: \text{静水中の粒子の沈降速度}) \quad (8)$$

ただし、座標系を x_3 の方向と g の方向が平行になるようにとっている。(Fig. 1 参照)

(8)式を(3)式に代入すれば(9)式

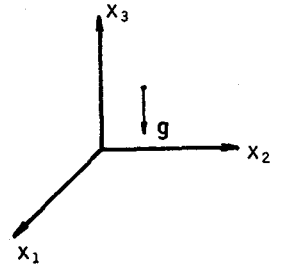
となる。また(6)式中 $\partial \tau_{fij} / \partial x_j$

$$\frac{\partial u_{fi}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_3} (c w_0) \quad (9)$$

に(7)式を代入し(9)式を用いれば

$$\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \tau_{fij}}{\partial x_j} = \nu \left(\frac{\partial^2 u_{fi}}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_3} (c w_0) \right)$$

となり、さらに $\frac{\partial^2 u_{fi}}{\partial x_j^2} \gg \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_3} (c w_0)$ と仮定する。すなわち(6)



式は

$$\frac{\partial u_{fi}}{\partial t} + u_{fi} \frac{\partial u_{fi}}{\partial x_j} = \frac{g_i}{1-c} - \frac{1}{\rho_f(1-c)} \frac{\partial p_f}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_{fi}}{\partial x_j^2} - \frac{R_{di}}{\rho_f(1-c)} \quad (10)$$

Fig. 1 Coordinate System

となる。

3. 乱流状態での表示；

(1) 連続式

(8)式を時間平均量 U_{pi} , U_{fi} とそれよりの偏差 u_{pi}' , u_{fi}' に分け時間平均する。その際、 w_0 が変動しないとする。(8)式より(10)式を引けば(11)式となる。(11)式は、本研究では固体粒子が流体によく追従する場合を取り扱うことを示している。

$$U_{pi} = U_{fi} - w_0 \delta_{i3} \quad (11)$$

$$u_{pi}' = u_{fi}' \quad (12)$$

連続式は(9)式より次のようになる。

$$\frac{\partial U_{fi}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_3} (C w_0) \quad (13) \quad \frac{\partial u_{fi}'}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_3} (c' w_0) \quad (14)$$

(2) 運動方程式

(9)式、(10)式より

$$\frac{\partial u_{fi}}{\partial t} + \frac{\partial u_{fi} u_{fj}}{\partial x_j} - u_{fi} \frac{\partial c w_0}{\partial x_3} = \frac{g_i}{1-c} - \frac{1}{\rho_f(1-c)} \frac{\partial p_f}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_{fi}}{\partial x_j^2} - \frac{R_{di}}{\rho_f(1-c)} \quad (15)$$

各項を時間平均とそれよりの偏差に分ける。ここで $\frac{1}{1-C-C'} \div \frac{1}{1-C} + \frac{c'}{(1-C)^2}$ とおき、さら

$$\frac{1}{\rho_f(1-C-C')} \frac{\partial p_f}{\partial x_i} \div \frac{1}{\rho_f(1-C)} \frac{\partial (P_f + p_f')}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho_f} \frac{c'}{(1-C)^2} \frac{\partial P_f}{\partial x_i}$$

$$\frac{\bar{R}_{di} + R_{di}'}{\rho_f(1-C-C')} \div \frac{\bar{R}_{di} + R_{di}'}{\rho_f(1-C)} + \frac{c' \bar{R}_{di}}{\rho_f(1-C)^2}$$

とおく。そのとき、(15)式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (U_{fi} + u_{fi}') + \frac{\partial}{\partial x_j} (U_{fj} U_{fi} + U_{fj} u_{fi}' + u_{fj}' U_{fi} + u_{fj}' u_{fi}') - (U_{fi} + u_{fi}') \frac{\partial (C + c') w_0}{\partial x_3} \\ & = \frac{g_i}{1-C} + \frac{c' g_i}{(1-C)^2} - \frac{1}{\rho_f(1-C)} \frac{\partial (P_f + p_f')}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho_f} \frac{c'}{(1-C)^2} \frac{\partial P_f}{\partial x_i} - \frac{\bar{R}_{di} + R_{di}'}{\rho_f(1-C)} - \frac{c' \bar{R}_{di}}{\rho_f(1-C)^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (U_{fi} + u_{fi}') \end{aligned} \quad (16)$$

(16)式の時間平均をとって Reynolds 方程式(17)が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U_{fi}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (U_{fj} U_{fi} + \overline{u_{fj}' u_{fi}'}) - U_{fi} \frac{\partial C w_0}{\partial x_3} - \overline{u_{fi}' \frac{\partial c w_0}{\partial x_3}} \\ & = \frac{g_i}{1-C} - \frac{1}{\rho_f(1-C)} \frac{\partial P_f}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_{fi}}{\partial x_j^2} - \frac{\bar{R}_{di}}{\rho_f(1-C)} \end{aligned} \quad (17)$$

⑭式から⑰式を引いて乱れ速度の関係式⑱が導かれる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u'_{fi}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (U_{fi} u'_{fi} + u'_{fj} U_{fi} + u'_{fi} u'_{fj} - \overline{u'_{fi} u'_{fj}}) - U_{fi} \frac{\partial c' w_0}{\partial x_3} - u'_{fi} \frac{\partial C w_0}{\partial x_3} - u'_{fi} \frac{\partial c' w_0}{\partial x_3} \\ & + \overline{u'_{fi} \frac{\partial c' w_0}{\partial x_3}} = \frac{c' g_i}{(1-C)^2} - \frac{1}{\rho_f (1-C)} \frac{\partial p'_f}{\partial x_i} - \frac{c'}{\rho_f (1-C)^2} \frac{\partial P_f}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u'_{fi}}{\partial x_j^2} \\ & - \frac{R'_{di}}{\rho_f (1-C)} - \frac{c' \bar{R}_{di}}{\rho_f (1-C)^2} \end{aligned} \quad (18)$$

4. 乱れエネルギーの関係式 (k-方程式)

⑱式の両辺に u'_{fi} を乗じて時間平均をとる。⑱式左辺の変形に、連続式⑬, ⑭式を用いれば乱れエネルギーの関係式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\overline{u'^2_{fi}}}{2} + U_{fj} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\overline{u'^2_{fi}}}{2} + \overline{u'_{fi} u'_{fj}} \frac{\partial U_{fi}}{\partial x_j} + u'_{fj} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\overline{u'^2_{fi}}}{2} \\ & = \frac{\overline{c' u'_{fi}}}{(1-C)^2} g_i - \frac{1}{\rho_f (1-C)} \overline{u'_{fi} \frac{\partial p'_f}{\partial x_i}} - \frac{\overline{c' u'_{fi}}}{\rho_f (1-C)^2} \frac{\partial P_f}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \frac{\overline{u'^2_{fi}}}{2} - \nu \frac{\partial u'_{fi}}{\partial x_j} \frac{\partial u'_{fi}}{\partial x_j} \\ & - \frac{\overline{u'_{fi} R'_{di}}}{\rho_f (1-C)} - \frac{\overline{c' u'_{fi} R_{di}}}{\rho_f (1-C)^2} \end{aligned} \quad (19)$$

ここで固相と液相の相互作用に起因する項について若干の考察を行う。(5)式より R_{di} の乱流状態での表示は $R_{di} = \rho_f \frac{18\nu}{d^2} (C+c')(U_{fi} + u'_{fi} - U_{pi} - u'_{pi})$ であり、これより $\overline{R_{di}}, \overline{u'_{fi} R'_{di}}$ が

次のように表せる。

$$\overline{R_{di}} = \rho_f \frac{18\nu}{d^2} (C U_{fi} - C U_{pi} + \overline{c' u'_{fi}} - \overline{c' u'_{pi}})$$

$$\overline{u'_{fi} R'_{di}} = \rho_f \frac{18\nu}{d^2} \left[C (\overline{u'^2_{fi}} - \overline{u'_{fi} u'_{pi}}) + \overline{c' u'_{fi}} (U_{fi} - U_{pi}) - \overline{c' (u'^2_{fi} - u'_{fi} u'_{pi})} \right]$$

前に述べたように、本研究では $u'_{fi} \neq u'_{pi}$ の場合を対象としており、 $\overline{u'^2_{fi}} - \overline{u'_{fi} u'_{pi}} \neq 0$ となる。これが一つの適用限界と考えられ、日野⁵⁾や芦田・道上⁶⁾が行っているように Hinze⁷⁾の方法を用いて考察できる。本研究では後に $\overline{u'_{fi} u'_{pi}}$ について若干の考察を加える。

⑲式より $\overline{R_{di}}, \overline{u'_{fi} R'_{di}}$ は次のようになる。

$$\overline{R_{di}} = \rho_f \frac{18\nu}{d^2} C w_0 \delta_{i3} \quad (20)$$

$$\overline{u'_{fi} R'_{di}} = \rho_f \frac{18\nu}{d^2} \overline{c' u'_{fi}} w_0 \delta_{i3} \quad (21)$$

重力加速度ベクトルの成分は $g_i = -g \cdot \delta_{i3}$ であり、Reynolds 方程式⑴の $i=3$ に関して静水圧分布を仮定すると

$$-\frac{g}{1-C} - \frac{1}{\rho_f (1-C)} \frac{\partial P_f}{\partial x_3} - \frac{\bar{R}_{d3}}{\rho_f (1-C)} = 0 \quad (22)$$

となる。⑲式において $-\frac{1}{\rho_f (1-C)^2} \overline{c' u'_{fi}} \frac{\partial P_f}{\partial x_i} \neq -\frac{1}{\rho_f (1-C)^2} \overline{c' u'_{f3}} \frac{\partial P_f}{\partial x_3}$ と考えられ、この $\frac{\partial P_f}{\partial x_3}$ に

⑳式を適用すれば、⑲式 右辺は次のようになる。

$$\text{⑲式右辺} = -\frac{1}{\rho_f (1-C)} \overline{u'_{fi} \frac{\partial P_f}{\partial x_i}} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \frac{\overline{u'^2_{fi}}}{2} - \nu \frac{\partial u'_{fi}}{\partial x_j} \frac{\partial u'_{fi}}{\partial x_j} - \frac{\overline{u'_{fi} R'_{di}}}{\rho_f (1-C)}$$

通常の k -方程式と同様に $-\left(u'_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{u'^2_{fi}}{2} + \frac{u'_{fi}}{\rho_f(1-C)} \frac{\partial p'_f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{D}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j}\right)$ とおけば k -方程式は

最終的に次のようになる。

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_{ij} \frac{\partial k}{\partial x_j} = -\overline{u'_{fi} u'_{fi}} \frac{\partial U_{fi}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\frac{D}{\sigma_k} + \nu \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) - \varepsilon - \frac{18 \nu}{d^2(1-c)} \overline{u'_{fi} w_0} \quad (23)$$

ストークスの抵抗則を用いているから w_0 は次式で表せる。

$$w_0 = \frac{gd^2}{18 \nu} \cdot \frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_f}$$

5. 固相・液相の相互作用項に関する考察

日野、芦田・道上が行っているように、Hinze の方法を用いて相互作用項について若干の考察を行う。本研究では相互作用項のうち $\overline{u'^2_{fi}} - \overline{u'_{fi} u'_{pi}}$ の表示を示す。Danon・Wolfshtein・Hetsroni⁸⁾ はこの項を考慮した k -方程式を用いて固液混相噴流の解析を行っている。

Hinze が用いた基礎式は次式で示される。(本節の ' は無次元量を示す。)

$$\frac{dv'_p}{dt'} + av'_p = av'_f + b \frac{dv'_f}{dt'} \quad (24)$$

ここに、 $v'_p = v_p d / \nu$, $v'_f = v_f d / \nu$, $t' = t \nu / d^2$ 。また、 a , b は次式で表せる。

$$a = \frac{36}{1+2\rho_p/\rho_f} \quad , \quad b = \frac{3}{1+2\rho_p/\rho_f} \quad (25)$$

一方、本研究で考慮している相互作用は(5)式よりストークスの粘性抵抗のみであり、そのとき(24)式の a , b は次のようになる。

$$a = \frac{18}{\rho_p/\rho_f} \quad , \quad b = 0 \quad (26)$$

まず、(25)式、(26)式

を用いたときの $\overline{v_p^2} / \overline{v_f^2}$ の値が同一となる領域を求める。Hinze によれば $\overline{v_p^2} / \overline{v_f^2}$ は(27)式で示される。

ここに、 $T'_{fl} = T_{fl} \nu / d^2$, T_{fl} は流体粒子の Lagrange 的時間スケール。(25)式を用いた $\overline{v_p^2} / \overline{v_f^2}$ と T'_{fl} の関係を $\frac{\overline{v_p^2}}{\overline{v_f^2}} = \frac{a T'_{fl} + b^2}{a T'_{fl} + 1}$ (27)

$\rho_p / \rho_f = 2.65$ に対して示した。(Fig. 2) これより $T'_{fl} > 1$ で(25)式の結果は(26)式を用いたもので近似できる。

一方、(26)式を用いたとき、 $\overline{v_p v_f} / \overline{v_f^2}$ は(28)式で表せる。(28)式

$$\frac{\overline{v_p v_f}}{\overline{v_f^2}} = \frac{a T'_{fl}}{a T'_{fl} + 1} \quad (28)$$

は Fig. 2 において(26)式を用いた場合と同一であり、 T'_{fl} が 1 ~ 10 より大きくなると $\overline{u'^2_{fi}} - \overline{u'_{fi} u'_{pi}}$ が無視できることを示している。この

限界の T'_{fl} を 1.0 とし、 $T_{fl} = c_\mu \frac{k}{\varepsilon}$ とすれば、 $T'_{fl} > 1.0$ の条件は

$$\sqrt{\frac{c_\mu}{10} \frac{k^2}{\nu \varepsilon}} > \frac{d \sqrt{k}}{\nu} \quad (29)$$

となる。 $k^2 / \nu \varepsilon$, $d \sqrt{k} / \nu$ を各々

turbulent Reynolds 数 Re_τ ,

砂粒乱れ Reynolds 数 Re_d とお

いて $c_\mu = 0.1$ の場合について(29)

式の範囲を示したのが Fig. 3 で

ある。

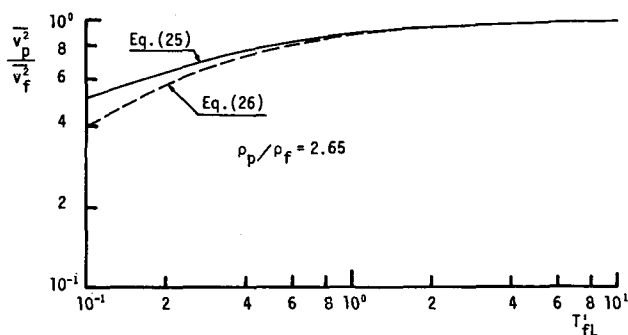


Fig. 2 Relation between $\overline{v_p^2} / \overline{v_f^2}$ and T'_{fl}

6. 乱れエネルギー散逸率の関係式 (ε -方程式)

乱れ速度に関する(2)式を(2)式の仮定を用いて再記すれば

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u'_{fi}}{\partial t} + U_{fj} \frac{\partial u'_{fi}}{\partial x_j} + u'_{ij} \frac{\partial U_{fi}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u'_{fi} u'_{ij} - \overline{u'_{fi} u'_{ij}}) + \overline{u'_{fi} \frac{\partial c' w_0}{\partial x_3}} \\ &= - \frac{1}{\rho_f (1-C)} \frac{\partial}{\partial x_i} p'_f + \nu \frac{\partial^2 u'_{fi}}{\partial x_j^2} - \frac{R_{di}}{\rho_f (1-C)} + \frac{\overline{c' R_{di}}}{\rho_f (1-C)^2} \end{aligned} \quad (30)$$

となる。 ε -方程式は(30)式を x_k で微分し、 $2\nu \partial u'_{fi} / \partial x_k$ を乗じた後に時間平均をとることによって得られる。連続式(4)式を考慮すれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'_{fi}}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u'_{fi} u'_{ij}}{\partial x_k \partial x_j} &= \frac{\partial u'_{fi}}{\partial x_k} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} u'_{fi} \frac{\partial u'_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_j} u'_{ij} \frac{\partial u'_{fi}}{\partial x_k} \right\} \\ &= \frac{\partial u'_{fi}}{\partial x_k} \frac{\partial u'_{fi}}{\partial x_j} \frac{\partial u'_{ij}}{\partial x_k} + u'_{fi} \frac{\partial u'_{fi}}{\partial x_k} \frac{\partial^2 c' w_0}{\partial x_k \partial x_3} + \frac{\partial u'_{fi}}{\partial x_k} \frac{\partial c' w_0}{\partial x_3} \frac{\partial u'_{ij}}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} u'_{ij} \left(\frac{\partial u'_{fi}}{\partial x_k} \right)^2 \end{aligned}$$

となり、ここで $\partial c' w_0 / \partial x_3$ を含む項を無視する。また、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'_{fi}}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{-1}{\rho_f (1-C)} \frac{\partial}{\partial x_i} p'_f \right] &\doteq - \frac{1}{\rho_f (1-C)} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial u'_{fi}}{\partial x_k} \frac{\partial p'_f}{\partial x_k} \right] \\ \frac{\partial u'_{fi}}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{-R_{di}}{\rho_f (1-C)} \right] &\doteq - \frac{1}{(1-C)} \frac{18\nu}{d^2} \frac{\partial u'_{fi}}{\partial x_k} \frac{\partial c'}{\partial x_k} w_0 \delta_{i3} \end{aligned}$$

と近似する。上式を考慮して ε -方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_{fj} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} &= -2\nu \frac{\partial U_{fi}}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u'_{fi}}{\partial x_k} \frac{\partial u'_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_{fk}}{\partial x_i} \frac{\partial u'_{ij}}{\partial x_j} \right) - 2\nu \overline{u'_{ij} \frac{\partial u'_{fi}}{\partial x_k} \frac{\partial^2 U_{fi}}{\partial x_k \partial x_j}} \\ &\quad - 2\nu \frac{\partial u'_{fi}}{\partial x_k} \frac{\partial u'_{fi}}{\partial x_j} \frac{\partial u'_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_{ij} \varepsilon'} - \frac{2\nu}{\rho_f (1-C)} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial u'_{fi}}{\partial x_k} \frac{\partial p'_f}{\partial x_k} \right] \\ &\quad + \nu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_j^2} - 2 \left(\nu \frac{\partial^2 u'_{fi}}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2 - \frac{2\nu}{(1-C)} \frac{18\nu}{d^2} \frac{\partial u'_{fi}}{\partial x_k} \frac{\partial c'}{\partial x_k} w_0 \delta_{i3} \end{aligned} \quad (31)$$

(31)式において c' を含む項を除く他全てを考慮しているのが Jones・Launder モデル⁹⁾である。残った c' を含む項は、濃度変動場の解析に用いられる ε_c -方程式にも現われ⁹⁾一つの例として次のようにおく。

$$-4\lambda \frac{\partial c'}{\partial x_k} \frac{\partial u'_{fi}}{\partial x_k} = c_{\varepsilon c} (-\overline{u'_{fi} c'}) \frac{\varepsilon}{k} \quad (\lambda: \text{分子拡散係数}) \quad (32)$$

$\lambda \doteq \nu$ として(31)式の対応する項を

示すと、

$$\begin{aligned} & - \frac{2\nu}{(1-C)} \frac{18\nu}{d^2} \frac{\partial c'}{\partial x_k} \frac{\partial u'_{fi}}{\partial x_k} w_0 \\ &= \frac{36\nu}{(1-C) d^2} \frac{c_{\varepsilon c}}{4} (-\overline{u'_{fi} c'}) \frac{\varepsilon}{k} w_0 \\ &= \frac{c_{\varepsilon c}}{2} \frac{-\overline{u'_{fi} c'}}{(1-C)} g \frac{\varepsilon}{k} \frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_f} \end{aligned}$$

となる。

上記の結果と Jones・Launder モデルを用いて ε -方程式を示すと次のようになる。

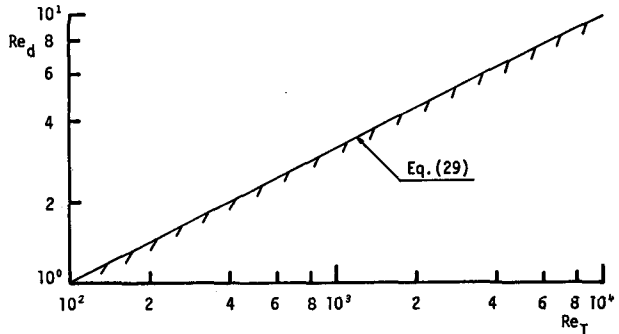


Fig. 3 Relation between Re_d and Re_τ

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_{fj} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = & c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} D \frac{\partial U_{fi}}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_{fi}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{fj}}{\partial x_i} \right) - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + 2\nu D \left(\frac{\partial^2 U_{fi}}{\partial x_j \partial x_i} \right)^2 \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{D}{\sigma_\varepsilon} + \nu \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \frac{c_{\varepsilon 3}}{2} \frac{\overline{u_i' c_i'}}{(1-C)} g \frac{\varepsilon}{k} \frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_f} \end{aligned} \quad (33)$$

$c_{\varepsilon 2}$ は turbulent Reynolds 数 ($Re_T = k^2/\nu\varepsilon$) の関数であり, Re_T 無限大のとき通常 $c_{\varepsilon 2} = 1.92$ が用いられる。 $c_{\varepsilon 3}$ については, 著者らの濃度変動場の解析では 7.0 程度の値となったが, まだ明確な値は定まっていないようである。

7. 結 論: 本研究では, 層流状態での液相の基礎式から, 乱流状態での $k-\varepsilon$ 方程式の誘導過程と用いられている仮定について若干の検討を行ったものである。今後, 路床での境界条件を考慮した本モデルの特性を検討したい。

参 考 文 献

- (1) Celik, I and Rodi, W : Mathematical modeling of suspended sediment transport in open channels, 21st Congress of I. A. H. R., Vol. 3, 1985
- (2) 福嶋祐介 : 開水路浮遊砂流の乱流構造の解析, 第30回水理講演会論文集, 1986
- (3) 岩佐義朗, 細田 尚, 松井健一: 開水路流れにおける濃度変動場の伝播特性, 京大防災研究所年報 第29号 B-2, 1986
- (4) Murray, J. D. : On the mathematics of fluidization, Part 1. Fundamental equations and wave propagation, J. Fluid Mech., Vol. 21, 1965
- (5) 日野幹雄 : 固体粒子を浮遊した流れの乱流構造の変化, 土木学会論文集, 第92号, 1963
- (6) 芦田和男, 道上正規 : 浮遊砂に関する研究(1), 京大防災研究所年報 第13号B, 1970
- (7) Hinze, J. O. : Turbulence, 2nd edn. McGraw-Hill, 1975
- (8) Danon, H., Wolfshtein, M. and Hetsroni, G. : Numerical calculations of two-phase turbulent round jet, Int. J. Multiphase Flow, Vol. 3, 1977
- (9) Jones, W. P. and Launder, B. E. : The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 15, 1972