

乱流モデルによる表層密度噴流の解析

The Numerical Computation of Turbulent Flows Under Gravitational Influence

神戸大学工学部 正会員 松梨順三郎

姫路市役所 正会員 岡田 俊文

神戸大学大学院 学生員 黒林 寛治

1. はじめに

原子力および火力発電所等の大容量化によって冷却用水量は増大し、放流水域の水温上昇に関連して、熱汚染など種々の環境問題が発生している。温排水予測に関する従来の多くの研究は流速や温度等の分布形に相似性を導入している。一方、温排水の拡散現象は上層と下層の混合過程であり、放流口付近での連行加入、また離れた領域での物理量の上下の交換過程などを正確に評価することが要請される。分布特性に相似性を仮定すると、各物理量の交換過程を正確に表現することは一般に困難と考えられる。本研究では温水放流現象として二次元表面密度噴流に注目し、温排水乱流モデルを用いて現象のシミュレーションを実施すること、および、水理模型実験を実施して計算結果の妥当性を検討することを目標としている。

2. 基礎方程式

図-1のように座標系を設定する。温排水に関する基礎方程式は、質量、運動量およびエネルギー保存の式であり、それぞれ次のように与えられる。

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial U_i U_k}{\partial x_k} = -\frac{\alpha g_i}{T_a} (\bar{T} - T_a) - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \overline{u_i u_k} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial U_k \bar{T}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(K \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} - \overline{u_k \tau} \right) \quad (3)$$

ここに、 $i = 1, 2, 3$ 、 U_i は平均流速、 u_i は変動流速、 $g_1 = g_2 = 0$ 、 $g_3 = -g$ 、 g は重力加速度、 $\bar{T}$ は平均温度、 τ は変動温度、 ν は動粘性係数、 K は熱拡散係数、 $\alpha = -T_a (\rho - \rho_a) / \rho_a (\bar{T} - T_a)$ は無次元体積膨張係数、 T_a は環境温度、 ρ_a は環境密度、 Φ は Φ の平均で、 $\Phi = P^* / \rho_a$ 、 $P^* = P - P_s$ 、 P は圧力、 $P_s = \rho_a g_3 x_3 + \text{const}$ は完全な静水場の水圧である。なお、Boussinesq 近似を適用した。

これらの式はいわゆるレイノルズ方程式系であるが、レイノルズ応力 ($-\overline{u_i u_k}$) および乱流熱フラックス ($-\overline{u_k \tau}$) が追加されており、閉じた方程式系を構成していない。これらの量に関し、Launder⁽¹⁾ は近似的に平衡状態にあるせん断乱流の温度成層場を想定し、次の関係式を得ている。

$$-\overline{u_1^2} = -k (0.94 + 0.41 \frac{Rf}{1 - Rf}) = L_{x1} \quad (4)$$

$$-\overline{u_1 u_3} = \beta \frac{k}{\epsilon} \overline{u_3^2} \frac{\partial U_1}{\partial x_3} = \nu_t \frac{\partial U_1}{\partial x_3} \quad (5)$$

$$-\overline{u_3^2} = -k (0.53 - 0.41 \frac{Rf}{1 - Rf}) = L_{x3} \quad (6)$$

$$-\overline{u_1 \tau} = \phi_T (1.0 + \frac{\gamma}{2\beta}) \overline{u_1 u_3} \frac{k}{\epsilon} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_3} = D_{x1} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_3} \quad (7)$$

$$-\overline{u_3 \tau} = \gamma \frac{k}{\epsilon} \overline{u_3^2} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_3} = D_{x3} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_3} \quad (8)$$

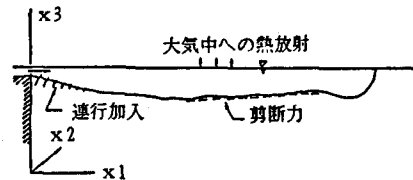


図-1 表面放流排水と座標系

ここに、 Rf はフラックス・リチャードソン数で、 β および γ はともに次のように定義されている。

$$Rf = \frac{\overline{u_3 \tau} \frac{\alpha g}{T}}{\overline{u_1 u_3} \frac{\partial U_1}{\partial x_3}} = \frac{\alpha g}{\sigma_t T} \frac{(\frac{\partial T}{\partial x_3})}{(\frac{\partial U_1}{\partial x_3})^2} \quad (9)$$

$$\beta = \phi \left\{ 1 + \phi \phi_T \left(1 + \frac{1}{2\sigma_t} \right) B \right\}^{-1} \quad (10)$$

$$\gamma = \phi_T \left(1 + 0.8 \phi_T B \right)^{-1} = \phi_T \frac{1.59 - 5.22 Rf}{1.59 - 2.82 Rf} \quad (11), (12)$$

なお、 σ_t および B は、

$$\sigma_t = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\phi}{\phi_T} \frac{1 + \phi_T (0.8 - 0.5 \phi_T) B}{1 + \phi \phi_T B} \quad (13)$$

$$B = \frac{\alpha g}{T} \left(\frac{k}{\epsilon} \right)^2 \frac{\partial T}{\partial x_3} \quad (14)$$

であり、 $C_1 = 2.0$ 、 $C_2 = 0.6$ 、 $C_{1T} = 3.2$ 、 $C_{2T} = 0.5$ 、 $\phi = (1 - C_2) / C_1$ 、 $\phi_T = 1 / C_{1T}$ 、 $\phi_T' = (1 - C_{2T}) / C_{1T}$ で、 k は乱流エネルギー、 ϵ は乱流エネルギーの消散率を表す。

Gibson・Launder⁽²⁾、松井・岩佐・細田⁽⁵⁾らの研究と同様に、一様な平衡流におけるレイノルズ応力および乱流熱フラックスに関する上記の関数表現が、そのまま同じ関数形で本研究の対象としている表面密度噴流に適用できると仮定する。式(4)、(5)、(6)、(7)および(8)の右辺は本研究における L_{x1} 、 ν_t 、 L_{x3} 、 D_{x1} および D_{x3} の定義である。

3. $k-\epsilon$ 乱流モデルの構成

図-2は本研究の解析対象としている二次元表面密度噴流の場を示す。境界B1～B6で囲まれた初期温度(環境温度) T_a の水域へ、境界B1より温度 $T_0 (> T_a)$ の温水が連続的に流入し、境界B5より流出するとする。この場合の基礎方程式は、式(1)、(2)、(3)において、 $i = 1, 3$ とおくことにより次のように与えられる。

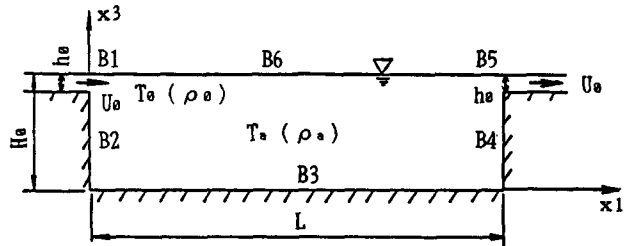


図-2 表面密度噴流(二次元)

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial U_1^2}{\partial x_1} + \frac{\partial U_1 U_3}{\partial x_3} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \nu \nabla^2 U_1 + \frac{\partial}{\partial x_1} (L_{x1}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\nu_t \frac{\partial U_1}{\partial x_3}) \quad (16)$$

$$\frac{\partial U_3}{\partial t} + \frac{\partial U_1 U_3}{\partial x_1} + \frac{\partial U_3^2}{\partial x_3} = \frac{\alpha g}{T_a} (T - T_a) - \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + \nu \nabla^2 U_3 + \frac{\partial}{\partial x_1} (\nu_t \frac{\partial U_1}{\partial x_3}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (L_{x3}) \quad (17)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial U_1 T}{\partial x_1} + \frac{\partial U_3 T}{\partial x_3} = K \nabla^2 T + \frac{\partial}{\partial x_1} (D_{x1} \frac{\partial T}{\partial x_3}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (D_{x3} \frac{\partial T}{\partial x_3}) \quad (18)$$

また、 k 、 ϵ の保存式については、Gibson・Launderによると次式で与えられる。

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial U_1 k}{\partial x_1} + \frac{\partial U_3 k}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_3} (\nu_t \frac{\partial k}{\partial x_3}) + \nu_t (\frac{\partial U_1}{\partial x_3})^2 (1 - Rf) - \epsilon \quad (19)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial U_1 \epsilon}{\partial x_1} + \frac{\partial U_3 \epsilon}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_3} (\frac{\nu_t}{\sigma \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_3}) + C_{\epsilon 1} \nu_t \frac{\epsilon}{k} (\frac{\partial U_1}{\partial x_3})^2 - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (20)$$

式(19)～(20)中の定数は、Launder・Rodi⁽³⁾によると次式で与えられる。

$$\sigma_k = 1.0, \sigma_\epsilon = 1.3, C_{\epsilon 1} = 1.44, C_{\epsilon 2} = 1.92 \quad (21)$$

式(15)～(20)の6個の方程式が U_1 、 U_3 、 Φ 、 T 、 k 、 ϵ に関して閉じた系を構成するためには、式(4)～(8)に含まれるパラメーター Lx_1 、 Lx_2 、 ν_t 、 Dx_1 、 Dx_3 が既知量であることが必要である。これらの量は Rf 、 k 、 ϵ 、 r 、 β などを含んでいる。 k と ϵ は既知時間レベルの量を用いるとして、式(10)によると β は B と σ_t の関数であり、式(11)によると r は B のみの関数で、式(13)によると σ_t は B の関数である。したがって β と r はともに B の関数となる。一方、式(11)より B を逆算し、その r に式(12)を代入すると、

$$B = \frac{3.0 Rf}{\phi_r (1.59 - 5.22 Rf)} \quad (22)$$

となる。したがって、 Rf か B のいずれか一つを既知時間レベルで評価する必要がある。しかし、式(9)、(14)によると、 Rf を先に評価するには $\partial T / \partial x_3$ と $\partial U_1 / \partial x_3$ を、 B を先にすると

$\partial T / \partial x_3$ を計算する必要がある。したがって、計算は不安定になりやすい。本研究では、図-3のアルゴリズムを用いた。一方、式(8)において、表面温水噴流のような場合は一般に $\overline{u_3 \tau} < 0$ 、 $\partial T / \partial x_3 > 0$ であり、 k 、 ϵ 、 $\overline{u_3^2}$ はいずれも正であるから r もまた正值となる。式(12)で $r \geq 0$ の条件を求めると、 $Rf \leq 0.305$ となる。図-3ではこの制約を考慮した。なお、図-3において、式(14)による B 値と式(11)*による B 値は等しいはずであるが、計算上から若干の誤差を伴う。しかし、それは概して微小であるので、これを無視し、以後の計算は式(11)*による B 値を用いることにした。

4. 境界条件と初期条件

境界条件を表-1に示す。 k 、 ϵ の壁面条件として、いわゆる壁法則を採用した。すなわち、壁面からの無次元距離 $l^* = U_{\tau 1} / \nu$ が30以上に対して、壁面における k 、 ϵ を、

$$k = C \mu^{-1/2} U \tau^2, \quad \epsilon = U \tau^3 / (k^* l) \quad (23), (24)$$

によって与えた。ここに、 $C \mu = 0.09$ 、 $k^* = 0.4$ 、 $U \tau$ は摩擦速度、 l は壁面からの距離とする。なお、表-2は表-1に関連する定数を示す。表中 $Fr_d = U_0 / ((\rho_a - \rho_0) g h_0 / \rho_a)$ 、 $Re = U_0 \cdot h_0 / \nu$ はそれぞれ内部フルード数およびレイノルズ数を示す。

次に、初期条件を次のように設定した。

$$U_1 = U_3 = 0, \quad \Phi = 0, \quad T = T_a, \quad k = \epsilon = 0, \quad Rf = 0 \\ Lx_1 = Lx_3 = 0, \quad \nu_t = 0, \quad Dx_1 = Dx_3 = 0 \quad (25)$$

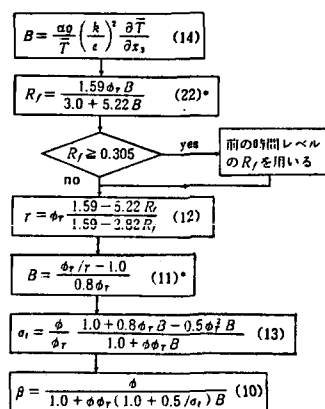


図-3 パラメーターの計算フロー
(括弧内は式番号)
〔(a)* はa式の逆算を表す〕

表-1 境界条件

B1	$U_1 = U_0, U_3 = 0, \bar{\Phi} = 0, \bar{T} = T_0, k = k_{in}, \epsilon = \epsilon_{in}$
B2	$U_1 = 0, U_3 = 0, \bar{\Phi} = 0, \bar{T}_{in} = \bar{T}_{in}, k = (23) \text{式}, \epsilon = (24) \text{式}$
B3	$U_1 = 0, \bar{U}_3 = 0, \bar{\Phi} = 0, \bar{T}_{in} = \bar{T}_{in}, k = (23) \text{式}, \epsilon = (24) \text{式}$
B4	$U_1 = 0, U_3 = 0, \bar{T}_{in} = \bar{T}_{in}, k = (23) \text{式}, \epsilon = (24) \text{式}$
B5	$U_1 = U_0, U_3 = 0, \left(\frac{\partial T}{\partial x_1} \right)^{***} = \left(\frac{\partial T}{\partial x_1} \right)^*, \left(\frac{\partial k}{\partial x_1} \right)^{***} = \left(\frac{\partial k}{\partial x_1} \right)^*, \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial x_1} \right)^{***} = \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial x_1} \right)^*$
B6	$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} = 0, U_3 = 0, \bar{T}_{in} = \bar{T}_{in}, k = 0, \epsilon = 0$

表-2 定数表

h_0	2.0 cm
H_0	14.0 cm
L	50.0 cm
T_0	30.0 °C
T_a	10.0 °C
U_0	9.60 cm/s
ν	$0.897 \times 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{s}$
K	$0.145 \times 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{s}$
α	0.0015
k_{in}	$0.124 \text{ cm}^2/\text{s}^2$
ϵ_{in}	$0.014 \text{ cm}^2/\text{s}^2$
Fr_d	3.41
Re	2388

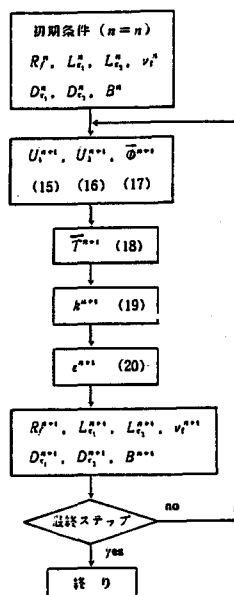


図-4 計算フロー
(括弧内は式番号)

5. 数値計算

数値計算の手法として差分法を用い、対流項にはドナーセル法を用いて完全陰解法⁽⁴⁾を採用した。 x_1 および x_3 方向への分割数はそれぞれ24および15の等分割とし、総節点数360、下流壁面近傍で一部不等分割とした。図-4は計算アルゴリズムを示す。初期条件式(25)によって Rf^n , Lx^n , $\dots$, B^n を決定する。この場合、初期の段階では D_{x1}^n , D_{x3}^n の評価は不能である。したがって、仮に、これらには熱拡散係数 K と同じ値を与えた。これらのパラメーターが既知となり、 U_1^n , U_3^n , Φ^n , T^n , k^n , e^n などが与えられると、式(15)、(16)、(17)の差分式によって、まず U_1^{n+1} , U_3^{n+1} , Φ^{n+1} が計算される。その結果を用いて式(18)の差分式より T^{n+1} 、式(19)の差分式より k^{n+1} 、さらに式(20)の差分式より e^{n+1} が求められる。以上によって $(n+1)$ レベルの未知量がわかると、これらを用い、図-3の計算フローを用いて、 Rf^{n+1} , Lx_1^{n+1} , $\dots$, B^{n+1} を計算し、時間レベル $(n+2)$ の計算に進む。時間ステップ $\Delta t = 1.0$ 秒とした。

6. 結果と考察

図-5は流速ベクトル、図-6は温度分布をしめす。図-5によると、 $t = 10$ 秒では $X_1 = 15$ cmの断面近傍で大きな渦が形成されている。この渦は時間の経過とともに下流に移動している。 $(t = 20$ 秒、 30 秒)しかし、 $t = 30$ 秒以後は下流部の鉛直壁の影響をうけ、流出部の直下に位置して安定な様相を示している。この状態で、壁に沿う

鉛直下方への流れが発生し、この流れによって温水は水底近傍を逆流し、温水が水槽全域に拡がっていく。流況に関していえば、 $t = 210$ 秒の時点ではほぼ定常な状態に到達しているようである。図-6の温度分布について、上述の流況図に沿った熱量の輸送がみられる。 $t = 10 \sim 50$ 秒では熱量の鉛直下方への輸送は微弱である。 $t = 50$ 秒で温水は流出部に達し、それ以後、温水の一部は鉛直壁に沿って下方へ流れ、さらに底面に沿って逆流している。この流れにより熱量は水域全体に輸送され、水槽全体が一般的な温度に近づいていくようである。

比較のために体積膨張係数 $\alpha = 0$ とし、浮力の影響のない場合の計算を行った。図-7と8は、この場合の流速ベクトルおよび温度分布である。図-5と7を比較して、その大きな相違は下流部鉛直壁付近の流況であ

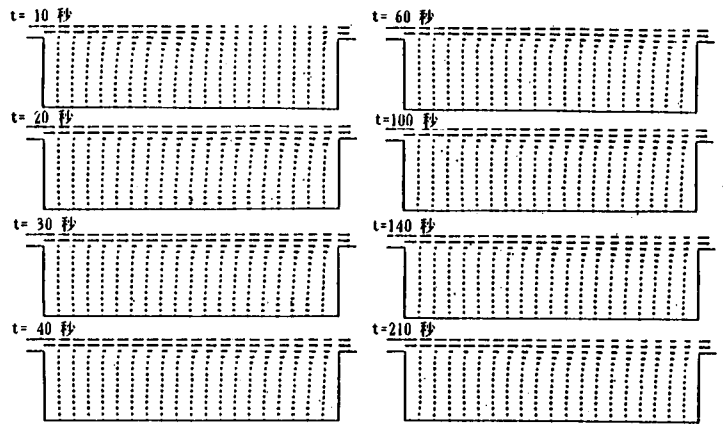


図-5 流速ベクトル図

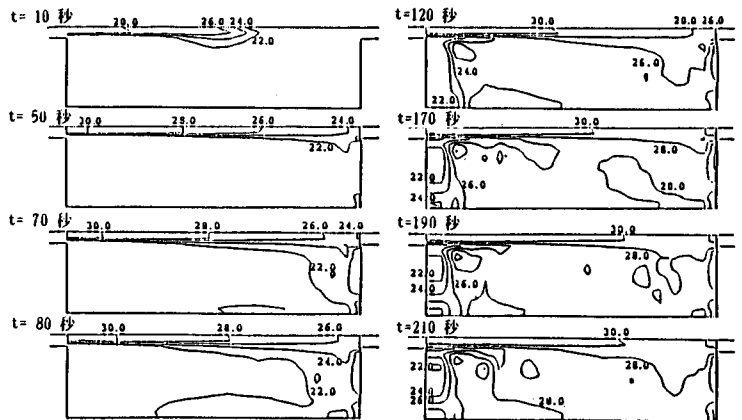


図-6 温度分布図(図中単位℃)

る。図-7ではその付近の流れは非常に微弱であるが、図-5では壁面に沿ってかなり大きい流れが発生している。これは流況図にあらわれた浮力の効果と考えられる。次に、図-6と8を比較して、 $\alpha=0$ の場合、上述のように鉛直下方への流れがないにもかかわらず、温度上昇が全域的に速い。これは、温水が流入してただちに、下方への熱輸送が発生するためである。これに対して、 $\alpha \neq 0$ の場合には、下流壁面による逆流によって水域全体に熱量が輸送されており、両者間で熱輸送の過程に大きな相違を示している。これは、浮力の影響により、その存在する場合は鉛直方向の混合が制約されることによると考えられる。

7. 実験結果とその考察

表-1と2の条件に一致するように水槽模型を作り、水理模型実験を実施した。図-9は温度測定点の配置を示す。温度測定はサーミスタ・デジタル温度計を用いた。図-10は各測点における温度の計算値と実験値との比較を示す。各水平断面（各4測点）のうち水面に近い三つの断面の各測点では、計算値は実験値とほぼ一致している。水面に近いほどよい一致を示すようである。しかし、水底付近、特に上流部付近での相違が大き

く、実験値は計算値に比べてかなり小さい。すなわち、この付近での温度上昇は計算値よりもかなり緩慢に進むことがわかる。したがって、流入温水が下流の壁面に到達し、熱量が水面付近から下方へ輸送されていく過程はかなりよく再現されているが、その後、温水の一部は下流壁に沿って潜り込み、逆流を形成して、上流への二次的な熱量輸送が発生すると考えられるが、計算ではこの傾向が異常に急速であり、計算によって、この現象は再現されていないと考えられる。

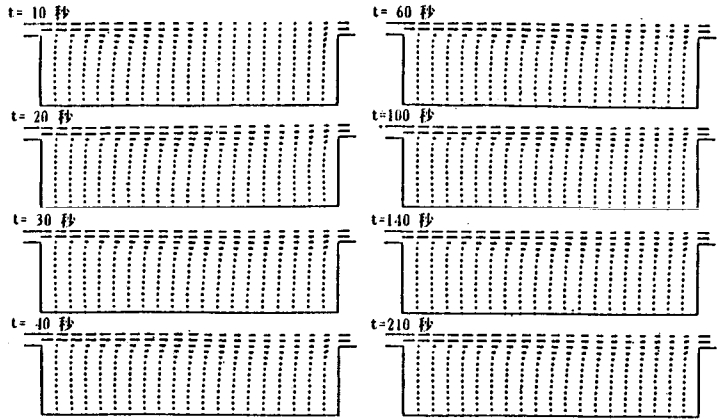


図-7 流速ベクトル図

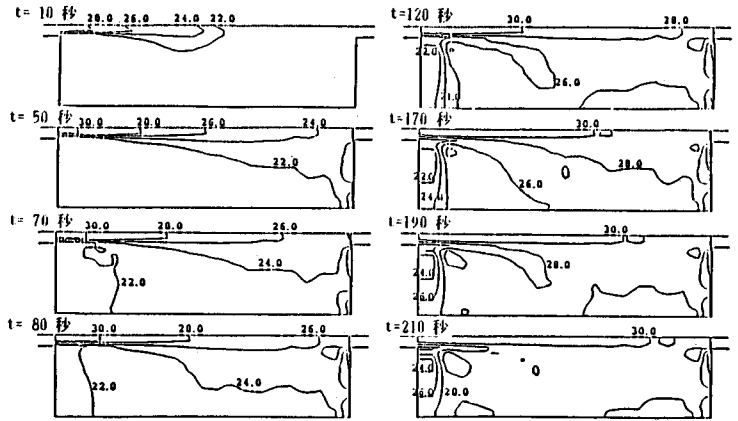


図-8 温度分布図（図中単位℃）

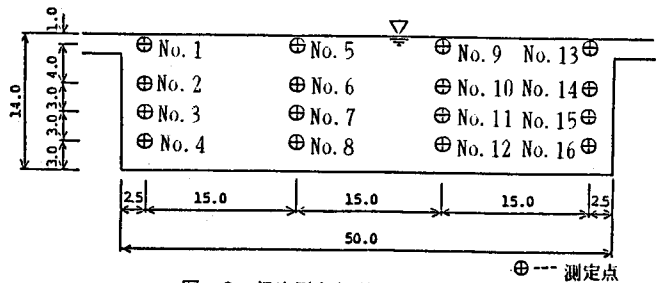


図-9 温度測定点（図中単位cm）

8. 結 論

Launder⁽¹⁾, Gibson・Launder⁽²⁾ および松井⁽⁵⁾らの研究を拡張して、二次元非定常乱流拡散現象を $k-\epsilon$ 乱流モデルで定式化し、それを表面温排水の問題に適用し、次の諸点についてその可能性を明らかにした。

(1) 一様な平衡流におけるレイノルズ応力および乱流熱フラックスに関するLaunderらの関数表現が、そのまま同じ関数形で本研究の対象とする現象に適用できるという仮定が定式化の出発点となっている。計算値と実験値との対比により、流れおよび温度の成層状態がLaunderらの一様流と類似しており、二次流などの発生がなければこのモデルで十分に現象を再現することができる。

(2) レイノルズ応力および乱流熱フラックスに関するLaunderらの表現にはフラックス・リチャードソン数など多くのパラメーターを既知レベルで評価する必要がある。これらの中には変量の空間微係数などを含み、数値計算上で一般に不安定である。

(3) 本研究の水理模型は水槽長50cmで、下流壁の存在の効果が比

較的に大きく、温水の潜り込みを伴うなど複雑な流れになっている。それに対して計算モデルでは、パラメーターの決定に際し、あらかじめ $\partial T / \partial x_3 > 0$ を仮定して、フラックス・リチャードソン数の範囲を規制している。したがって、計算モデルの可能性を検討するという見地からみると、水槽の長さを可能な限り長くして、下流壁の影響を排除した方がよいと考えられる。

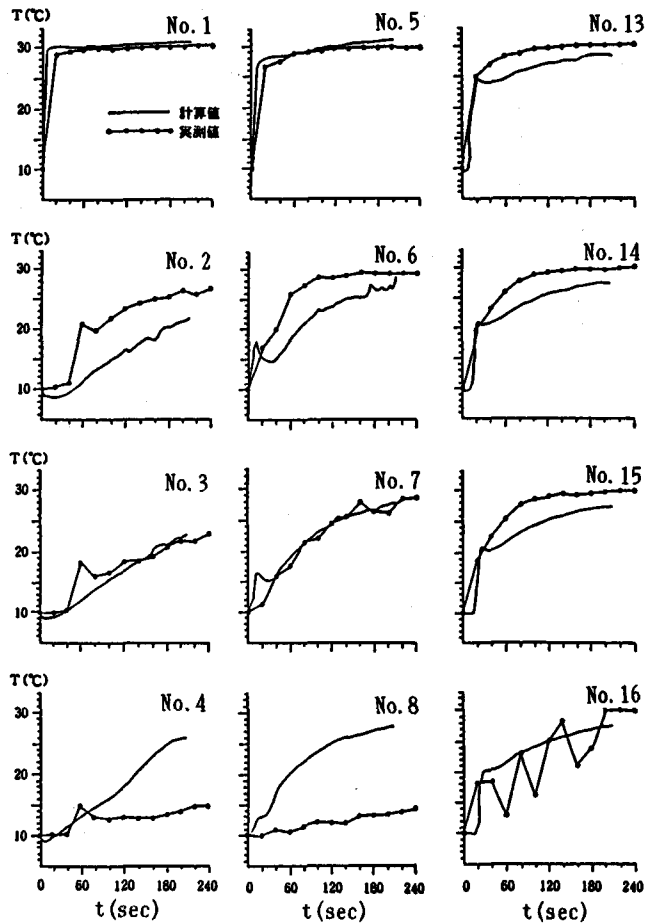


図-10 水温の時間変化 (Noは測点番号)

** 参考文献 **

- (1) Launder B.E. (1975): "On the effects of a gravitational field on the turbulent transport of heat and momentum", J. Fluid Mech., Vol. 67
- (2) Gibson M.M. and Launder B.E. (1976): "On the calculation of horizontal, turbulent, Free shear flows under gravitational influence", J. of heat Transfer
- (3) Launder B.E., Reece G.J. and Rodi W. (1975): "Progress in the development of a Reynolds-Stress turbulence closure", J. Fluid Mech., Vol. 68
- (4) 柴田、松梨 (1985): " $k-\epsilon$ 乱流モデルの鉛直噴流への適用", 29回水講
- (5) 松井、岩佐、細田 (1984): " $k-\epsilon$ モデルの Buoyant Surface Jet への適用", 土木学会39回年講