

二層流の連行および界面抵抗係数

Entrainment and Interfacial Friction of Two-Layered Flows

東京電機大学 理 工 学 部 正 員 有田正光
コーネル大学 土木工学科 G. H. Jirka

1. 著 論

塩水楔など二層流の問題は環境水理学上重要な問題である。この問題においては周知のように二層界面の位置を求めることが重要であり、その為には精度の高い界面抵抗係数を求める必要がある。それゆえ過去多くの研究者が界面抵抗係数を実験的 (Abraham¹⁾, 金子¹⁵⁾, その他) もしくは理論的 (浜田²¹⁾, 椎貝¹⁰⁾, 日野⁴⁾, 玉井¹¹⁾) に取り組んできた。しかしながら従来提案されている実験・実測式は提案者の収集したデータの条件の範囲でのみ正しいと考えられるものが多い。一方提案されている理論式は種々の無理な仮定を含んでいたり、また現在迄に明らかになっている二層密度流の基礎的知見が十分モデルの中に考慮されているとはいえない。従って現在のところ、現象を精度良く実験から現場迄広範囲に説明する合理的な理論は存在しない様に思える。また、界面連行係数に関する理論的取り扱いほとんど無い。

本研究は二層密度流の界面抵抗係数及び界面連行係数を、塩水楔の問題を念頭において、現在迄に明らかになっている物理的知見を使用して理論的に求めることを目的とする。

2. 流れの模式図と基本式

考える流れの場を塩水楔の問題を念頭において図-1に示す。本論文においては同図に示すように i -界面と j -界面の二つの界面を定義する。 i -界面は従来多くの研究者が使用してきた界面であり、いわゆる密度界面である。定義としては流速もしくは上昇密度が半値になる面や流速もしくは上昇密度の勾配が最大となる面など、多くの定義がある。また j -界面は流速が零となる界面である。したがって $s-j$ 層 (s は水表面を表わす) はせん断力の大きい混合層を内部に含み、それゆえ同層はエネルギー的に能動的な層であるといえる。逆に $j-b$ 層 (b は水底面を表わす) はエネルギー的に受動的な層であるということが出来る。また本論文においては図-1に示すように $s-i$, $i-b$, $s-j$, $j-b$ のそれぞれの厚さを h_1 , h_2 , z_1 , z_2 とする。

静水圧近似及び水平流れに対する境界層近似を使用すると連続の式、運動方程式、エネルギーの輸送方程式はそれぞれ式(1), (2), (3)の様に表わされる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uw}{\partial z} = -g \frac{\partial z_s}{\partial x} - \frac{g}{\rho_f} \frac{\partial}{\partial x} \int_z^{z_s} \Delta \rho dz + \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u^3}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2 w}{\partial z} = -g u \frac{\partial z_s}{\partial x} - \frac{g}{\rho_f} u \frac{\partial}{\partial x} \int_z^{z_s} \Delta \rho dz + \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial}{\partial z} (u \tau_{xz}) - \frac{\tau_{xz}}{\rho_f} \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3)$$

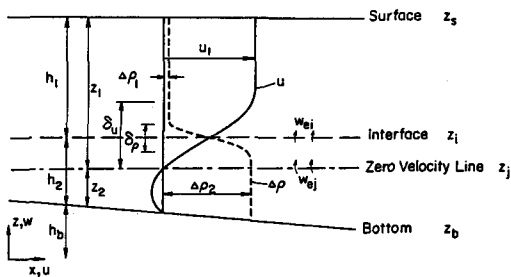


図1 流れの場の模式図

上式において x = 水平座標, z = 鉛直座標, u = 水平流速, w = 鉛直流速, g = 重力の加速度, $z_s = z_b$

$+H$ = 水面の高さ, H = 水深, Z_b = 水底面の高さ, ρ_f = 淡水密度 (校正密度), $\Delta\rho = \rho_f$ よりの密度上昇, $\tau_{xz} = \rho_f (\nu du/dz - \overline{u'w'})$ = 水平方向のせん断力, ν は動粘性係数, u', w' はそれぞれ u 及び w の乱れ成分。

3. 塩水楔の内部機構

前述のように本論文においては二層流の具体例として塩水楔の問題を念頭において検討を進める。図-2に Sargent-Jirka⁸⁾ による塩水楔の実験結果を著者等が再整理したものを示す。実験は同図に示すように塩水楔先端の密度フルード数: $F_0 = 0.43$ でありまた同地点のレイノルズ数: $Re_0 = 4,100$ の、典型的な塩水楔に関する実験の水理条件の基に取られたデータであるといえる。彼等は流れの各断面の流速, 濃度の同時測定を行っており、実験結果より塩水楔の流れの内部構造が明らかになる。図-2をみると塩水楔は長さ方向に三領域に分割できることが分かる。つまり、先端領域, 準平衡領域, 河口端領域である。先端領域では界面混合層が発達過程にあり、また河口端領域では静水圧近似が破綻するなど、これらの両領域の取り扱いが極めて困難である。一方準平衡領域は混合層などの流れの諸量がほぼ平衡状態に達した領域であり、静水圧近似, 相似性の仮定, 漸変流としての仮定など取り扱いを簡素化する為の仮定を使用する領域である。塩水楔の場合、この準平衡領域は先端領域及び河口端領域に比較して十分に大きいのでこの領域のみを対象にして構築された予測モデルでも塩水楔全体を説明しようと考える。同様にして他の一般的な二層流の問題においてもこの準平衡領域が現象を支配すると考えられるので本論文においてはこの領域を念頭において研究を進める事とする。また実験と現場では流れの場のレイノルズ数が大きく異なるために現象も大きく異なるのでこの点を考慮した理論的取り扱いが必要となることに留意しなければならない事は述べるまでもない。

4. j - 界面連行係数: α_j の定式化と検証

本章では $s-j$ 層を断面内で積分する事により j - 界面連行係数を求めるがそれに先立ち $s-j$ 層の流速: u , 上昇密度の差: $(\Delta\rho - \Delta\rho_1)$, レイノルズ応力: $-\overline{u'w'}$ に相似性を仮定して次式の様におく。

$$u = u_1 f(\zeta), \quad (\Delta\rho - \Delta\rho_1) = \Delta\rho_c f_g(\zeta), \quad -\overline{u'w'} = u_1^2 \tilde{f}_B(\zeta) \quad (4)$$

ここに u_1 = 上層における最大流速, $\Delta\rho_1$ = 上層における ρ_f よりの上昇密度, $\Delta\rho_c = \Delta\rho_2 - \Delta\rho_1$, $\Delta\rho_2$ = 下層における ρ_f よりの最大上昇密度, $\zeta = (Z - Z_j)/Z_1$; Z_j = j 界面の位置, また $f, f_g, \tilde{f}_B$ はそれぞれ流速, 上昇密度, レイノルズ応力の分布形である。

次に、式(5)に与えられる積分定数を導入する。また以下の解析において積分定数: I の x 方向への変率 dI/dx は現象が x 方向へは緩慢に変化する場合 (図-2 参照) を考えて無視する。

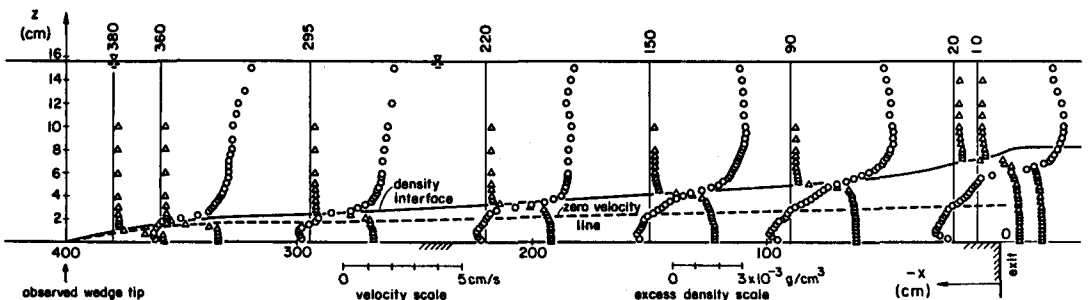


図2 Sargent-Jirka⁸⁾の塩水楔に関する実験結果 ($F_0 = 0.43$, $Re_0 = 4,100$)

$$I_1 = \int_0^1 f d\zeta, \quad I_2 = \int_0^1 f^2 d\zeta, \quad I_3 = \int_0^1 f^3 d\zeta, \quad I_4 = \int_0^1 \int_0^1 f_g d\zeta d\zeta, \quad I_5 = \int_0^1 f \int_0^1 f_g d\zeta d\zeta \quad (5)$$

$\Delta\rho_1$ は一般に無視し得る程小さい (図-2 参照) こと、及び水表面: Z_s において; $w=0$, $\tau_{xz}=0$: j - 界面: Z_j において; $u=0$, $w=w_{ej}=j$ - 界面における鉛直方向連行速度, $\tau_{xz}=\tau_j=j$ - 界面におけるせん断応力、—の境界条件のもとに式(1)~式(3)の基礎方程式群を上層 ($s-j$ 層) について断面内積分する。得られた式群を $1/2 d(u_1^3 z_1)/dx = u_1 d(u_1^2 z_1)/dx - 1/2 u_1^2 d(u_1 z_1)/dx$ の関係式を使用して接続の後、 j - 界面における連行係数: $\alpha_j = w_{ej}/u_1$ について整理する。さらに、第3章において述べた準平衡領域を念頭にいた上で (同領域においては $s-j$ 層の流速, 上層密度分布はほぼ矩形分布で近似し得る) それぞれの項のオーダー評価を行うと微小項を無視して α_j の表現式として最終的に次式を得る。

$$\alpha_j = \frac{2I_1}{I_3} \int_0^1 \tilde{f}_B f' d\zeta + \frac{\nu}{I_3 u_1 z_1} \int_0^1 f'^2 d\zeta \quad (6)$$

上式の第一項は乱れエネルギーの生産に伴う連行を表わし、また第二項は粘性逸散に伴う連行をそれぞれ表わしている。以下にそれぞれの項について説明を加える。

(a) 乱れエネルギーの生産に伴う連行: α_{jt} 第一項中の $\tilde{f}_B$ はレイノルズ応力の分布形であるが、Jirka⁶⁾ は浮力効果の増大に伴うレイノルズ応力の減衰について考察し次式を得ている。

$$\tilde{f}_B = \tilde{f}_{B0} (1 - Ri_{11} / \sqrt{Ri_{11}^2 + Ri_{1k}^2}) \quad (7)$$

ここに、 $\tilde{f}_{B0}$ = 均質密度噴流の場合のレイノルズ応力の分布形, Ri_{11} = 上層断面平均リチャードソン数 = $(gc' z_1)/u_1^2$, $gc' = (\Delta\rho_c/\rho_f)g$, Ri_{11} = 勾配型限界せん断層リチャードソン数の理論値 = $1/4$, である。従って α_{jt} は次式のように与えられる。

$$\alpha_{jt} = \alpha_0 (1 - Ri_{11} / \sqrt{Ri_{11}^2 + Ri_{1k}^2}) \quad (8)$$

ここに α_0 は均質せん断層の場合の j - 界面連行係数であり、 $\alpha_0 = 2 \int_0^1 \tilde{f}_{B0} f' d\zeta$, また f' は $f' = df/d\zeta$ 。 α_0 の値は均質せん断層のレイノルズ応力と流速分布を測定することによって直接計算できる。本論文では有田-Jirka-玉井¹³⁾ が均質表層噴流の場合の上層の平均流速: u_m に対して求めた値より均質表層噴流の流速分布をガウス分布で近似出来ると考え、水表面最大流速: u_c に対する値として換算して得られる $\alpha_0 = 0.038$ を採用する。

(b) 粘性逸散に伴う連行: $\alpha_{j\ell}$ 界面混合層内: δ_u (図-1 参照) の流速分布を直線で近似すると粘性逸散にともなう連行を表わす式(6)の第二項は次式のように書き直すことができる。

$$\alpha_{j\ell} = 2 \frac{\nu}{u_1 z_1} \int_0^1 f'^2 d\zeta = \frac{2}{Re_1} \left(\frac{z_1}{\delta_u} \right) \quad (9)$$

ここに、 $Re_1 = (u_1 z_1)/\nu$ = 上層平均レイノルズ数である。混合層内の流速分布をより精度の高いガウス分布や $\tanh$ 分布で与えることもできるが、結果は上式とほとんど変わらない。ところで上式で連行量を定める為には式(9)中の (δ_u/z_1) の値を与える必要がある。本論文では Jirka⁶⁾ の与えたレイノルズ数の大きい場合つまり完全乱流の場合の式を念頭におき、また完全層流の場合、界面混合層の厚さは上層全域におよぶものと考え $(\delta_u \cong z_1)$ 、 (δ_u/z_1) の値を半実験的に次式のようにおく。

$$\frac{\delta_u}{z_1} = 1 : (Re_1 \leq 500), \quad \left(\frac{500}{Re_1}\right)^n + \frac{Ri_*}{\sqrt{Ri_1^2 + Ri_*^2}} \left\{ 1 - \left(\frac{500}{Re_1}\right)^n \right\} : (Re_1 > 500) \quad (10)$$

(c) 最終的な j - 界面における連行速度: α_j の推定式と実験結果との比較
 結局 j - 界面における連行係数は最終的に次の様に与えられる。

$$\alpha_j = 0.038 \left(1 - Ri_1 / \sqrt{Ri_1^2 + Ri_*^2} \right) + \frac{2}{Re_1} \left(\frac{z_1}{\delta_u} \right) \quad (11)$$

上式の (δ_u / z_1) の値には式(10)の与える値を使用する。上式はレイノルズ数が十分に大きいてもリチャードソン数が大きくなると連行は粘性のみに支配される事を示している。これは極めて興味のある結果である (図-3 参照)。

式(11)の与える結果をリチャードソン数の関数として図-3 に示してある。ところで二成層流の零流速面における連行係数: α_j の測定例は極めて少ない。これは従来の連行係数の測定が環境水理上の観点からもっぱら i - 界面の連行係数が取り扱われて来たことによる。著者等の知る限り塩水楔に関する Sargent-Jirka⁸⁾ の実験が j - 界面連行係数の測定例として唯一のものである。また Riddell⁷⁾ の実験結果からは塩水楔全長に渡る平均的な連行係数を求める事ができる。これらのデータと理論との比較を図-3 に示してある。理論とデータの一致の度合いは比較的良いと考えられる。ただし、使用しうる実測データが無いために高レイノルズ数の流れにおける理論の検証は不十分である。

密度噴流域 ($Ri_1 < 1$) の領域では椿-小松²⁰⁾ および Chu-Vanvari²⁾ の得た実験データと理論との比較を図-3 中に示している。この領域においてはレイノルズ数の影響は二層流領域と比較して小さいことが分かる。

5. i - 界面抵抗係数: f_i の誘導と検証

前章の解析においては基礎方程式、式(1)~(3)を水表面から零流速面 ($s-j$ 層) を断面内積分することによって α_j を求めたが、本章においては水表面から密度界面 ($s-i$ 層) を断面内積分することによって i - 界面における界面抵抗係数: f_i を求める。

i - 界面における連行係数: α_i は一般に無視しうる程小さい ($5 < \alpha_i / \alpha_j < 10$ 程度、また図-2 参照)。従って $q_i = q_f = \text{一定}$ ($q_i = s-i$ 層の流量, $q_f = \text{塩水楔先端部における上層流量}$)、 $\Delta \rho_i = 0$, $\Delta \rho_c = \Delta \rho_0$ ($= \rho_s - \rho_f$; ρ_s は河口部における塩水の密度, つまり海水密度, また ρ_f は塩水楔上流における河川淡水密度) となる。また $s-i$ 層においては図-2 に示すように精度良く矩形速度分布と密度分布が仮定できる

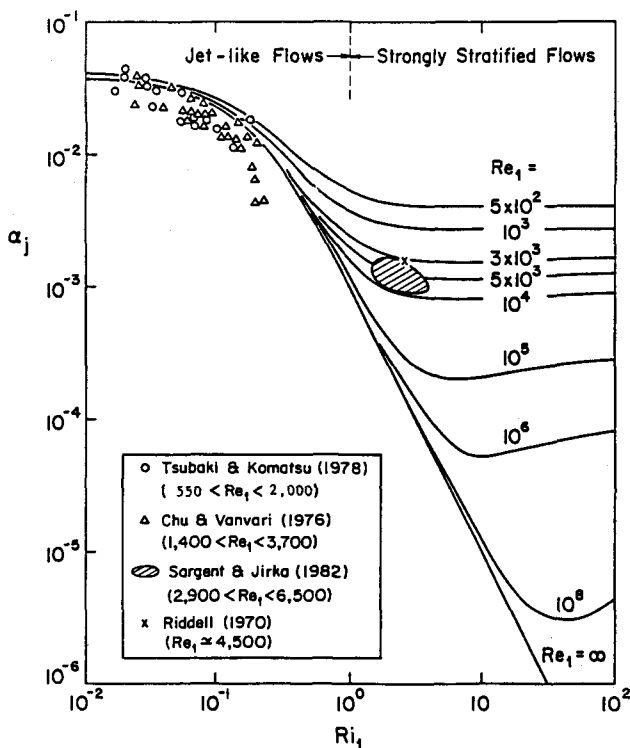


図3 j - 界面連行係数 α_j とリチャードソン数: Ri_1 との関係

から、運動方程式(2)は積分されて次式のような簡単な形となる。

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{q_f^2}{h_1} \right) = -g h_1 \frac{dz_s}{dx} - \frac{\tau_i}{\rho_f} \quad (12)$$

ここに τ_i は i - 界面における界面せん断力であり、 $\tau_i = \rho_f \lambda_i (q_f/h_1)^2$ で定義される。また $s-i$ 層の厚さ: h_1 と $s-j$ 層の厚さ: z_1 は $h_1 = (1-m(\delta_0/z_1))z_1 = r z_1$ と関係づけられる。ここに m , r は定数。また連続の式の積分形は簡単に、 $dq_f/dx=0$ で与えられる。

i - 界面抵抗係数: λ_i を求めるために、 $s-i$ 層において断面内積分された運動方程式、式(12)より連続の条件を考慮して dh_1/dx を算出する。次ぎに同様に $s-j$ 層において断面内積分された運動方程式と連続の式から dh_1/dx を求め、これらを等値する事によって $s-i$ 層と $s-j$ 層を接続する。その結果 λ_i を誘導する事が出来る。そのようにして求められた λ_i より、
 a) 一般に水表面勾配は小さいと見做せる事
 b) 上記のように $d\rho_i=0$ と仮定出来ること
 c) $\tau_j/\tau_i \ll 1$ と仮定出来る事
 d) 混合層が軸対称で直線で近似出来る事を仮定すると $I_1=r$ となる事
 等を考慮するとオーダー的に卓越する項のみを残して最終的に λ_i は極めて簡単に次式で与えられる。

$$\lambda_i = 2\alpha_j \quad (13)$$

上式の α_j の値を式(11)より与える事により λ_i の理論値が定まる。このようにして定めた λ_i の理論値と実験¹¹⁾ 16), 8), 3) 実測データ^{19), 14)} との比較を図-4 に示す。Moody図と同様に λ_i は Re_1 数に対してプロットされている。一方、図中に示す F_1 は層平均密度フルード数であり $F_1 = Re_1^{-1/2}$ で定義される。実験結果と理論との一致の度合いは比較的良いと考える。また式(13)より得られる興味ある限界値として完全層流の場合 ($Re_1 < Rec = 500$)、 $\tau_i = 4/Re_1$ の関係式を得る。この式は Ippen-Harleman⁵⁾ が下層流動の層流密度流について得た界面抵抗係数の式: $\lambda_i = 2.8/Re_1$ の関係式と式形が同じである。ただし、係数値の違いは底面摩擦による流速分布の違いに基づくものと考えられる。

図-4 中のデータで Sargent-Jirka⁸⁾, Dermisiss-Partheniades³⁾ 以外のデータはすべて玉井¹¹⁾によって整理されているものを使用している。また Dermisiss-Partheniades のデータを除いては界面抵抗係数値はすべて上層 ($s-i$ 層) 下層 ($i-b$ 層) について立てられた Schjiff-Schonfield⁹⁾ の運動方程式に基づき、 i - 界面の連行は無視し得ること及び下層が静止していることを仮定して導かれる式で計算されている (玉井¹¹⁾ 参照)。従ってこの方法によって得られる界面抵抗係数の精度は高

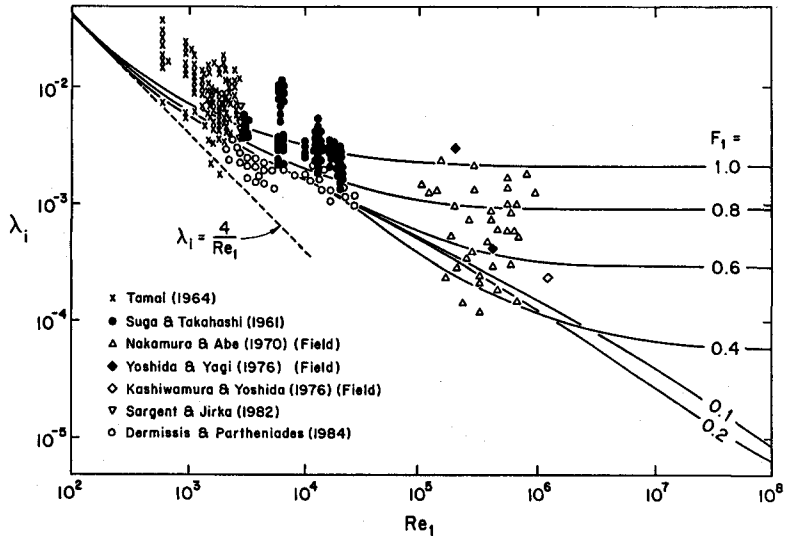


図-4 界面抵抗係数: λ_i とレイノルズ数: Re_1 の関係

いとはいえない。また、実験によって得られるデータの中には塩水楔先端部の界面混合層がまだ準定常態に達していない部分のものが含まれる場合もある。このような領域で取られたデータから界面抵抗係数を計算するとその値を大きく見積もる事となる(式(9)、(13)参照)。さらには実験水路の側壁にかかるせん断力の効果もあって実験データから得られる λ_i の値は実際の値よりかなり大きくなる事があると考えられる。図-4において実験データが理論値より大きい値を与える傾向があるのはその為である。以上述べて来た様な問題点を克服するために Dermisis-Partheniadesは熱線流速計を使用して界面せん断力の直接測定を行っている。したがって彼等のデータは図-4に見るように理論との一致の度合いは良い(彼等のデータにおける密度フルード数 F_1 の範囲はほぼ $0.2 < F_1 < 0.6$ である)。一方、同図中には示されていないが実測データは F_1 =一定の理論値の周りに大きく散乱する。これは実測データは潮汐による非定常性や水路断面の非一様性などによりデータの精度そのものに問題のある事が多い為であると考えられる。

6 結 論

本論文における要点を記述すると以下の通りである。

(a) 二層密度流の問題において従来ほとんど使用されることの無かった零流速面(j -界面)を界面として解析を進め、零流速面における連行係数: α_j を誘導した上で実験結果と比較し、その妥当性を検証した。解析結果より得られる重要な点は粘性の効果であり、レイノルズ数の十分大きな流れでもリチャードソン数が十分大きくなると粘性の効果は無視し得なくなるということを示した点は重要である。

(b) 密度界面(i -界面)を界面とした解析を進めた上で零流速面における解析結果と接続し密度界面の界面抵抗係数: λ_i と零流速面における連行係数: α_j の関係式を求めた。その関係式は: $\lambda_i = 2\alpha_j$ である。

(c) 従って、上述の(a), (b)より λ_i の理論値を得る。その結果は実験・実測結果と比較され妥当性が検証された。

参考文献

- (1) Abraham, G. Karelse, M. and Van Os, A. G. (1979): Jour. of Hydr. Res. Vol. 17, No 4, pp. 273-287.
- (2) Chu, V. H. and Vanvari, M. P. (1976): Jour. of Hydr. Div., ASCE, Vol. 1, pp. 691-706.
- (3) Dermisis, V. and Partheniades, E. (1984): Tech. Rep., Dep. of Engr. Sciences, Univ. Florida, Gainesville.
- (4) Hino, M. (1980): in Stratified Flows, Carstens, T. Ed., Tapir, Trondheim, Norway.
- (5) Ippen, A. T. and Harleman, D. R. F. (1952): NBS Circular 521, Contribution No 12, Gravity waves, pp. 79-93.
- (6) Jirka, G. H. (1982): in Turbulent Buoyant Jets and Plumes, Ed. by W. Rodi, Pergamon Press, pp. 69-119.
- (7) Riddell, J. F. (1970): La Houille Blanche, No 4, pp. 317-329.
- (8) Sargent, F. H. and Jirka G. H. (1982): Tech. Rep., Cornell Univ.
- (9) Schijf, J. B. and Schonfeld, J. C. (1953): Proc. Minnesota Int. Hydr. Conv., ASCE and IAHR.
- (10) Shi-igai, H. (1965): Tran. JSCE, Vol. 123, pp. 27-31.
- (11) Tamai, N. (1976): Proc. 15th Coastal Eng. Conf. Honolulu, Vol. 4, Chap. 182, pp. 3169-3188.
- (12) U.S. Army Corps of Engineers (1928-1981): Data Sheets, New Orleans District.
- (13) 有田正光・G. H. Jirka・玉井信行 (1986): 土木学会論文報告集, 第 375 号/II-6.
- (14) 柏村正和・吉田静男 (1976): 第 23 回海講講演集, pp. 477-481.
- (15) 金子安雄 (1966): 第 13 回海講演集, pp. 263-267.
- (16) 須賀堯三・高橋晃 (1971): 第 26 回年講演集, II, pp. 137-140.
- (17) 玉井信行 (1982): 土木学会論文報告集, 第 324 号, pp. 95-102.
- (18) 玉井信行 (1980): 密度流の水理, 技報堂出版.
- (19) 中村宏・阿部宣行 (1970): 電力中央研究所技術第二研究所報告, No 70519, 42 p.
- (20) 椿東一郎・小松利光 (1978): 土木学会論文報告集, 第 273 号, pp. 61-81.
- (21) 浜田徳一 (1966): 第 13 回海講演集, pp. 259-262.