

3次元表層成層せん断流の流れ特性

Flow Properties of Three Dimensional Surface Stratified Shearing Flow

九州大学 工学部 正 員 小松 利光

長崎大学 工学部 正 員 古本 勝弘

長崎大学 工学部 正 員 椿 東一郎

九州大学 大学院 学生員 細山田 得三

1. まえがき

発電所から大量に放出される温排水の拡散問題や河口での河川水の流出問題は、3次元の表層せん断流の問題として取り扱われ、多くの理論的・実験的研究がなされてきた。¹⁾²⁾³⁾⁴⁾それらは、2つに大別できる。1つは、差分法や有限要素法を用いて数値計算により拡散予測する方法であり、もう1つは、温度分布（もしくは密度分布）や流速分布の相似性を仮定した積分モデルによる理論的研究である。数値計算法による解析は多くの仮定、前提を必要としており、また実際問題に適用する場合には、個々の放流形式や放流条件に応じてその都度かなり面倒な計算が要求されることから、一般的な密度流特性を把握することは、容易ではない。一方、積分モデルを用いた研究においても未知数に対して式の数不足していることから部分的に実験結果を導入したり、均一流体の表面噴流に収束しなかったりするなどまだ多くの問題が残されている。

本文は、積分モデルによる3次元表層せん断流の研究であるが、以下に述べる見地に基づいて理論的考察を行っており、均一流体の表層せん断流をその極限として含む一般的な表示式が得られている。

2. 基礎方程式について

2.1 基礎式の構成

密度 ρ_a の半無限水域の水表面上に、flow force M_0 、浮力flux N_0 を持つ流体が水平に噴出する3次元表層成層せん断流を考える。座標軸を図-1のようにとり、平均流速を (U, V, W) 、平均の圧力を P 、単位体積当りの平均浮力を

$$B = g(\rho_a - \bar{\rho})/\rho_a$$

とし、それぞれの平均値の回りの変動分を小文字 (u, v, w) 、 p, b で表す。流れの平均特性量は $(U, V, W), B, P$ の5個でこれらの量が知れば、流れは解析されたことになる。これらの諸量を規定する基礎式としては3方向の各運動方程式と連続の

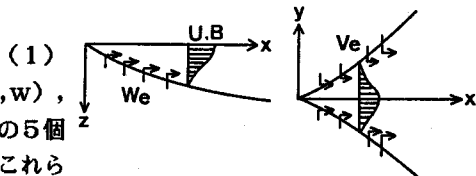


図-1 流れの模式図

式、拡散方程式があり、この5本の基礎式を連立させることにより、5個の未知量を決定することができる。しかしながら、積分モデルでは基本式の積分に際して流速分布、浮力分布に相似性を仮定しなければならない。いま、表面流速・表面浮力を $U_s(x, y), B_s(x, y)$ 、噴流中心軸上の値を $U_c(x), B_c(x)$ として次のようにおく。

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= U_s(x, y)f_1(z/h) & B(x, y, z) &= B_s(x, y)m_1(z/h) \\ &= U_c(x)f_1(y/\delta)f_2(z/h) & &= B_c(x)m_1(y/\delta)m_2(z/h) \\ &= U_c f_1(\eta)f_2(\zeta) & &= B_c m_1(\eta)m_2(\zeta) \end{aligned} \quad (2)$$

なお、 δ, h としては均一流体の噴流幅の定義にならって、本文では、それぞれ B_s が $B_c/2$ となる幅、 B が $B_s/2$ となる深さを用い、 h は、 y 方向には一定とする。ところで(2)式の導入により決定すべき未知数は、 δ, h の2量に加わり計7個となって規定すべき方程式の数が足りなくなってくる。本来閉じて解けるはずの物理系が積分法を用いることによって閉じなくなる理由について以下に若干考察してみる。

微分方程式の基礎式をそのまま解くと流れの特性量（特に今、流速と浮力を考える）は (x, y, z) の

関数として空間的に与えられる。その際は噴流幅 δ 、 h の概念は必要としないし、もし仮に拡がりの目安として知りたければ、計算された流速もしくは浮力の分布形から即座に求められる。つまり、 δ 、 h は $U(x, y, z)$ や $B(x, y, z)$ から独立しているわけではない。一方、積分モデルにおいては $U_c(x)$ 、 $B_c(x)$ 、 δ 、 h はそれぞれ x だけの関数となり任意の点の流速や浮力はこれらの量を (2) 式に代入して、仮定された分布形 f_1, f_2, m_1, m_2 に基づいて計算される。すなわち本来は無数の解の集合である $U(x, y, z)$ 、 $B(x, y, z)$ を相似性の仮定の導入によって4つの独立な量で代表させているわけである。このことから見かけ上未知数が増えたように見えるが、 δ 、 h はあくまでも解の流速や浮力の分布を同定するためのパラメーターとして使われておりこれらを規定するために全く独立な基礎方程式を新たに必要とするわけではない。確かに単純に基礎式を $x = \text{const.}$ の断面で積分すると式の数不足だがこれは基礎式の微分方程式を断面積分して使用することが、本来微分方程式が持っている力の部分使用に留まっているためと考えられる。以上の点を考慮して運動方程式等を十分活用するためにモーメント式の導入を試みる。

著者等⁵⁾ は以前2次元表面密度噴流の理論解析において未知数 U 、 V 、 B 、 h 、 P を規定する基礎式として x 方向、 z 方向の運動方程式、連続の式、拡散方程式の各々の断面積分式と x 方向の運動方程式に U を掛けて積分した式 (平均流のエネルギー式) をモーメント式の一つとして導入して成功を修めている。これらの考察から、積分モデルを用いるときは流れ特性量の分布の相似性の導入によって更に加わる未知量に対しては基礎式のモーメント式を加えることにより close させることができるものと思われる。

2.2 基礎式の誘導

まず、微小項を無視した z 方向の運動方程式を水表面 $z = \zeta'$ から z まで積分すると $z = \zeta'$ で $P = 0$ の条件より、

$$P/\rho_a = g(z - \zeta') - \int_{\zeta'}^z B dz - \bar{w}^2$$

となる。十分深い所では水は水平流速を持たないので $z \rightarrow \infty$ で $\partial P / \partial x = 0$ 、 $\partial P / \partial y = 0$ が成り立つ。したがって、

$$\left(-\frac{1}{\rho_a} \frac{\partial P}{\partial x}\right)_z = -\frac{\partial}{\partial x} \int_z^\infty B dz + \left(\frac{\partial \bar{w}^2}{\partial x}\right)_z, \quad \left(-\frac{1}{\rho_a} \frac{\partial P}{\partial y}\right)_z = -\frac{\partial}{\partial y} \int_z^\infty B dz + \left(\frac{\partial \bar{w}^2}{\partial y}\right)_z$$

となる。また、Reynoldsの運動方程式における渦動粘性については水平・鉛直方向の渦動粘性係数 K_H 、 K_V を導入し、簡単に次の表示

$$-\bar{uv} = K_H \left\{ \left[\frac{\partial V}{\partial x} \right] + \frac{\partial U}{\partial y} \right\}, \quad -\bar{uw} = K_V \left\{ \left[\frac{\partial W}{\partial x} \right] + \frac{\partial U}{\partial z} \right\}, \quad -\bar{vw} = K_V \left\{ \left[\frac{\partial W}{\partial y} \right] + \frac{\partial V}{\partial z} \right\}$$

を用いる。ここで微小項と見なし得る [] の項を無視すると連続の式、 x 、 y 方向の運動方程式及び拡散方程式は次のように表される。

$$L_c \equiv \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

$$L_x \equiv \frac{\partial UU}{\partial x} + \frac{\partial VU}{\partial y} + \frac{\partial WU}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \int_z^\infty B dz - \frac{\partial}{\partial y} \left(K_H \frac{\partial U}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(K_V \frac{\partial U}{\partial z} \right) = 0 \quad (4)$$

$$L_y \equiv \frac{\partial UV}{\partial x} + \frac{\partial VV}{\partial y} + \frac{\partial WV}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \int_z^\infty B dz - \frac{\partial}{\partial x} \left(K_H \frac{\partial U}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(K_V \frac{\partial V}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial y} (\bar{w}^2 - \bar{v}^2) = 0 \quad (5)$$

$$L_z \equiv \frac{\partial UB}{\partial x} + \frac{\partial VB}{\partial y} + \frac{\partial WB}{\partial z} + \frac{\partial (\bar{vb})}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{wb})}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

ここに式(3)～(6)における L_c , L_x , L_y 及び L_z は後の記述を簡単化するために導入したものである。

2.3 基礎式の積分

まず、式(4)、(6)を $y=0\sim\infty$, $z=0\sim\infty$ で積分すると、flow force の保存式、浮力fluxの保存式

$$\int_0^\infty \int_0^\infty U^2 dy dz + \int_0^\infty \int_0^\infty Bz dy dz = M_0/2 (= \text{const}) \quad \int_0^\infty \int_0^\infty UB dy dz = N_0/2 (= \text{const}) \quad (7)$$

が得られ式(2)を代入すると次のようになる。

$$M_0 = 2I_1 I_2 \delta h U_c^2 + 2I_3 I_4 \delta h^2 B_c \quad (8) \quad N_0 = 2I_5 I_6 \delta h U_c B_c \quad (9)$$

ここに

$$I_1 = \int_0^\infty f_1^2 d\eta, \quad I_2 = \int_0^\infty f_2^2 d\zeta, \quad I_3 = \int_0^\infty m_1 d\eta, \quad I_4 = \int_0^\infty \zeta m_2 d\zeta, \quad I_5 = \int_0^\infty f_1 m_1 d\eta, \quad I_6 = \int_0^\infty f_2 m_2 d\zeta$$

つぎに、連続の式(3)を積分すると、鉛直・水平からの連行速度を W_e , V_e として

$$-\frac{d}{dx} \int_0^\infty \int_0^\infty U dy dz = \int_0^\infty V_e dz + \int_0^\infty W_e dy \quad (10)$$

が得られる。 W_e 、 V_e は、それぞれ表面流速 $U_s(x, y)$, 中心面流速 $U_c(x) \cdot f_2(\zeta)$ に比例するものとして

$$W_e = E_v U_s = E_v U_c f_1(\eta), \quad V_e = E_H U_c f_2(\zeta) \quad (11)$$

で定義される連行係数 $E_v(x)$, $E_H(x)$ を導入すると、式(10)は、

$$I_7 I_8 \frac{d}{dx} [\delta h U_c] = I_8 E_H U_c h + I_7 E_v U_c \delta \quad (12)$$

となる。ここで、

$$I_7 = \int_0^\infty f_1 d\eta, \quad I_8 = \int_0^\infty f_2 d\zeta$$

続いて、水流の x 方向の運動方程式(4)に y 及び z を掛けて積分した各1次モーメント式を考える。積分を行う前に、 y 方向の流速 $V(x, y, z)$ 、 z 方向の流速 $W(x, y, z)$ を求める。連続の式(3)を用い、

$$\int_0^\infty \int_0^\infty L_c dy dz = 0 \quad \int_0^\infty \int_0^\infty L_x dy dz = 0$$

からそれぞれ V , W が求められ、式(12)を用いて若干の計算を行うと、それぞれ次式が得られる。

$$V(x, y, z) = \left\{ U_c \frac{d\delta}{dx} \eta f_1 - \frac{1}{I_7} E_H U_c \int_0^\eta f_1 d\eta \right\} f_2, \quad W(x, y, z) = \left\{ U_c \frac{dh}{dx} \zeta f_2 - \frac{1}{I_8} E_v U_c \int_0^\zeta f_2 d\zeta \right\} f_1 \quad (13)$$

式(13)の V , W を式(4)に代入して、 y 及び z に関する1次モーメント式

$$\int_0^\infty \int_0^\infty L_x \cdot y dy dz = 0, \quad \int_0^\infty \int_0^\infty L_x \cdot z dy dz = 0$$

を求めるとそれぞれ次のように得られる。

$$I_2 I_{11} \frac{d}{dx} [\delta^2 h U_c^2] - I_2 I_{11} \delta h U_c^2 \frac{d\delta}{dx} + \frac{I_2 I_{12}}{I_7} E_H \delta h U_c^2 \\ = -I_4 I_9 \frac{d}{dx} [B_c h^2 \delta^2] + \int_0^\infty \int_0^\infty y \frac{\partial}{\partial y} \left(K_H \frac{\partial U}{\partial y} \right) dy dz + \int_0^\infty \int_0^\infty y \frac{\partial}{\partial z} \left(K_v \frac{\partial U}{\partial z} \right) dy dz \quad (14)$$

$$I_1 I_{10} \frac{d}{dx} [\delta h^2 U_c^2] - I_1 I_{10} \delta h U_c^2 \frac{dh}{dx} + \frac{I_1 I_{13}}{I_8} E_v \delta h U_c^2 \\ = -\frac{1}{2} I_3 I_{14} \frac{d}{dx} [B_c \delta h^3] + \int_0^\infty \int_0^\infty z \frac{\partial}{\partial y} \left(K_H \frac{\partial U}{\partial y} \right) dy dz + \int_0^\infty \int_0^\infty z \frac{\partial}{\partial z} \left(K_v \frac{\partial U}{\partial z} \right) dy dz \quad (15)$$

ここに

$$I_9 = \int_0^{\pi} \eta m_1 d\eta, \quad I_{10} = \int_0^{\pi} \zeta f_2^2 d\zeta, \quad I_{11} = \int_0^{\pi} \eta f_1^2 d\eta, \quad I_{12} = \int_0^{\pi} f_1 \int_0^{\pi} f_1 d\eta d\eta, \quad I_{13} = \int_0^{\pi} f_2 \int_0^{\pi} f_2 d\zeta d\zeta, \quad I_{14} = \int_0^{\pi} \zeta^2 m_2 d\zeta.$$

最後にy方向の運動方程式(5)を積分した

$$\int_0^{\pi} L_y dy dz = 0 \quad \text{は} \quad \int_0^{\pi} L_x \cdot y dy dz = 0 \quad (\text{式(14)}) \quad \text{と同様、連行係数 } E_H \text{ を定め}$$

る式となるので、ここではy方向の運動方程式のzに関する1次モーメント式

$$\int_0^{\pi} L_y \cdot z dy dz = 0$$

を用いる。この定積分を遂行すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left[I_{10} I_{11} \delta h^2 U_z^2 \frac{d\delta}{dx} - \frac{I_{10} I_{12}}{I_7} E_H \delta h^2 U_z^2 \right] + I_{10} E_H h^2 U_z^2 - I_{10} I_{11} \delta h U_z^2 \frac{d\delta}{dx} \frac{dh}{dx} \\ & + \frac{I_{10} I_{12}}{I_7} E_H \delta h U_z^2 \frac{dh}{dx} + \frac{I_{11} I_{13}}{I_8} E_V U_z^2 \delta h \frac{d\delta}{dx} - \frac{I_{12} I_{13}}{I_7 I_8} E_H E_V \delta h U_z^2 \\ & = \frac{1}{2} I_{11} B_c h^3 + \int_0^{\pi} z \frac{\partial}{\partial x} \left(K_H \frac{\partial U}{\partial y} \right) dy dz + \int_0^{\pi} z \frac{\partial}{\partial z} \left(K_V \frac{\partial V}{\partial x} \right) dy dz + \int_0^{\pi} z \frac{\partial}{\partial y} (\bar{w}^2 - \bar{v}^2) dy dz \end{aligned} \quad (17)$$

以上の式(8), (9), (12), (14), (15)及び(17)の6式が6個の未知量 U_c , δ , h , B_c , E_H および E_V を規定する基礎式である。これらの式を解くためには流速分布・浮力分布に適切な関数形を与えて断面係数値 I_i ($i = 1, 2, \dots$) を決めるとともに、乱れ強度や K_H , K_V の関数形を与える必要がある。

2.4 渦動粘性係数 K_H , K_V

鉛直方向に密度勾配の存在する成層せん断流においては渦粒子の鉛直運動は浮力効果により減衰するため、乱れ強度や渦動粘性係数はRichardson数の増加とともに減少する。椿・小松⁵⁾は2次元表面密度噴流における乱流構造の変化について詳細な実験を行い、理論解析を加えて以下の結果を得ている。すなわち、乱れの強度 $\sqrt{c^2}$ ($= \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$) 及び鉛直方向の混合距離 ℓ_v の無次元表示 $q = \sqrt{c^2}/U_s$, $\beta = \ell_v/h$ の値は2次元表面密度噴流のoverall Richardson数

$$R_2 = \alpha_{UB} B_c h / U_s^2 \quad \left(\alpha_{UB} = \int_0^{\pi} f_2 m_2 d\zeta \text{ (2次元の場合)} \right) \quad (18)$$

の増加とともに、均一表面噴流における $q_* = 0.28$, $\beta_{v*} = 0.33$ の値からかなり急激に減少することを確かめ次式を提示している。

$$\beta_v / \beta_{v*} = 1 / (1 + \kappa_c \lambda_2 R_2) \quad (19) \quad \frac{q}{q_*} = \frac{\sqrt{1 - \lambda_1 \kappa_B R_2}}{1 + \kappa_c \lambda_2 R_2} \quad (20)$$

ここに、 $\lambda_1 = 1.89$, $\lambda_2 = 2.09$, $K_B = 1.2$, $K_C = 2.8$

次に上述の2次元表面密度噴流の乱れ特性を以下に述べる手順によって3次元に拡張する。まず、3次元噴流におけるoverall Richardson数として

$$R_1 \equiv N_0 / 2\delta U_c^2 = I_5 I_6 h B_c / U_c^2 \quad (21)$$

を導入すると R_2 との関係は $R_2 = \alpha R_1$ ($\alpha = \alpha_{UB} / I_5 I_6$) となる。鉛直方向の渦動粘性係数

$K_V \sim \sqrt{c^2} \ell_v = q \beta_v U_s h$ については $q \beta_v / q_* \beta_{v*}$ を計算の便宜上指数関数形で近似し、 R_2 を R_1 で置き換えて、3次元表面噴流では次式を用いる。

$$K_V = a_v \phi(R_1) U_c h f_1(\eta) k_2(\zeta) \quad \phi(R_1) = \exp[-\alpha_1 R_2] = \exp[-\alpha \alpha_1 R_1] \quad \alpha_1 = 9.80$$

一方、水平方向の渦動粘性係数 $K_H \sim \sqrt{c^2} \ell_H = q \beta_H U_c \delta f_2$ については、水平方向の混合距離は浮力効果の影響を受けないので均一流体の噴流の場合の値 β_{H*} に等しいと見なされる。 q/q_* を指数関数型で近似して

$$K_H = a_H \phi(R_1) U_c \delta f_2(\zeta) k_1(\eta) \quad \phi(R_1) = \exp[-\alpha_2 R_2] = \exp[-\alpha \alpha_2 R_1] \quad \alpha_2 = 5.60$$

ここで、 a_H 、 a_v は定数、 $k_2(\xi)$ 、 $k_1(\eta)$ はそれぞれ K_v の z 方向及び K_H の y 方向の分布型を表わす。なお、3次元表面密度噴流は近似的に、鉛直方向には half jet、水平方向には plane jet とみなし得る。均一流体の噴流の場合 half jet の渦動粘性は plane jet のそのほぼ $2/3$ の大きさであるから、 a_v と a_H との間には $a_v = 2/3 \cdot a_H$ が成り立つ。最後に式 (17) の右辺第4項については

$$\iint_0^\infty z \frac{\partial}{\partial y} (\bar{w}^2 - \bar{v}^2) dy dz = \int_0^\infty z (\bar{v}^2 - \bar{w}^2)_{y=0} dz \sim \int_0^\infty q_{z=0}^2 U_c^2 h^2 \zeta d\zeta \sim q_{z=0}^2 U_c^2 h^2$$

とおき、 $q/q_* = \psi(R_i)$ であることから a_T を比例定数として

$$\iint_0^\infty z \frac{\partial}{\partial y} (\bar{w}^2 - \bar{v}^2) dy dz = a_T \psi^2(R_i) h^2 U_c^2 \quad (22)$$

とおく。

2.5 基本式の無次元表示

表面密度噴流は flow force M_0 、浮力 flux N_0 の保存される流れであるから、現象は M_0 、 N_0 および流下距離 x によって規定される。従って未知量 h 、 δ 、 B_c 、 U_c の無次元形

$$H = \frac{N_0^{1/2} h}{M_0^{3/4}}, \quad \Delta = \frac{N_0^{1/2} \delta}{M_0^{3/4}}, \quad \bar{B} = \frac{N_0^{3/2}}{M_0^{5/4} B_c}, \quad \bar{U} = \frac{N_0^{1/2}}{M_0^{1/4} U_c} = 2^{1/3} R_i^{1/3} \Delta^{1/3} \quad (23)$$

は無次元距離 $\xi = N_0^{1/2} x / M_0^{3/4}$ の関数となる。基礎式に (23) 式を代入し、 ξ を用いて無次元化するとそれぞれ次のようになる。

$$H = \frac{r_1 R_i^{1/3}}{\Delta^{1/3} (1 + r R_i)} \quad (24)$$

$$\bar{B} = r_0 \frac{\Delta^{1/3} R_i^{1/3}}{1 + r R_i} \quad (25)$$

$$\Delta^{1/3} R_i^{1/3} \frac{d}{d\xi} \left[\frac{\Delta^{2/3} H}{R_i^{1/3}} \right] = \frac{1}{I_7} E_H H + \frac{1}{I_8} E_v \Delta \quad (26)$$

$$\frac{R_i^{1/3}}{\Delta^{1/3} H} \frac{d}{d\xi} \left[\frac{\Delta^{4/3} H}{R_i^{1/3}} \right] + r_2 E_H - \frac{\Delta}{d\xi} = r_3 \frac{R_i^{1/3}}{\Delta^{1/3} H} \frac{d}{d\xi} [R_i^{1/3} \Delta^{4/3} H] + r_4 a_H \phi(R_i) \quad (27)$$

$$\frac{R_i^{1/3}}{\Delta^{1/3} H} \frac{d}{d\xi} \left[\frac{\Delta^{1/3} H^2}{R_i^{1/3}} \right] + r_5 E_v - \frac{\Delta H}{d\xi} = r_6 \frac{R_i^{1/3}}{\Delta^{1/3} H} \frac{d}{d\xi} [R_i^{1/3} \Delta^{1/3} H^2] + r_7 a_v \phi(R_i) \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta^{2/3} R_i^{1/3}}{H^2} \frac{d}{d\xi} \left[\frac{\Delta^{1/3} H^2}{R_i^{1/3}} \frac{d\Delta}{d\xi} \right] - r_2 \frac{\Delta^{2/3} R_i^{1/3}}{H^2} \frac{d}{d\xi} \left[E_H \frac{\Delta^{1/3} H^2}{R_i^{1/3}} \right] + r_8 E_H^2 - \frac{\Delta}{H} \frac{d\Delta}{d\xi} \frac{dH}{d\xi} + r_2 E_H \frac{\Delta}{H} \frac{dH}{d\xi} + r_9 E_v \frac{\Delta}{H} \frac{d\Delta}{d\xi} \\ & + r_{10} E_H E_v \frac{\Delta}{H} = r_{11} R_i - r_4 a_H \frac{\Delta^{2/3} R_i^{1/3}}{H^2} \frac{d}{d\xi} \left[\phi(R_i) \frac{\Delta^{1/3} H^2}{R_i^{1/3}} \right] + r_7 a_v \phi(R_i) \frac{\Delta}{H} \frac{d\Delta}{d\xi} + r_{12} a_v \phi(R_i) E_H \frac{\Delta}{H} + r_{13} a_T \psi^2(R_i) \end{aligned} \quad (29)$$

上の6式は H 、 Δ 、 $\bar{B}$ 、 R_i および E_H 、 E_v を ξ の関数として規定する基本式である。ここで式中の記号は以下のである。

$$\begin{aligned} r &= \frac{I_3 I_4}{I_1 I_2 I_5 I_6}, \quad r_0 = \frac{2^{1/3} I_5 I_6}{I_1 I_2}, \quad r_1 = \frac{1}{2^{1/3} I_1 I_2}, \quad r_2 = \frac{I_{12}}{I_7 I_{11}}, \quad r_3 = -\frac{I_4 I_9}{I_2 I_5 I_6 I_{11}}, \quad r_4 = \frac{-\int_0^\infty k_1 \frac{df_1}{d\eta} d\eta}{I_{11}}, \\ r_5 &= \frac{I_{13}}{I_8 I_{10}}, \quad r_6 = -\frac{I_3 I_{14}}{2 I_1 I_5 I_6 I_{10}}, \quad r_7 = -\frac{\int_0^\infty k_2 \frac{df_2}{d\zeta} d\zeta}{I_{10}}, \quad r_8 = \frac{1}{I_{11}}, \quad r_9 = \frac{I_{13}}{I_8 I_{10}}, \\ r_{10} &= -\frac{I_{12} I_{13}}{I_7 I_8 I_{10} I_{11}}, \quad r_{11} = \frac{I_{14}}{2 I_5 I_6 I_{10} I_{11}}, \quad r_{12} = \frac{I_{13} \int_0^\infty k_2 \frac{df_2}{d\zeta} d\zeta}{I_7 I_{10} I_{11}}, \quad r_{13} = \frac{1}{I_{10} I_{11}} \end{aligned}$$

3. 数値的考察

上の諸式で $R_i \rightarrow 0$ の極限が均一流体の表面噴流を規定する基礎式に対応する。解は、次のように与えられる。

$$H_* = a_1 \xi, \quad d_* = a_2 \xi, \quad R_{1*} = a_3 \xi^2 (\bar{U} = (2 a_2 a_3)^{1/3} \xi), \quad \bar{B}_* = a_4 \xi, \quad E_{H*} = a_5, \quad E_{V*} = a_6 \quad (30)$$

定数 a_i ($i=1\sim6$) は式(30)を式(24)～式(29)に代入して連立させることにより得られる。

流速分布・浮力分布については Gauss分布を用い、 $f_1(\eta) = f_2(\eta) = \exp[-0.937\eta^2]$, $m_1(\eta) = m_2(\eta) = \exp[-0.693\eta^2]$ とした。

表面噴流の理論値の算出については式(24)～(29)の連立常微分方程式をRunge-Kutta-Gill法により数値計算した。計算より得られた $\bar{B}, \Delta, H$ は図2～4に実線で、 $\bar{U}$ は点線で図-3に示している。これらの理論曲線は $\xi=0$ において均一流体の表面噴流の式(30)に接し、 ξ が増すとともに浮力効果の影響が現れてくる。理論値は実験値と良く一致しており、本理論の妥当性が十分検証されている。

4. むすび

以上において、3次元表面密度噴流の特性量を flow force M_0 、浮力 flux N_0 で無次元化し、均一流体の噴流をその極限として含む表示式を理論的に求め、その計算値は実験結果と良く一致することを示した。積分モデルの導入によって新たに加わった未知量に対してはモーメント方程式を導入することによって閉じた方程式系を構成することができる。これにより、従来のように連行係数を仮定したり、噴流水深を一定とするなどのマクロな平均量に対して仮定する必要はなくなり、全て未知量として解くことができる。

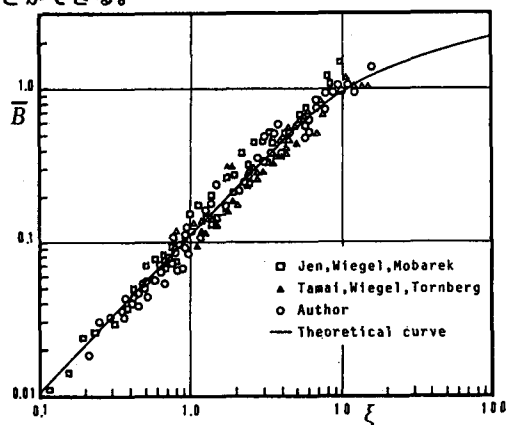


図-2 表面浮力 $\bar{B}$ と流下距離 ξ との関係

参考文献

- 1) Harleman, D.R.F., Stolzenbach, K.O. and Adams, E.E.: MIT Rep., No.205, 1975.
- 2) 林泰造・有田正光: 第24回海岸講演会論文集, pp.467~471, 1977.
- 3) 椿東一郎・小松利光: 第22回水理講演会論文集, pp.1~6, 1978.
- 4) 室田明・中辻啓二・柴垣雄一: 土木学会論文集, 第351号/II-2, pp.117~125, 1984.
- 5) 椿東一郎・小松利光: 土木学会論文報告集, 第273号, pp.69~81, 1978.
- 6) Jen, Y., Wiegel, R.L. and Mobarek, I.: Proc. ASCE, P.O.2, pp.1~30, 1966.
- 7) Tamai, N., Wiegel, R.L. and Tornberg, F.G.: Proc. ASCE, P.O.2, pp.253~276, 1966.

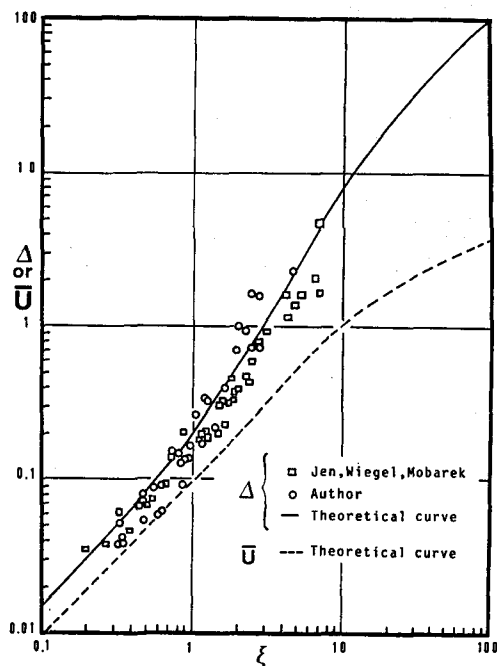


図-3 噴流幅 Δ 、表面流速 $\bar{U}$ と流下距離 ξ の関係

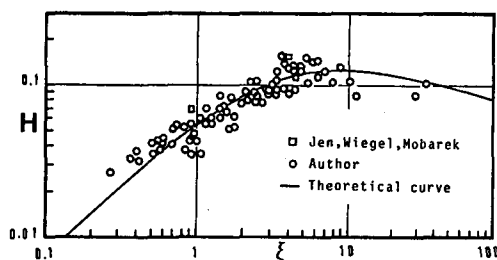


図-4 噴流水深 H と流下距離 ξ の関係