

渦による局所洗掘深についての研究
Local Scour Depth due to a Vortex

東京大学工学部 正員 玉井 信行
東京大学工学部 正員 浅枝 隆
Manandar, S.K.
東京大学大学院 学生員 中井 正則

1 まえがき

構造物周辺に局所的に発生する洗掘現象の多くは、そこに生じている渦の働きによるものであり、その機構を解明することは河川工学上の重要な問題のひとつである。このような局所的な洗掘量の算定に際しては、生じている渦の特性とその渦による洗掘量の関係を知る必要がある。従来から、局所的に発生する渦の特性については多くの研究がなされているにもかかわらず、このような既知の特性をもった渦による洗掘量についての研究はほとんどなされていない。

以上の点を踏まえて、本研究では、第一段階として現実には様々な形状をした渦をLINE-VORTEXでモデル化し、渦の特性と局所洗掘量との関係を求め、さらに、実験結果と比較することによってその妥当性を検証した。

2 浮遊砂量の理論的算定

本解析では、渦はLINE-VORTEXでモデル化し、洗掘される形状は近似的に円弧で仮定した。解析は、最初に砂粒子の浮遊機構を支配する運動量方程式により、砂粒子の運動軌跡を求め、つぎに、この運動軌跡の結果を用いて、河床面に再付着しないで浮遊する量を計算した。さらに、砂粒子の浮遊限界である局所洗掘深についても検討した。

(1) 砂粒子の運動機構

図1に示すような、LINE-VORTEXの中心を原点とする極座標系を用いると、砂粒子の (r, θ) 方向の運動は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \pi/6d^3\sigma(dV_r/dt-V_\theta d\theta/dt) &= 3\mu\pi d(W_r-V_r) + \pi/6d^3\rho(dW_r/dt-W_\theta d\theta/dt) \\ &+ \pi/6d^3\rho/2\{dW_r/dt-W_\theta d\theta/dt-(dV_r/dt-V_\theta d\theta/dt)\} + \pi/6d^3(\sigma-\rho)g\cos\theta - \pi/4d^2C_L\rho u_*^2 \quad (1) \\ &\quad (r\text{-direction}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi/6d^3\sigma(V_r d\theta/dt + dV_\theta/dt) &= 3\mu\pi d(W_\theta - V_\theta) + \pi/6d^3\rho(W_r d\theta/dt + dW_\theta/dt) \\ &+ \pi/6d^3\rho/2\{W_r d\theta/dt + dW_\theta/dt - (V_r d\theta/dt + dV_\theta/dt)\} - \pi/6d^3(\sigma-\rho)g\sin\theta \quad (2) \\ &\quad (\theta\text{-direction}) \end{aligned}$$

ここで、 V_r 、 W_r 、 V_θ 、 W_θ は各々砂粒子及び流体の速度の r 成分、 θ 成分であり、 d 、 σ 、 μ 、 g 、 u_* 、 C_L は各々砂粒子の粒径、密度、水の粘性係数、密度、重力の加速度、摩擦速度、揚力係数である。式(1)、(2)の左辺は砂粒子を加速する力、右辺第1項はStokesの法則に基づく抵抗力、第2項は圧力勾配による力、第3項は仮想質量を加速する力、第4項は重力、 r 方向第5項は揚力である。また、両式においてBasset項は微小として

省略してある。式(1),(2)を河床付近の領域(境界層内)と渦の中心付近の領域(境界層外)とに分けて解き、境界部で解が連続するように計算時に現われた未定係数を求めた。境界部の位置については、近似的に従来から平板上での境界層に対して用いられている乱流境界層厚さの式

$$\delta_* = 0.38s(U_s/\nu)^{-1/5} \quad (3)$$

を用いる。ここで、 δ_* 、 U_s 、 s 、 ν は各々境界層厚さ、主流流速、流下距離、動粘性係数である。以上のようにして2つに分割された領域に対する式を

$$r = R_0 - R \quad (4)$$

$$\theta = \theta_0 + \Theta \quad (5)$$

のように変換して求める。ここで (R_0, θ_0) は砂粒子の初期の座標である。(図1参照)

(I)境界層内 ($R \leq \delta_*$)

境界層内においては層厚に比して、曲率半径が大きいために、近似的に平板上の境界層で用いられている式を採用した。まず、圧力勾配による力 L はIkeda¹⁾による次式を採用した。

$$L = (\partial p / \partial r)_{R=(d+\delta)/2} = 0.957 \rho u_*^2 \{2.1 - 0.00027 u_* (d+\delta)/\nu\}^2 \pi \delta (d-\delta)^2 \quad (u_* d/\nu \geq 5.5) \quad (6)$$

$$L=0 \quad (u_* d/\nu < 5.5)$$

ここで、 λ 、 δ は各々最小渦径、粘性低層の厚さである。また、流速分布は次式で表わされる乱流粗面の式を用いた。

$$W_0 = u_* (1/\kappa \ln R/d + 8.5), \quad W_r = 0 \quad (7)$$

ここで、 κ はKarman定数である。

最後に、揚力係数 C_L についてであるが、ここではBagnold²⁾の実験値を採用した。ただし、粘性低層付近では、Saffman³⁾が求めた

$$C_L = 12.92 (dW_0/dR) / \{\pi \rho / \mu (W_0 - V_e)^2\} \quad (8)$$

を用いた。以上より得られた L 、 W_0 、 C_L を用いて式(1),(2)各々次式のように変形される

$$d^2 R/dt^2 + R_0 (d\Theta/dt)^2 = -A (dR/dt) + (B+D) u_*^2 - C \cos(\Theta + \theta_0) \quad (9)$$

$$R_0 d^2 \Theta/dt^2 = A u_* (1/\kappa \ln R/d + 8.5 - R_0/u_* d \Theta/dt) - C \sin(\Theta + \theta_0) \quad (10)$$

$$\text{ここで、} \quad A = 18 \mu / d^2 (\sigma + \rho/2), \quad B = 6L / \pi d^3 (\sigma + \rho/2) u_*^2$$

$$C = (\sigma - \rho)g / (\sigma + \rho/2), \quad D = 1.5 \rho C_L / d (\sigma + \rho/2)$$

(II)境界層外 ($R > \delta_*$)

境界層外においては、流速勾配が境界層内に比して極めて小さいために、圧力勾配による力は等分に近く、流速勾配による揚力は小さいのでここでは無視する。流速分布はHoffman・Joubert⁴⁾に従い、次式を採用する。

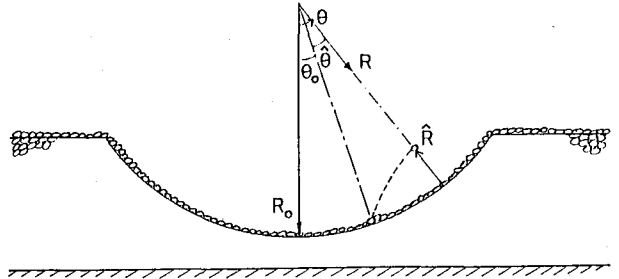


図1 座標系

$$W_0 = \beta \ln ((R_0 - R)/a) / ((R_0 - R)/a), \quad W_r = 0 \quad (11)$$

ここで、 β は係数、 a は回転ロッドの半径である。結局、式(1)、(2)は各々次式のように変形される。

$$d^2 R/dt^2 + A(dR/dt) = -R_0(d\Theta/dt)^2 - C \cos(\Theta + \theta_0) \quad (12)$$

$$d^2 \Theta/dt^2 + A(d\Theta/dt) = A\beta/R_0 \ln ((R_0 - R)/a) / ((R_0 - R)/a) + C/R_0 \sin(\Theta + \theta_0) \quad (13)$$

以上の式(9)、(10)、(12)、(13)を初期条件

$$t=0: \quad R=0, \quad dR/dt=0, \quad \Theta=0, \quad d\Theta/dt=0 \quad (14)$$

並びに、境界部での $R, dR/dt, \Theta, d\Theta/dt$ の連続条件のもとで解き、砂粒子の運動軌跡を求めた。

図2に砂粒子の運動軌跡の例を示す。解析条件は表1に示すとおりである。同図は $-30^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$ の範囲に対する結果であるが、初期の砂粒子の位置 θ_0 の値が大きくなるに従って砂粒子の浮遊高さが増加する傾向を示している。これは流下にともなう境界層厚さ δ_* が増加し、圧力勾配による力 L の作用が大きくなっていることによって、また、同図より、 θ_0 がある値を超えると、渦領域から外部領域へと砂粒子が飛び出し、浮遊することがわかる。

(2)浮遊砂量

つぎに、以上のようにして求めた砂粒子の運動軌跡より浮遊砂量を算定する。砂粒子は河床付近で揚圧力を受け、河床から離脱する。その時の離脱速度 W_{p0} は式(9)より次式のように得られる。

$$W_{p0} = -dA/2k_1 + [(dA/2k_1)^2 + d/k_1 \{(B+D)u_*^2 - C \cos \theta_0\}]^{1/2} \quad (15)$$

ここで、 k_1 は実験的に定められる定数であるが、芦田・藤田⁵⁾によれば1である。また、摩擦速度 u_* は次式で示すように、平均 $\bar{u}_*$ 、標準偏差 $k_2 \bar{u}_*$ の正規分布に従うものとする。

$$f(u_*) = 1/\sqrt{2\pi} \cdot 1/k_2 \bar{u}_* \exp\{-1/2(u_* - \bar{u}_*)^2/(k_2 \bar{u}_*)^2\} \quad (16)$$

ここで、 k_2 はIkeda・Asaeda⁶⁾に従い、2.64とする。以上、述べた W_{p0} 、 $f(u_*)$ を用いて浮遊砂量 Q を次式より算定する。

$$Q = \pi/6 \sigma d^3 K / (\pi d^2/4) \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_P W_{p0}(u_*, \theta) / d \cdot f(u_*) du_* R_0 d\theta \quad (17)$$

ここで、 $P = \{C \cos \theta / (B+D)\}^{1/2}$ 、 $K = k_3/k_1$ (k_3 :河床上の砂粒子が浮遊可能な状態にある確率)であり、 $\theta_1 \sim \theta_2$ は砂粒子が渦領域か

表1 解析条件

Γ (cm^2/s)	539
R_0 (cm)	4.65
u_* (cm/s)	4.72
σ (g/cm^3)	2.60
ρ (g/cm^3)	1.00
μ (cm^2/s)	0.01

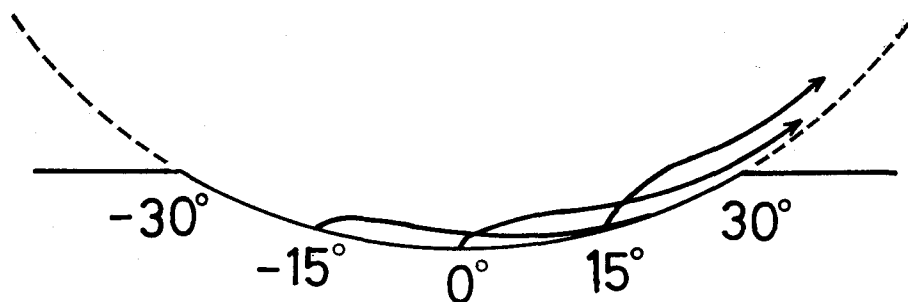


図2 砂粒子の運動軌跡

ら外部領域へと飛び出していく範囲である。 k_3 は芦田・藤田・向井⁷⁾によれば実験的に0.035と求められているが、この確率は河床上の砂粒子とそれと隣接する砂粒子との接線がすべて上で開くようになる確率に等しいと考えられる。この確率は、隣接粒子個数を n として、 $(1/2)^n$ で表わされる。この n の値は河床の空隙率 λ の関数となり、最密状態の場合には6~7程度の値をとり、このとき、 K は0.008~0.015程度の値となる。本研究で行った実験では河床はかなり密な状態であったと思われるので、ここでは $K=0.010$ とした。

(3)局所洗掘深

次に、砂粒子の浮遊限界である局所洗掘深について考える。Phillips⁸⁾によれば、LINE状の渦の摩擦速度 u_* は渦の半径 R_0 の-1乗に比例する。本研究で行った実験に対して u_* と R_0 の関係をプロットしたのが図3である。なお、 Γ は渦の循環である。同図から u_* はほぼ R_0 の-1乗に比例しているのがわかる。同図から得られた u_* と R_0 の係数を用いて

次のような仮定により局所洗掘深を求めた。

まず、 R_0 の値を順次大きくして行き、砂粒子が渦領域から外部領域へと離脱する限界の渦の半径を求めた。このとき、渦領域から外部領域へと輸送された砂粒子は渦領域周辺に堆

積する。しかし、斜面の角度が安息角より大きくなると、洗掘部に崩れ落ちていくので、洗掘部の端部の角度 θ が安息角になるように渦領域を設定してやればよい。しかも、この状態において平衡な状態を保つために、砂粒子が渦領域から外部領域に離脱する量と洗掘部に崩れ落ちる量がつりあっていなければならない。このような条件が満足される R_0 を求めた。なお、ここでは、簡単のため崩れ落ちる量は0とした。そして、このようにして求めた R_0 に対して図4で定義する局所洗掘深 H_0 を求める。なお、安息角 θ は本実験では30°であった。

3 実験

実験は図5に示すような縦90cm、横26cmの水槽を用いて、その中央に直径1.5cmの回転ロッドを設置して渦を発生させることによって行った。水槽の底には粒径 200μ の砂を6cmの厚さに敷き、全水深は22.5cmとした。浮遊砂の濃度の測定はサイフォン式のサンプラーで、ロッドの回転開始後、1、2.5、4.5、8.5、16.5minの時刻に採水し、ろ過及び乾燥後、砂粒子分の重量を計測することにより行った。

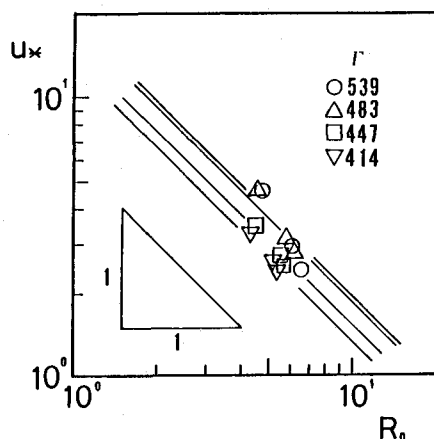


図3 渦の半径と摩擦速度の関係

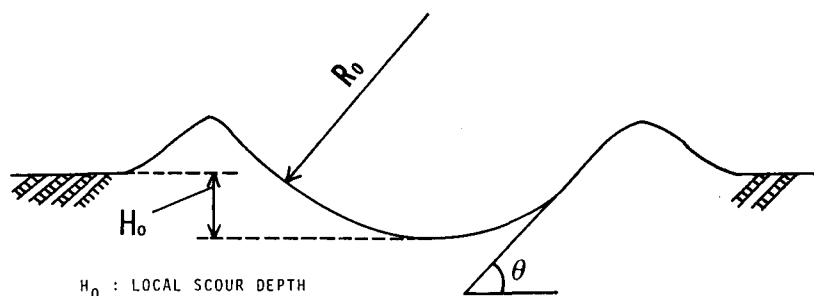


図4 局所洗掘深

このような過程で得られる結果はその時点に浮遊している砂の濃度であり、実際に浮遊した砂の量ではない。そのため、次式を用いて砂の巻上げ量を算出した。

$$Q_i = \Delta q_i / \Delta t_i - R_0 D_r \sum_{j=1}^n \Delta C(R_0, \theta_i, t_j) \cdot \Delta \theta_i / \Delta r + W_i R_0 \sum_{j=1}^n C(R_0, \theta_i, t_j) \cos \theta_i \Delta \theta_i \quad (18)$$

ここで、 Q_i は単位時間単位面積当りの巻上げ量、 Δq_i は Δt_i 間における浮遊している砂の量の変化、 $C(R_0, \theta_i, t_j)$ および $\Delta C(R_0, \theta_i, t_j) / \Delta r$ は角度 ΔQ_i の扇形状の領域の時刻 t_j における浮遊砂濃度および半径方向の勾配、 D_r, W_i は各々砂粒子の半径方の拡散係数および沈降速度である。

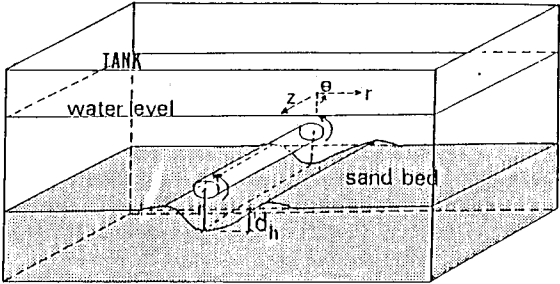


図5 実験装置

理論結果と実験結果との比較および考察

表2に本実験における水理諸元を、図6に浮遊砂量に関する理論値と実験値との比較を示す。この表によれば、浮遊砂量に関する両者の値は多少のばらつきはあるものの、種々の仮定を導入していることを考慮すれば、良好に一致しているといえる。

次に、局所洗掘深についての結果を述べる。表3に本研究で行った実験に対する局所洗掘深の推定値を示す。実験においては、洗掘深を測定していないので、厳密な比較はできないが、先に述べた浮遊砂量の結果から考察すると局所洗掘深の推定値は妥当な値であると思われる。

表2 水理諸元

RUN	Γ (cm^2/s)	R_0 (cm)	u_* (cm/s)
1	539	4.65	4.72
2	539	6.10	2.92
3	483	4.55	4.76
4	483	5.75	3.22
5	447	4.45	3.47
6	447	5.45	2.66
7	414	4.30	3.32

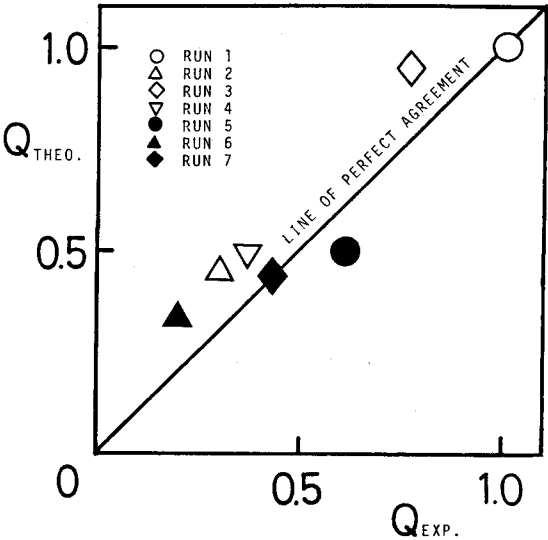


図6 浮遊砂量の理論値と解析値の比較

5 むすび

最後に、本研究より得られた結論を述べる。

- (1) LINE-VORTEX が生じている場での、浮遊砂の運動機構を運動量方程式を用いて定式化し、その運動軌跡を求めた。
- (2) 砂粒子の運動軌跡の結果から浮遊砂量を算定し、実験値と比較した。その結果両者は良好に一致することがわかった。
- (3) 局所洗掘深を解析し、実験における推定値と一致する結果を得た。

表3 局所洗掘深

RUN	Γ (cm^2/s)	H_0 (cm)	u_* (cm/s)
1	539	1.88	1.3
2	483	1.88	1.3
3	447	1.54	1.3
4	414	1.34	1.3

参考文献

- 1) Ikeda, S.: Some Studies on the Mechanics of Bed Load Transport. Proc. ISCE, No. 185, pp. 61-69, 1971.
- 2) Bagnold, R. A.: Fluid Force on a Body in Shear-Flow: Experimental Use of Stationary Flow. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, Vol. 340, pp. 147-171, 1974.
- 3) Saffman, P. G.: The Lift on a Small Sphere in a Slow Shear Flow. J. Fluid. Mech., Vol. 31, pp. 385-400, 1965
- 4) Hoffman, E. R. & Joubert, P. N.: Turbulent Line Vortices. J. Fluid. Mech., Vol. 16, 1963.
- 5) 芦田和男・藤田正治：粗面上の粒子の浮遊機構と浮遊限界に関する研究。京都大学防災研究所年報 第26号B-2, 363-377, 1983.
- 6) Ikeda, S. & Asaeda, T.: Sediment Suspension with Rippled Bed. Proc. ASCE Vol. 109 No. HY8 pp. 409-423 1983.
- 7) 芦田和男・藤田正治・向井健：粒子の浮遊運動のモデルと浮遊砂量。第29回水理講演会論文集 pp. 497-502, 1985.
- 8) Phillips, W. R. C.: The Turbulent Trailing Vortex during Roll-up. J. Fluid. Mech., Vol. 105 pp. 451-467, 1981.