

Lagrange-Euler混合法による河口密度流の数値解析
Numerical Analysis of a Density Stratified-Fluid at a River Mouth
by the Mixed Lagrangian Eulerian Method

北海道大学工学部 正員 水田 洋

1. はじめに

潮位差の小さな河口部では、河道内に侵入した塩水は流出する淡水とすぐには混合せず、弱混合型の剪断密度流（塩水くさび）を形成することが多い¹⁾。我々の研究室では、1982年から1984年にかけて石狩川の河口より4.4km上流で塩水くさびの観測を行ない、密度界面の高さ（界面高）や塩分濃度などの変動記録を得た²⁾。この地点および上流の数地点と小樽港（河口より33km西）では北海道開発局が水位と潮位を測定しており、これらの記録も参照することができた。その中に、図-1中1982年10月25日の界面高と水位の変動曲線にあるような突起が認められた例があり、原因は、降雨等による淡水流量の増加というよりはむしろ、当時河口付近を通過中の低気圧による河口潮位の上昇（小樽港潮位は・で示す潮位表による値より30cm程度高い）が上流へ伝播したものであろうと推定された。また、潮位変動と強い相関を持ちながら上下していると思われる、界面変動の記録も得られている²⁾。

淡水流量や河口潮位の変動によって河口域に生じた以上のような現象を数値解析で確認する場合、これまでに、水理学的な二層流モデルを用いたり³⁾、二次元的な基礎式を規則格子で差分化する⁴⁾方法などが知られているが、本論文では、流れ場の特徴に応じて格子の変形方法を工夫できるLagrange-Euler混合法⁵⁾を用いて、自由表面と密度界面のふるまいを一緒に調べていく。

2. 数値解析の方法

2-1. 領域の設定と小胞への分割

石狩川では、平常時の流量200～500t/sで、河口より約8km上流の河床上昇部付近まで鮮明な密度界面を保ちながら、塩水が侵入している。数値解析の領域を河口から30km上流までとすれば、上流側では一層、下流側では二層となるので、両領域の接合部と塩水先端部の扱い方に考察を要するが、これにつ

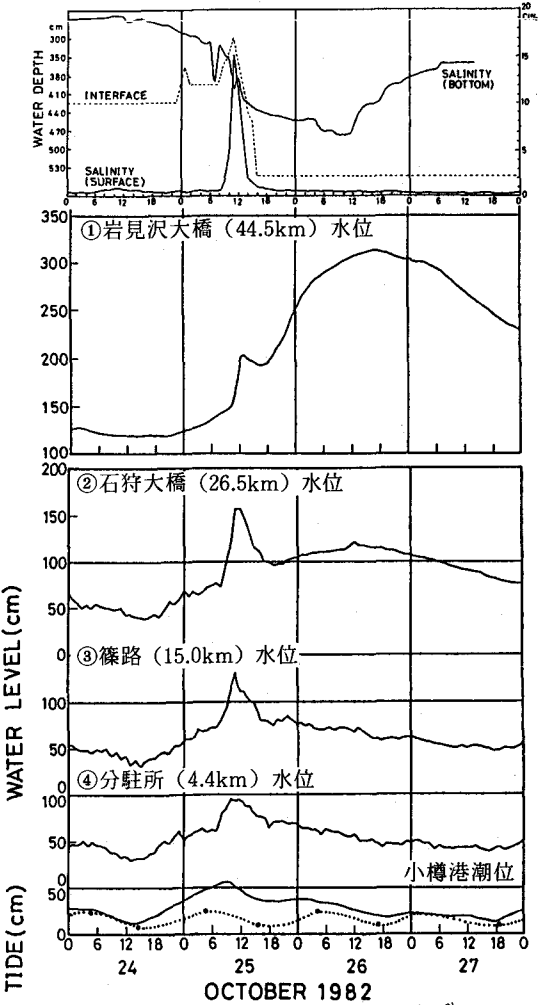


図-1 界面高、塩分、水位、潮位の記録²⁾
(括弧内は河口からの距離)

いては後で述べる。

この区間で、石狩川の河床最深部と標高0mでの川幅は、図-2のように変化している。そこで、同図太線のような河床高と川幅の長方形断面水路でこの区間を置き換え、下流側の下層に塩水（密度1.02g/cm³）を、全区間の上層に淡水を満たした。

図-3のように、自由表面、密度界面、河床の形にあわせて、領域内の流体を一般四角形の細胞に分割

した。鉛直方向には、上層下層とも2段に分けた。水平方向には、まず一層領域と二層領域の接合部で分け、更に各領域を等間隔に分けた。計30区間なので、小胞の水平方向の平均の長さは1 kmとなる。2-4.で述べるように、流体の時間発展を調べる基礎となるのは、これらの小胞における保存則である。

2-2-1. 境界条件

図-3中で番号をつけた境界に対する境界条件を表-1にまとめた。境界条件は、(a)法線速度 v_n と法線応力 (圧力を含む) σ_n のいずれを与えるか、(b)接線速度 v_s と接線応力 σ_s のいずれを与えるか、(c)密度 ρ と密度流束 j のいずれを与えるか、(d)境界は法線方向に移動が可能か不可能か、の組みあわせで表現されている。

(a)については全て体積保存則 (2-5.) が関係する。「滑面」「流入」では v_n が与えられているので、 σ_n を領域内部の圧力と関係づけながら求める。「流出」「自由表面」では σ_n を与えて領域内部の圧力を求め、体積保存則から v_n を決める。 σ_n として「自由表面」では大気圧 p_A を、「流出」では静水圧

$$\sigma_n(P) = p_A + \int_A^P \rho(r) g \cdot dr \equiv p_s \quad (1)$$

(A: 自由表面上の点, ρ : 密度, g : 重力加速度) (ベクトル, dr : 位置の微小変化) を与える。「密度界面」「接合」では v_n と σ_n は共に未知量であるが、これらは境界をはさんで連続ということから条件の過不足は起こらず、領域内部の圧力と共に求められる。

(b)については、「密度界面」「接合」以外の全ての境界で、

$$\sigma_s = \mu \partial v_s / \partial n = 0 \quad (2)$$

(μ : 粘性係数, $\partial / \partial n$: 法線方向微分) を差分化した式を用いて、 σ_s から v_s を求めている。「密度界面」「接合」では、境界の両側に対して共通な v_s を内挿法で決め、(2)式によって σ_s を計算する。

(c)については全ての境界で、

$$j = D \partial \rho / \partial n = 0 \quad (D: \text{拡散係数}) \quad (3)$$

として、 j から ρ を求めている。

(d)については、「滑面」「自由表面」「密度界面」は移動が可能で、境界移動速度と流体速度の法線成分同士が一致している。したがって、境界を横切っ

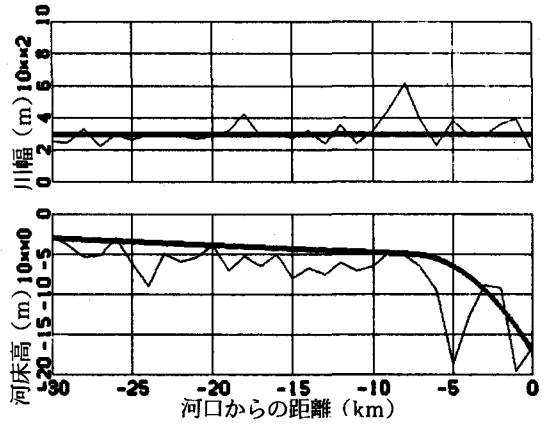


図-2 石狩川の河床高と川幅の変化

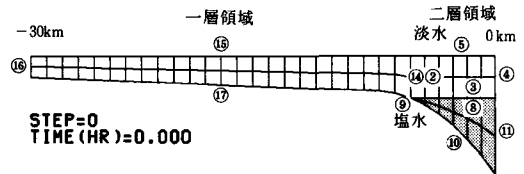


図-3 数値解析領域の分割

表-1 境界条件

境 界	移動	法線成分 速度	法線成分 応力	接線成分 速度	接線成分 応力	密 度	密度 流束
⑩⑪ 滑 面	可	0	?	?	0	?	0
⑬ 流 入	不可	v_{in}	?	?	0	?	0
④⑪ 流 出	不可	?	p_s	?	0	?	0
⑤⑬ 自由表面	不可	?	p_A	?	0	?	0
③⑧ 密度界面	可	?	?	?	?	?	0
②⑭ 接 合	可	?	?	?	?	?	0
⑨ 先 端	可	—	—	—	—	—	—

(?: 未知量, v_{in} : 流入速度, p_s : 静水圧, p_A : 大気圧)

て流体は移動しない。また「流入」「流出」は移動しないのが建て前で、境界を横切って流体が移動する。最後に「接合」は、「先端」の水平方向の位置にあわせて移動するが、「接合」上の流体速度と「先端」の速度の水平成分同士は必ずしも一致していないので、流体は境界を横切る。

「先端」は、「長さが0の境界」とみなしておけば、他の境界と同様に扱えたり、またはこの境界上での操作を省略できる。例えば体積保存則を扱う場合は、2-5.に述べるように、必要な量を他の境界と同じ表式から求められるし、長さが0で流体の出入

がないため、対流流束項、粘性項、拡散項は計算する必要がない。ただし、「先端」に対応する速度と圧力は当然唯一個である。流体速度は隣りの境界上（今の場合⑧⑩）での法線速度成分から定まり、「先端」の移動速度はLagrange的に流体速度に一致していなければならない。

2-2-2. 隅における境界条件

前節の(a)に述べたように、各境界では v_n か u_n のいずれかを与えて他方を求めるが、隅でも、隣りあう境界の組みあわせが変わっても、未知量と条件の個数は一致していることを吟味する必要がある。表-1の境界条件について調べた結果を図-4に示す。 v_n から u_n を求める境界をNV、 u_n から v_n を求める境界をNP、 v_n と u_n が共に未知な境界をNIと記してある。未知量として、隅における圧力を p 、速度の2成分を ϕ と $\ominus$ で表わしてある。また条件を○印で表わすが、 p 、 ϕ 、 $\ominus$ を関係づける体積保存則は何も含まない○印で、未知量に値を与える場合はその量を囲んで、2個の未知量を等置する場合はそれらを囲んで表わした。各々の隅において、未知量と○印の数が一致していればよいわけである。

特に、NP-NPの組である④-⑤の隅、NI-NPの組である③-④、⑪-⑧の隅では、体積保存則と $p = u_n$ だけでは条件が不足する。そこで前者では ϕ として河口潮位の時間変化速度を与え、後者では、 ϕ として界面高の時間変化速度を与えた。

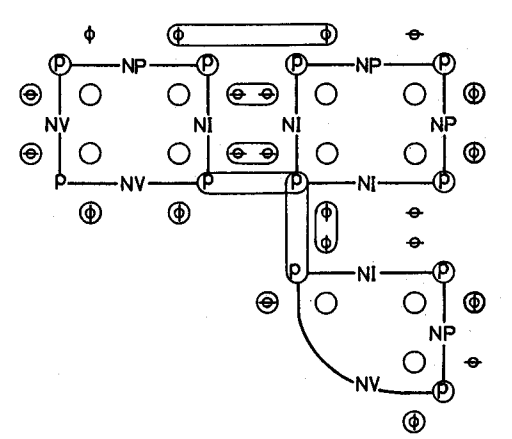


図-4 隅における境界条件

2-3. 格子点の移動方法

各時刻で自由表面と密度界面の形を正確に把握し、擬似粘性や擬似拡散を避けるためには、格子点の移動速度 u をその点での流体速度 v に一致させるLagrange法が最も有効である。しかし、剪断流場では格子が大きく歪んで計算精度が損われる恐れがある。したがって、格子点の移動方法を工夫して、最初に自由表面、密度界面、河床などの境界上にあった格子点を、後の時刻でも必ずこれらの境界上に置くようにしながら、水平方向には指定した速度で動かすことを考える。

時刻 $n\Delta t$ に位置 r^n にあった境界上の流体粒子が、次のステップまでに $r^n + v\Delta t$ へ移動して新しい境界を形作る場合、同じ点上の格子点の移動先 $r^n + u\Delta t$ が新しい境界上にあるための条件は、

$$(u - v) \Delta t \times s = 0 \quad (4)$$

である（図-5参照）。 s は境界の接線ベクトルであるが、 y を鉛直ベクトルとすると、恒等式

$$v = (v_n y - v_x s) / (y \times s) \quad (5)$$

（ v ：法線速度成分、 v_x ：水平速度成分）

が成り立つ、ここで v_x を別の値 U で置き換えた

$$u = (v_n y - U s) / (y \times s) \quad (6)$$

は(4)式を満たしており、これが求める格子点移動速度の表式である。各時刻で一層領域と二層領域がそれぞれ水平方向に等分割されるよう、 $U = 0$ （流入・流出境界移動速度の水平成分）と塩水先端部移動速度の水平成分を各領域で内挿して、 U の値とした。

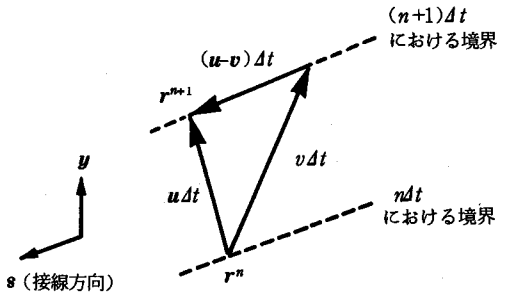


図-5 境界上の格子点移動速度

ところで、上層・下層それぞれを上下に隔てる面上の格子点に対しても、 s をこの面の接線ベクトルとして、(6)式を用いるのがよい。格子点の鉛直方向の動きを流れに乗せることにより、しばしば不安定

性的原因となるこの面に関する対流流束項を、(4)式の左辺と共に0にすることができるからである。

2-4. 基礎式と計算手順

2-1. では数値解析領域内の流体を様々な形の一般四角形の小胞に分割したので、流体の時間発展を調べる基礎式は、各小胞に対する積分型の保存則から導くのがわかりやすい。ある小胞に含まれる体積、質量、運動量をそれぞれ V , M , Mv とする。時刻 ndt におけるこれらの量を用いて時刻 $(n+1)dt$ における量を求める式は、流体速度 v と小胞表面の移動速度 u との差から対流流束項 ((7)(8)(10)式の右辺第2項) が生ずることを考慮すれば、

$$\begin{cases} V^{n+1} = V^n + \left[\oint dS \cdot (u - v) \right]^{(n)} dt, \\ \rightarrow \left[\oint dS \cdot v \right]^{(n)} = 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$M^{n+1} = M^n + \left[\left[\oint dS \cdot (u - v) \rho \right]^{(n)} + (\text{拡散項})^n \right] dt, \quad (8)$$

$$\left\{ (Mv)^{(n)} = (Mv)^n + \left[- \left[\oint dS p \right]^n + (\text{重力項})^n \right] \right\} dt, \quad (9)$$

$$\begin{cases} (Mv)^{n+1} = (Mv)^{(n)} + \left[\left[\oint dS \cdot (u - v) \rho v \right]^{(n)} \right. \\ \left. + (\text{粘性項})^n \right] dt \end{cases} \quad (10)$$

となる。ここで ρ , p は流体密度と圧力、 $\oint dS$ は小胞表面にわたる積分を表わす、また (n) は、(9)式から求める $v^{(n)}$ を用いて計算することを示す。更に、これらに新しい小胞表面の位置を定める式

$$r^{n+1} = r^n + u^{(n)} dt \quad (11)$$

をつけ加える。ステップを1つ進めるための手順を、求めるべき量を並べることで示せば次のようになる (括弧内は参照すべき式または節の番号)。

(a) V^n , M^n , $(Mv)^n$, r^n , (既知)

(b) $\langle Mv \rangle^n \equiv (Mv)^n + (\text{重力項}) dt$, ((9)式)

$$\langle v \rangle^n \equiv \langle Mv \rangle^n / M^n, \quad \rho^n \equiv M^n / V^n,$$

(c) $p^n \leftarrow$ 体積保存則, ((7)'式, 2-5.節)

(d) $(Mv)^{(n)} \equiv \langle Mv \rangle^n + (\text{圧力項}) dt$, ((9)式)

$$(v)^{(n)} \equiv (Mv)^{(n)} / M^n,$$

(e) $u^{(n)} \leftarrow v^{(n)}$, (2-3.節)

(f) V^{n+1} , M^{n+1} , $(Mv)^{n+1}$, ((7)(8)(10)式)

(g) r^{n+1} , ((11)式)

計算を進めるためには、対流流束項、圧力項、粘性項、拡散項を、注目する小胞表面の周囲の点上にある ρ , p , v , u とこれらの点の座標で表わしておくことが必要であるが、それについては前報⁵⁾に述べたので、ここでは繰り返さない。

2-5. 体積保存則

(7)'は流体の非圧縮性を仮定する式であるが、この式を、図-6に破線で示すような、(a)領域内、(b)境界上、(c)隅にある格子点5を取り囲む領域に適用して、小胞の中心と境界辺の中央に配置した流量ベクトル $q \equiv bv$ (b : 厚み) や、格子点に配置した圧力 p 同士を関係づける式を導く。

(a)(b)(c)についての体積保存則は、点A~Dにおける $q^{(n)}$ または $v^{(n)}$ で、次のように表わされる。

$$0 = \left[\oint dS \cdot v \right]^{(n)} = \left[\oint bv \times dr \right]^{(n)}$$

$$\begin{cases} \text{(a):} & \frac{1}{2} \left[\begin{matrix} q_A \times r_{DB} + q_D \times r_{CA} \\ + q_B \times r_{AC} + q_C \times r_{BD} \end{matrix} \right]^{(n)} \equiv Q_R, \quad (12) \\ \text{(b):} & (v_n S)_s + \frac{1}{2} \left[\begin{matrix} -(q_s \Delta n)_A + q_D \times r_{CA} \\ + (q_s \Delta n)_B + q_C \times r_{BD} \end{matrix} \right]^{(n)} \equiv Q_B, \quad (13) \\ \text{(c):} & \left[\begin{matrix} (v_n S)_s^{(1)} \\ + (v_n S)_s^{(2)} \end{matrix} \right] + \frac{1}{2} \left[\begin{matrix} -(q_s \Delta n)_D \\ + (q_s \Delta n)_B + q_C \times r_{BD} \end{matrix} \right]^{(n)} \equiv Q_C, \quad (14) \end{cases}$$

ただし、 $q \times r$ は $(q \times r) \cdot z$ の意味、(b)の S_s は境界上のAB間の面積、(c)の $S_s^{(1)}$, $S_s^{(2)}$ はDA, AB間の面積を表わす。また例えば点Aが境界上にあって、この点における位置を r_A 、接線ベクトルを s_A とすれば、 $r_{AC} \equiv r_C - r_A$, $\Delta n_A \equiv s_A \times r_{AD}$, $(q_s)_A \equiv s_A \cdot q_A$ であ

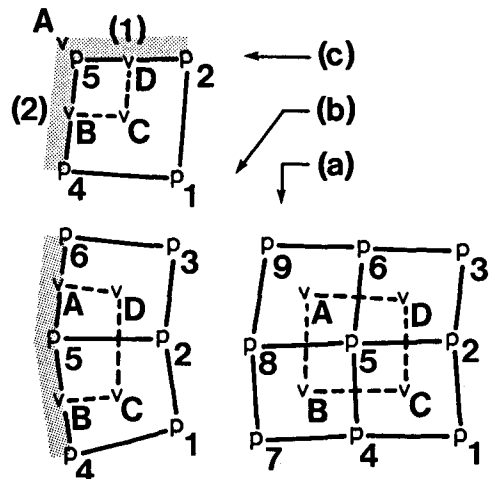


図-6 体積保存則の適用領域 (破線領域)
(a) 領域内, (b) 境界上, (c) 隅

る。ここで各々の $q^{(m)}$ が、(9)式の圧力項を通じて、その周囲の格子点上の圧力を含んでいることを考慮する。例えば、 $q^{(m)}$ は $p_5^n, p_4^n, p_1^n, p_2^n$ を含む。また(b)の境界の種類が、2-2-1の(b)で述べた q_s を与えて v_s を求めるものである場合、 $(q_s)^{(m)}_B$ は $q^{(m)}$ に依存するから、やはり $p_5^n, p_4^n, p_1^n, p_2^n$ を含んでいる。これらのことから、(12)(13)(14)式は次の形に書き直される。

$$(a): 0 = Q_R = - \left[\begin{array}{l} A^{(9)}p_9 + A^{(6)}p_6 + A^{(3)}p_3 \\ + A^{(8)}p_8 + A^{(5)}p_5 + A^{(2)}p_2 \\ + A^{(7)}p_7 + A^{(4)}p_4 + A^{(1)}p_1 \end{array} \right]^n + a^{(0)}, \quad (15)$$

$$(b): 0 = Q_B = (v_n S)_s - \left[\begin{array}{l} A^{(6)}p_6 + A^{(9)}p_3 \\ + A^{(5)}p_5 + A^{(2)}p_2 \\ + A^{(4)}p_4 + A^{(1)}p_1 \end{array} \right]^n + a^{(0)}, \quad (16)$$

$$(c): 0 = Q_C = \left[\begin{array}{l} (v_n S)_{v,0}^{(1)} \\ + (v_n S)_{v,0}^{(2)} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{l} A^{(5)}p_5 + A^{(2)}p_2 \\ + A^{(4)}p_4 + A^{(1)}p_1 \end{array} \right]^n + a^{(0)}, \quad (17)$$

(15)(16)(17)式の役割について考える。(15)式は p_{1-9} の間の関係式であるが、関係式の個数は未知量 p の個数と一致するので、これらの関係式を連立させれば、全ての p が求まる。次に、(16)式は、格子点5における法線速度成分 $(u_n)_s$ と p_{1-6} の関係を与え、2-2-2で定義したNV境界では(15)式と連立させて境界上の圧力を求めるための式、NP境界では $(u_n)_s$ を求めるための式、NI境界では(15)式と連立させて共に未知な $(u_n)_s$ と p_{1-6} を求めるための式として用いる。最後に(17)式は、2-2-2で述べたように、隅における圧力 p_s と流体速度の2成分 $(u_n)_s^{(1)}$ と $(u_n)_s^{(2)}$ に限らない)を関係づけるために用いられる。

「長さが0の境界」として扱われる塩水先端部には複数の格子点と、何の変更もしなければ、複数の圧力が集まり、先端部に対応する圧力は唯一個であ

ることと矛盾する。これを避けるには、図-7に示すように、先端部における複数の体積保存則適用のための破線領域をまとめて、1つにしてしまえばよい。このことを式で表わすと、

$$0 = Q_{C,0} + \sum_{i=1}^N Q_{B,i} + Q_{C,N+1} \quad (18)$$

となる。ここで $Q_{B,i}$ は、図-7(a)の i 番目の破線領域に(13)または(16)式を適用したもので、(16)式で $(u_n)_s$ は0と置き、 $p_{2,3}$ は各々 $p_{-1,i}$ に、 $p_{4,5,6}$ は p_i に対応させる。また $Q_{C,0}$ と $Q_{C,N+1}$ は、同図の0番目と $(N+1)$ 番目の領域に(17)式を適用して同様の置き換えを行なったものである。結局(18)式からは、

$$0 = \left[\begin{array}{l} (u_n S)_{v,N+1}^{(1)} \\ + (u_n S)_{v,0}^{(2)} \end{array} \right] - \left[A^{(1)}p_v + \sum_{i=0}^{N+1} A^{(i)}p_i \right]^n + a^{(0)} \quad (19)$$

という、2個の法線速度成分と $(N+3)$ 個の圧力の間の関係式が得られる。(15)(16)(17)(19)式を連立させて圧力や法線速度成分を求めるため、ここではEVP (error vector processing) 法⁽⁶⁾を用いた。

3 数値解析の結果

以上のような方法で、図-1に掲げた現象の模擬実験を行なった例を図-8と図-9に示す。時間刻み幅は、 $\Delta t = 60$ 秒である。図-8は、2-1に述べた領域の下流界面の高さは変えないで、下流表面の高さだけを左列最下段のように時間変化させた時、それより上流の各断面で自由表面(左列)と密度界面(右列)の高さがどのように時間変化するかを示したものである。左端の番号に対応する断面の位置は、図-9に記してある。また右列最上段は、塩水先端部の水平位置の時間変化である。

下流表面に加えられた変動が、振幅を徐々に増しながら、自由表面上を上流へ伝播していく様子がわかる。最上流断面での振幅は、最下流での約1.5倍で、これは図-1の測定結果と同じ程度である。また、変動は密度界面上をも上流へ伝播するが、変動の振幅は上流程大きく、塩水先端部近くでは数倍程にもなる。

図-9は、各時刻での流れ場の様子を、格子の形と小胞中に記された流体速度ベクトルで表わしたものである。自由表面の変動はこの図ではほとんど認め難いが、密度界面の形と塩水先端部の位置が時間と共に変化する様子は見ることができる。淡水と塩水は、各層とも上下二段に分けられているが、長波現

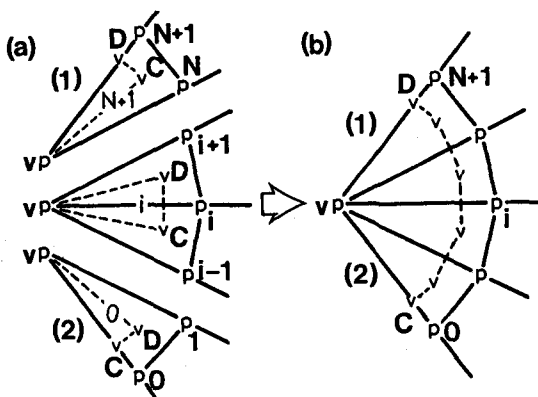


図-7 塩水先端部における体積保存則の変更
(a) 変更前, (b) 変更後

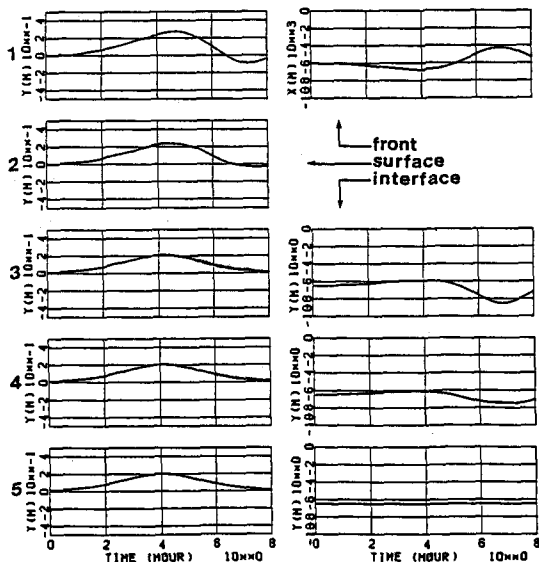


図-8 数値解析による自由表面（左列）と密度界面（右列）の変動（右列最上段は塩水先端部の水平位置）

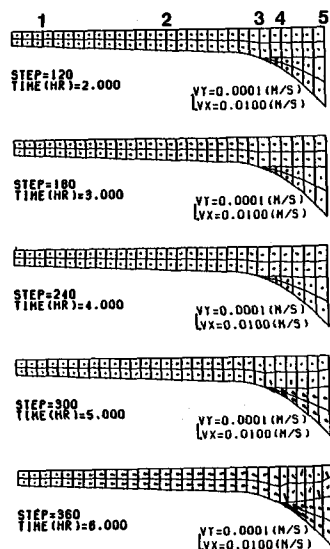


図-9 数値解析による流れ場

象であることを反映して、同層上下の小胞内の流体速度ベクトル同士は、大きさ方向とも互いに似たものになっている。

4. お わ り に

変形可能で規則的ではない一般四角形の胞に流体を分割し、胞の変形方法を工夫することにより、それ程細かくない格子でも、変化する河床、自由表面と密度界面、一層領域と二層領域、塩水先端部を含んだ河口水利現象の数値解析が可能であることを、解析例と共に示した。この例では、自由表面と密度界面は図-1の現象と同様な変動をしているが、実際の状況により近い数値解析を行うためには、上流からの淡水流量の変動と地形（河床高と川幅）の変化を取りこみ、更に界面抵抗（現在は(2)式で $\mu = 1 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{s} / \text{m}^2$ としている）や河口条件（現在は下流端まで一定幅）について考察を加える必要がある。今後、以上の点に改良を加えながら、河口水利現象の非定常解析を進めていく。

本論文の執筆にあたり、北海道大学工学部理学第一講座の方々からは有益な助言をいただきました。特に、八鍬 功教授と大谷守正助手からは、図-1の転載の快諾をいただきました。また数値解析には、北海道大学大型計算機センターのM680Hを使用し

ました。以上記して謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 福島久雄, 柏村正和, 八鍬 功, 高橋 将: 石狩川河口の研究, 第11回海岸工学講演会講演集, p.137 (1964).
- 2) Yakuwa, I. and Ohtani, M: A Salt Wedge at the Estuary of the Ishikari River in Hokkaido, 北海道大学工学部研究報告第130号, p.1 (1986).
- 3) 須賀堯三: 一次元二層不定流の数値計算, 第24回海岸工学講演会論文集, p.544 (1977).
- 4) Festa, J.F. and Hansen, D.V.: A Two-Dimensional Numerical Model of Estuarine Circulation: The Effects of Altering Depth and River Discharge, Estuarine Coast. Mar. Sci., 4, p.309 (1976).
- 5) 水田 洋: Lagrange-Euler混合法による自由表面及び密度界面の数値解析, 第29回水利講演会論文集, p.721 (1985).
- 6) Roache, P.J.: Computational Fluid Dynamics, Hermosa Pub. Inc., 1976 (コンピュータによる流体力学(上)(下), 高橋 亮一他訳, 構造計画研究所, 東京, 1978, p.191).