

二層流安定性解析における粘性効果について

Viscosity Effect in the Stability Analysis of Two-Layered Flow

長岡技術科学大学工学部 正員 早川 典生

1. はじめに

二層流の安定性理論には古くから有名なKelvin-Helmholtz (K-H) の安定条件があり、それは次式のように書ける。

$$(U_1 - U_2)^2 \leq \frac{\{\rho_1 \coth(kh_1) - \rho_2 \coth(kh_2)\} \{g(\rho_2 - \rho_1) + Tk^2\}}{-k\rho_1\rho_2 \coth(kh_1) \coth(kh_2)} \quad (1)$$

ここで U_1, U_2 は各々上下層の様な流速、 ρ_1, ρ_2 は各々上下層の密度、 h_1, h_2 は各々上下層の水深、 k は波数、 g は重力加速度、 T は表面張力である。この解の現実の密度流の諸問題への適用にあつては、上下層で各々一定とされている速度分布および密度分布が非現実的であるという難点がある。

一般に連続的な速度分布・密度分布を有する密度流の安定問題は数多く考えられるが、この種の問題で最も有名であり、後に続く数々の研究の先駆けとなったのは、Taylor¹⁾とGoldstein²⁾の非粘性問題の研究であり、後にそれらは一般的な安定条件を導いたMiles³⁾の成果で完成の域に達した。

ところで水理学で扱うような現象は、河口の塩水くさびにせよ、貯水池の泥流にせよ、スケールは大きくとも、流速が極めて小さいことが予想され、粘性の影響も考慮する必要が有るのではないだろうか。水理学の分野で最初にこの問題に取り組んだのはKeulegan⁴⁾である。彼はJeffreys⁵⁾の研究にならってK-H安定条件に粘性の効果をとりいれようとしたが、解析としては不完全であり、安定性を決定する有名なパラメーターKeulegan数 $\Theta = (\nu g \Delta \rho / \rho)^{1/3} / \Delta U$ を導き出し、安定条件は実験的に求めたこのパラメーターの値により定まるとした。ここで ν は動粘性係数 $\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1$ 、 $\Delta U = |U_2 - U_1|$ である。

後にIppen-Harleman⁶⁾は下層流の実験結果から、安定条件はK-H条件で無次元波数 $\alpha = kh = 2$ とおいて次式で与えられることを示した。

$$F_d = \frac{\Delta U}{\{(\Delta \rho / \rho) gh\}^{1/2}} < 1, \text{ あるいは } \Theta > R^{-1/3} \quad (2)$$

ただしここで h は下層水深であるが、流れている層の水深という意味で添字を省いている。無次元パラメーター F_d は密度フルード数であり、Keulegan数とReynolds数 $R = \Delta U h / \nu$ との間に $\Theta = R^{-1/3} F_d^{-2/3}$ の関係があるので、式(2)に示す Θ を用いた形が得られる。Ippen-Harlemanの実験はReynolds数 $R = \Delta U h / \nu$ が100~400の範囲で行われているので、式(2)は一般に層流の安定条件であるとされている。

近年、二層流の粘性を考慮した安定問題は現実的な流速分布を有する場合について解析が可能になった(Hayakawa and Unny⁷⁾および西田・吉田^{8), 9)})。特に西田ら¹⁰⁾はKeulegan数とReynolds数による安定条件図表に安定の十分条件をプロットして、式(2)への粘性による影響は小さい事を示している。しかしながら、十分条件でない厳密な安定条件はどのようになるのであろうか。また西田らはReynolds数100以上の結果を示しているが、粘性の効果はReynolds数のさらに小さい値に対して果して顕著になるであろうか。Hayakawaらの計算はReynolds数=2の小さい値までの結果を示してはいるが、ただ彼らの論文では密度成層の効果を表すパラメーターとして $ca^2 = 1/(\alpha F_d^2)$ を用いており、より一般的なパラメーター(例えば F_d)で表す必要がある。本論文では彼らの計算を、より広いパラメーターの範囲で計算し直して、二層流の安定性に対する粘性の効果を考察してみようとするものである。

2. 基礎方程式と解法

基礎方程式は文献7)、8)と同じであるが、正確を期すために以下にやや詳しく述べる。Fig.-1に示す

ように二層流の典型的な例として上層 ($y > 0$) には密度 ρ_1 の軽い流体が、下層 ($y < 0$) には密度 ρ_2 の重い流体が無限に広がっている場合を考える。上層は下層に対して一様に水平 x 方向に流れているものとし、その間に連続的な流速分布として次式を仮定する。

$$u = 0.5 U \tanh(y/h) \quad (3)$$

ここで h は流れの上下方向のスケールを表す量である。この流速分布は $y = 0$ に関して対称であり、かつ多くの密度流の流速分布を代表するものと考えられる。例えば Hayakawa らは式 (3) の代わりに、層流自由境界層流速分布のもとにこの問題を解いているが、その得られた結果と式 (3) により得られた結果との差は僅かであることが示されており、式 (3) は充分な一般性を有するものと思われる。なお本問題については古典力学に一般的に適用される Galilei 相対性原理は適用される。

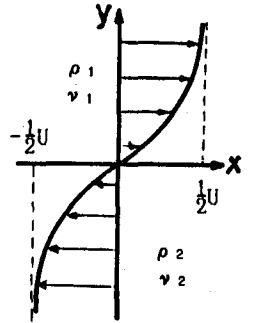


Fig. 1 流速分布

この平均流に対して攪乱流を考え、Navier-Stokes 方程式を線形化し、攪乱流の流れ関数 ϕ を次式のように波動解で表す。

$$\phi = U h \phi_j(\eta) \exp \{ik(x - cUt)\} \quad (4)$$

ここで、 $j = 1$ は上層 ($y > 0$)、 $j = 2$ は下層 ($y < 0$) に関する量を表す。その結果よく知られた次式のような Orr-Sommerfeld 方程式を得る。

$$(w - c)(\phi_j'' - \alpha^2 \phi_j) - w'' \phi_j = -\frac{1}{\alpha R_j} (\phi_j'''' - 2\alpha^2 \phi_j'' + \alpha^4 \phi_j) \quad (5)$$

ここで $w = u/U$, $\alpha = kh$, $R_j = Uh/\nu_j$ またプライムは η に関する微分を表す。境界条件としては無限遠において $\phi_j \rightarrow 0$ の他、界面 $\eta = 0$ における速度成分と応力の連続性が必要であり、それらは線型化されて以下のように書ける。

$$\phi_1 \rightarrow 0, \quad \eta \rightarrow \infty \quad (6.1)$$

$$\phi_2 \rightarrow 0, \quad \eta \rightarrow -\infty \quad (6.2)$$

$$\phi_1 = \phi_2, \quad \eta = 0 \quad (7.1)$$

$$\phi_1' - \frac{w_1'}{w_0 - c} \phi_1 = \phi_2' - \frac{w_2'}{w_0 - c} \phi_2, \quad \eta = 0 \quad (7.2)$$

$$\mu_1 (\phi_1'' + \alpha^2 \phi_1 - \frac{w_1''}{w_0 - c} \phi_1) = \mu_2 (\phi_2'' + \alpha^2 \phi_2 - \frac{w_2''}{w_0 - c} \phi_2), \quad \eta = 0 \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned} \rho_1 \left\{ \frac{gh}{U^2} \frac{\phi_1}{(c - w_0)} + (w_0 - c) \phi_1' - w_1' \phi_1 - \frac{1}{i\alpha R} (\phi_1'''' - 3\alpha^2 \phi_1'') \right\} = \\ \rho_2 \left\{ \frac{gh}{U^2} \frac{\phi_2}{(c - w_0)} + (w_0 - c) \phi_2' - w_2' \phi_2 - \frac{1}{i\alpha R} (\phi_2'''' - 3\alpha^2 \phi_2'') \right\}, \quad \eta = 0 \end{aligned} \quad (7.4)$$

ここで w_0 は $\eta = 0$ における w の値、 w_j', w_j'' は各々 $\eta = 0$ における w の上層側 ($j=1$)、下層側 ($j=2$) の一・二階微係数である。

今、上下層間で粘性係数は等しく、 $(\rho_2 - \rho_1)/\rho_2 = \epsilon \ll 1$ とすると、この問題は ϵ 、無次元波数 α

$= kh$, Reynolds 数 $R = U_h/\nu$, Richardson 数 $Ri = \epsilon gh/U^2$ をパラメーターとする固有値問題となる。境界条件をこれらのパラメーターにより書き直したとき、 ϵ を乗ずる項は有限な値を有している、この項の寄与は極めて小さく、結果として $\epsilon = 0$ として計算しても大局的には問題ない。結果として式(3)の流速分布の下に $\eta = 0$ における境界条件は以下のように書き直せる。

$$\phi_1 = \phi_2 \quad (8.1)$$

$$\phi_1' = \phi_2' \quad (8.2)$$

$$\phi_1'' = \phi_2'' \quad (8.3)$$

$$\phi_1''' = \phi_2''' - \frac{i \alpha R Ri}{c} \phi_2 \quad (8.4)$$

ここで Richardson 数 Ri は密度フルード数 F_d との間に $Ri = 1/F_d^2$ の関係がある。以上で問題の定式化は終わり、後は固有値問題としてこれを解けばよい。この解法には Betchov¹¹⁾らの開発した $\eta = -\infty$ における漸近解から出発し、 $\eta = \infty$ における漸近解の性質を満たすように係数値を求める方法を採用した。数値手法としては、自動ステップ幅調節機能を有する四次の Runge-Kutta-Gill 法を用い、 $\eta = -3$ から $\eta = 3$ まで (ただし α の小さな値に対しては -6 から 6 まで) 積分した。計算に当たっては西田らとの重複を避けるため Reynolds 数の小さい範囲に重点をおいた。

3. 計算結果と考察

Fig. 2 に $Ri-\alpha$ 面での中立安定曲線を示す。得られた結果は西田ら⁹⁾と同一である。Fig. -3 は $\alpha-R$ 面上に中立安定曲線を示したものである。 $Ri = 0$ の一層流の場合には中立安定曲線は、 $\alpha-R$ 面上の原点を通る。すなわちこの場合すべての α に対して不安定解が存在する。有限の Ri 値に対しては中立安定曲線は有限の R 値において折り返す形をとっており、この場合この最小の R 値以下ではすべての α に対して擾乱は安定となる。Fig. -4 は中立安定曲線を $Ri-R$ 面上に示したものであり、ここでも与えられた波数 α に対して、如何なる Ri 数でも擾乱は安定になる臨界の R 数の存在を示している。

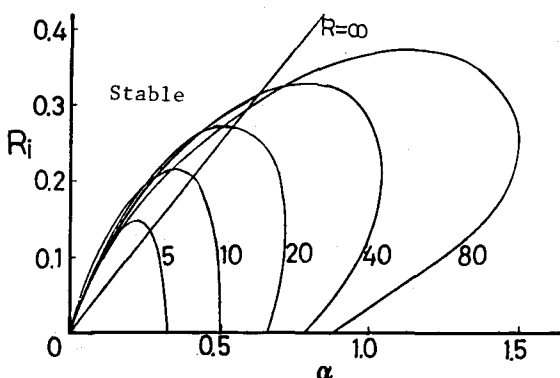


Fig. 2 中立安定曲線 (Richardson数 R vs 波数 α)

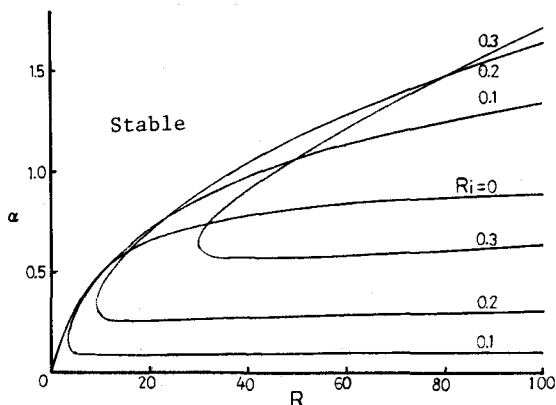


Fig. 3 中立安定曲線 (波数 α vs Reynolds数)

Hayakawaらはこの問題に関する $\alpha R \rightarrow 0$ の極限における級数解を得ており、それによれば αR の0次の解は次式の根として与えられる。

$$\{\alpha^2 + (\beta_1 + \beta_2)\alpha + \beta_1^2 + \beta_2^2 - \beta_1\beta_2\} = \frac{Ri}{2\alpha(c - w_0)}(\beta_2 - \beta_1)(2\alpha + \beta_1 + \beta_2) \quad (9)$$

ここで $\beta_1 = \alpha \{1 - 1(R/\alpha)(c-0.5)\}^{1/2}$, $\beta_2 = \alpha \{1 - 1(R/\alpha)(c+0.5)\}^{1/2}$ である。Hayakawaらは式(9)の根を数値的に求め、中立安定条件は Fig. -5 に示す α/R と R_i/α の関係として表せる事を示した。Fig. -5は $R_i=0$ で中立安定曲線は $R-\alpha$ 面での原点を通るという有名な事実と一致しており、この図より有限な R_i 値に対しての R, α 値を求め $R-\alpha$ 面に中立安定曲線を描いたのが Fig. 6 である。式(9)の誘導過程より、Fig. -6 の曲線は $\alpha R \rightarrow 0$ の範囲でのみ正しいが、Fig. -3 で得られた、有限な R_i 値に対して中立安定曲線は R の最小値を有するという事実を裏付けている。

前述したように二層流の安定限界は Keulegan 数で示されることが多い。そこでこれらの結果を $\theta-R$ 図表に示したのが Fig. -7 である。図にはまた Ippen らの安定限界式(2)および Hayakawa¹²⁾ の求めた簡易解も示している。任意の α 値に対する中立安定曲線の、図中右上の分枝はこの問題の非粘性解

$$R_i = \alpha/2 \quad (10)$$

に急速に漸近している。左下側の分枝は $\alpha \leq 0.5$ では、ある R 値で急速に閉じる形状を呈するが、 $\alpha \geq 1.0$ では右下に流れてその形状は複雑である。なお式(2)は式(10)で $\alpha = 2$ とした場合である。

Hayakawaの簡易解は式(2)にならって $\alpha = 2$ について得られたものであるが、この図では、その性質はむしろ $\alpha = 0.3$ に近いものが得られている。従ってこの簡易解も本解析結果と共通する点を有するが、簡易解であるために、数値的に異なった結果が得られたようである。

この安定条件と実験結果との照合は西田ら^{9), 10)}により検討されている。その際、実験では有限な流体層厚を取らねばならないので、流れのスケール h の解釈が問題になる。西田らは水理学的な層 Reynolds 数と層 Keulegan 数は本論文の R および θ の各々 0.19, 1.7 分の1であるとし、この時計算した中立安定曲線の包絡線は、層 Reynolds 数および層 Keulegan 数を式(2)に用いた結果と一致するとしている。

本研究では α の異なった値に対する中立安定曲線が得られたが、対応する実験値があればこれを確かめる

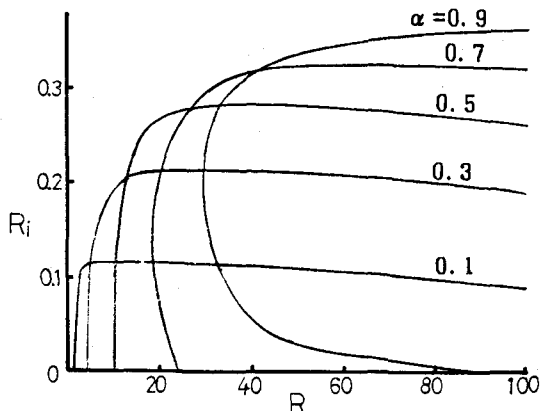


Fig. 4 中立安定曲線 (Richardson数 vs Reynolds数)

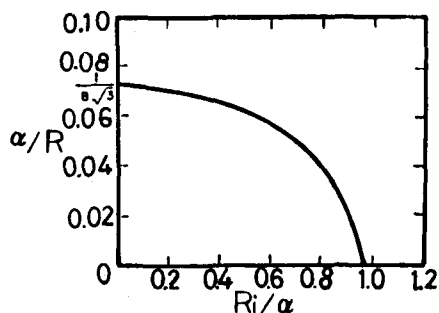


Fig. 5 中立安定曲線 ($\alpha R \rightarrow 0$)

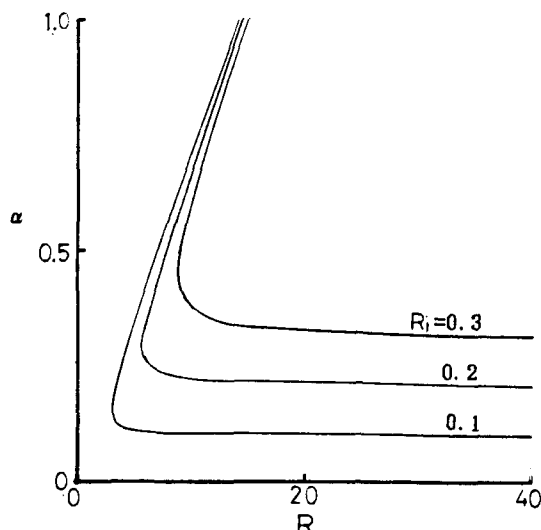


Fig. 6 中立安定曲線 (Fig. 5による)

ことが出来る。ただ西田らの実験結果は $R < 20$ 以下の成果に乏しく本研究の成果を直接的に検証するのに適してはいない。本研究の成果と西田らの成果と対比して考えれば、安定限界に粘性効果が顕著になるのは、 $R < 20$ であるものと思われる。

4. 結語

二層流の安定限界を R_i (または Θ), R , α をパラメーターとして計算し、特に R 数の小さい領域を明らかにした。その結果粘性効果は $R < 20$ の領域でしか顕著に現れないことが明らかになった。

現実の二層境界面での内部波は、その報告されている例から見ても⁸⁾、非線型性が著しく、その様な問題の解明には非線型安定度問題を手掛ける必要が有りそうである。

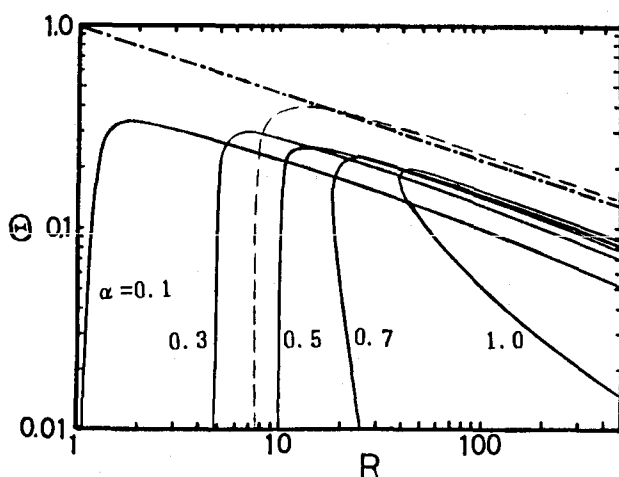


Fig. 7 中立安定曲線 (Keulegan数 Θ vs Reynolds数 R , 破線はHayakawa¹²⁾, 一点鎖線は式(2))

謝辞

本研究は西田修三・吉田静男両氏の研究に刺激されてまとめたものであり、特に西田氏には貴重な討論を頂いた。また計算に当たっては本学大学院生大嶽雅博君の助けを得た。ここに記して謝意を表す。

参考文献

- 1) Taylor, G. I.: Effect of variation of density on the stability of superposed streams of fluids, Proc. Roy. Soc., A132, pp. 499-523, 1931
- 2) Goldstein, S.: On the stability of superposed streams of fluids of different densities, Proc. Roy. Soc., A132, pp. 524-548, 1931
- 3) Miles, J. W.: On the stability of heterogeneous shear flow, J. Fluid Mech., Vol. 10, pp. 496-508, 1961
- 4) Keulegan, G. H.: Interfacial stability and mixing in stratified flows, J. of Research, U. S. Nat. Bureau of Standards, 43, pp. 487-500, 1949
- 5) Jeffreys, H.: On the formation of water waves by wind, Proc. Roy. Soc., A107, pp. 189-208, 1925
- 6) Ippen, A. T. and Harleman, D. R. F.: Steady-state characteristics of subsurface flow, Circular 52, pp. 79-93, U. S. Nat. Bureau of Standards, 1952
- 7) Hayakawa, N. and Unny, T. E.: Viscous stability of parallel streams of superposed fluids, Physics of Fluids, Vol. 17, No. 5, pp. 879-882, 1974
- 8) 西田修三、吉田静男：二層流の安定性解析、第29回海岸工学講演会論文集、pp. 550-554, 1982
- 9) 西田修三、吉田静男：二層流の安定限界、第27回水理講演会論文集、pp. 549-553, 1983
- 10) 西田修三、吉田静男：二層流の安定性に関する実験的研究、第28回水理講演会論文集、pp. 339-343, 1984
- 11) Betchov, R. and Szewczyk, A.: Stability of a shear layer between parallel streams, Physics of Fluids, Vol. 6, No. 10, pp. 1391-1396, 1963
- 12) Hayakawa, N.: A note on interfacial stability of two-layered flow, J. Hydroscience and Hydraulic Engrg., Vol. 3, No. 1, pp. 15-22, 1985