第31回水理講演会論文集　1987年2月

統計的二次近似手法を用いたダム貯水池群実時間操作
Real-Time Multireservoir Control Using Statistical Second-Order Approximation

京都大学工学部　正　員　椎葉　充晴
京都大学工学部　正　員　高棹　琢馬
京都大学大学院　学生員　張　　昇平
京都大学大学院　学生員　児玉　好史

§1 序論

ダム貯水池群の実時間操作における以下の問題，(a) システムの不確かさを考慮すること，(b) 時時刻刻得られる観測情報およびインプットの予測を有効に利用して逐次最適なコントロール（放流量）を決定していくこと，(c) コントロールと状態に関する確率的な制約条件（chance constraints）を考慮すること，(d)「次元の呪い」を克服し計算の効率を保証することを念頭におき，統計的二次近似手法を用いた実時間操作のアルゴリズムを提案しその有効性を示す．ダム貯水池群の実時間操作においては「目的関数をどのように設定するか」「コントロールを考える期間をどの程度とるか」「計画段階の操作ルールとの整合性をどのように考えるか」など，重要な問題が多く残されているが，本研究は特に(a)～(d) の問題に焦点を絞ってその解決を図るものである．

従来「次元の呪い」からのがれるために DDDP や BDP (Binary State DP) など多くの手法が提案されているが，決定論的な DP 問題の場合には DDP (differential dynamic programing)[1),2)] が最も有効な手法であると考えられる．これは，コントロールの候補値とそれに対応する状態量系列の近傍で解を改良する手続きを反復するものである．Geogakakos ら[3)]は，確率 DP の場合にも同じような考え方を適用して，コントロールの候補値とそれに対応する状態量系列の期待値の近傍で解を改良する手法を提案している．しかし，決定論的 DP の場合と異なって，反復の過程で考慮すべき状態量系列の範囲が縮小していくわけではないので，目的関数を状態量の期待値の近傍の局所的性質を用いて近似する方法はあまり合理的でない．本研究はこの点を改良し，問題を一部再定式化して確率ベクトルの関数の大域的な近似手法である統計的二次近似手法を用いた実時間操作手法を提案し，その計算機プログラム化の検討結果を提示するものである．その操作手法は，要約すれば，統計的二次近似手法[4)]を用いて linear dynamics, quadratic performance indices, gaussian uncertainties system (LQG system) に問題を変換し，open-loop feedback controler（以下 OLFC と略す）によりコントロールを決定するものである．

§2 統計的二次近似の理論

n 次元ベクトル ξ の関数 $g(\xi)$ と，平均値 $\bar{x}$，共分散行列 P をもつ n 次元確率ベクトル x が与えられているとき，$x \sim N(\bar{x}, P)$ と仮定して，定数 B^* と n 次元行ベクトル H，n 次元対称行列 A を

$$J(B^*, H, A) = E\{\,|\, g(x) - B^* - H(x - \bar{x}) - 1/2\cdot(x - \bar{x})^T A(x - \bar{x}) \,|^2\} \tag{2.1}$$

が最小になるようにとって，確率変数 $g(x)$ を

$$g(x) \simeq B^* + H(x - \bar{x}) + 1/2\cdot(x - \bar{x})^T A(x - \bar{x}) \tag{2.2}$$

と近似する．このような近似を統計的二次近似（Statistical Second-order Approximation）と呼ぶ．ベクトル値関数 $g(x)$ の統計的二次近似は各成分ごとに，統計的二次近似する．

$J(B^*, H, A)$ を最小にする B^*, H, A は，B^*, H, A の各成分で $J(B^*, H, A)$ を偏微分したものを 0 と等置して得られる方程式

$$B^* = E\{g(x)\} - 1/2\cdot tr[AP], \qquad PH^T = E\{(x - \bar{x})g(x)\} \tag{2.3}$$
$$PAP^T = E\{(x - \bar{x})(x - \bar{x})^T g(x)\} - E\{g(x)\}P$$

から定められる．tr[・] は正方行列の対角成分の和を表す．(2.3) 式を導く時に正規分布に対して成り立つ性質

$$E\{(x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j)(x_k - \bar{x}_k)\} = 0 \tag{2.4}$$
$$E\{(x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j)(x_k - \bar{x}_k)(x_l - \bar{x}_l)\} = P_{ij}P_{kl} + P_{ik}P_{jl} + P_{il}P_{kj}$$

を用いた． x_i, $\bar{x}_i$ はそれぞれ x, $\bar{x}$ の第 i 成分，P_{ij} = Cov{x_i, x_j} (x_i と x_j の共分散) である．(2.3) 式の右辺の値は正規分布の仮定から少なくとも理論上は算定できる．実際に正規分布仮定が成り立つことが保証されていず，単に $\bar{x}$ が x の推定値，P が $\bar{x}$ による x の推定誤差共分散行列である場合でも，(2.1) 式中の B^*, H, A を求めるための一つの近似として正規分布仮定を置く．

実は，$g(x)$ が x の整多項式であるなど簡単な関数である場合を除いて，(2.3) の右辺の期待値を計算することは困難である． これらの期待値を計算するのに利用できる数値積分公式の一つに Hermite-Gauss 積分公式がある． この公式によれば，$\bar{D}$ を N 次正値対角行列として，N 次確率ベクトル z が，$z \sim N(0, \bar{D})$ であるとき， N 次元実ベクトル ξ の関数 $f(\xi)$ によって定められる確率変数 $f(z) = f(z_1,\cdots,z_N)$ の期待値は，$\bar{D}$ の (i,i) 成分を d_i として，

$$E\{f(z)\} = \Sigma_{k_1,\cdots,k_N=1,\cdots,N_{HG}} f(\sqrt{d_1}\beta_{k1},\cdots,\sqrt{d_N}\beta_{kN})p_{k1}\cdots p_{kN} \tag{2.5}$$

によって近似的に求められる．ただし，N_{HG} は標本点の個数，β_i, $i=1,\cdots,N_{HG}$ は標準正規分布に対する標本点座標値，p_i, $i=1,\cdots,N_{HG}$ はこれらの標本点に対する重みである．

x の共分散行列 P が UD 分解されていれば，B^*, H, A を求めるのは比較的容易であり，二次項の平均値や分散も求められる．また，2 次項 は 1 次項とは無相関であるから，2 次項を新たに付加するノイズとして扱えば線形の理論が適用できる．

§3 実時間操作手法の展開

§3.1 問題の定式化とOLFC

本研究においては次のモデルを考える．この問題を (PBO) と呼ぶ．

状態方程式　$s_{k+1} = \Phi_k s_k + B_k u_k(I_k) + \xi_k$, $k=0,1,\cdots,T-1$ (3.1)

目的関数　$J = \Sigma_{k=0,\cdots,T-1} E\{l_{k+1}(s_{k+1}) + m_k(u_k(I_k))\}$ (3.2)

ただし，期待値は s_0, ξ_k, w_k, $k=0,\cdots,T-1$ についてとる．

コントロールの制約条件　$u_{jk}^{min} \leqq u_{jk}(I_k) \leqq u_{jk}^{max}$, $k=1,\cdots,n_u$, $k=0,\cdots,T-1$ (3.3)

状態量の確率的な制約条件

$$\int_{-\infty}^{s_{jk}^{min}} Pr(s_{jk})ds_{jk} \leqq \gamma_{jk}^{min},\ j=1,\cdots,n_s,\ k=1,\cdots,T \tag{3.4}$$

$$\int_{s_{jk}^{max}}^{+\infty} Pr(s_{jk})ds_{jk} \leqq \gamma_{jk}^{max},\ j=1,\cdots,n_s,\ k=1,\cdots,T \tag{3.5}$$

観測方程式　$z_k = f(s_k) + w_k$, $k=0,\cdots,T-1$ (3.6)

(3.6) の観測のもとで， 制約条件 (3.3)～(3.5) を満たし 目的関数 J を最小にするような $u_k(I_k)$, $k=0,\cdots,T-1$ を求める．

ただし， s_k : n_s 次元状態ベクトル．添字 k は，時刻 k を表す．$s_0 \sim N(\bar{s}_0, \bar{P}_0)$． $u_k(I_k)$: n_u 次元コントロールベクトル．$u_{jk}(I_k)$ は，u_k の第 j 成分． 時刻 k までの情報 I_k を用いて決められるべきコントロール． ξ_k : n_s 次元ノイズベクトル． $\xi_k \sim N(0, Q_{\xi k})$. $E\{\xi_k \xi_m^T\} = Q_{\xi k}\cdot\delta_{km}$. $E\{\xi_k s_0^T\} = 0$. Φ_k, B_k : それぞれ $n_s \cdot n_s$ 次，$n_s \cdot n_u$ 次係数行列．$l_k(s_k)$: 時刻 k での状態ベクトルの関数． $m_k(u_k(I_k))$: 時刻 k でのコントロールベクトルの関数． $u_{jk}^{min}, u_{jk}^{max}$: それぞれ u_{jk} の最小値と最大値． $Pr(s_{jk})$: 状態量 s_{jk} の確率密度関数． γ_{jk}^{min} : 状態量 s_{jk} が s_{jk}^{min} より小さくなる確率の許容値． γ_{jk}^{max}

：状態量 s_{jk} が s_{jk}^{max} より大きくなる確率の許容値．z_k ：m 次元観測ベクトル． w_k ：観測ノイズベクトル．$w_k \sim N(0, Q_{wk})$．$E\{w_k w_m^T\} = Q_{wk} \cdot \delta_{km}$.

以下に示す OLFCによりこの問題を解く．OLFC とは各時刻 k で次の操作を行うものである．

(a) $I_k = \{z_1, \cdots, z_k, u_0, \cdots, u_{k-1}\}$ を用いて， 状態 s_k の確率分布 $P(s_k/I_k)$を求める． ただし，z_m は時刻 m での観測ベクトルである．

(b) 時刻 k 以後は，観測がないものと仮定して， $\{u_k, \cdots, u_{T-1}\}^{olfc}$ を，状態とコントロールの関数の期待値で表される目的関数 J が最適になるように定める．

(c) u_k^{olfc} を適用する．

(d) 時刻 k+1 での情報 z_{k+1} を加えて，$I_{k+1} = I_k \cup \{u_k^{olfc}, z_{k+1}\}$ を求める．

(e) (a) にもどって繰り返す．

OLFC において最も重要な部分は (b) の部分である．この問題を (PB1) と呼び定式化すると次のようになる．状態量に関する確率的な制約条件は後に考慮する．

状態方程式 $s_{k+1} = \Phi_k s_k + B_k u_k + \xi_k$, $k=0,\cdots,T-1$ (3.7)

目的関数 $J = \Sigma_{k=0,\cdots,T-1}[E\{I_{k+1}(s_{k+1}) + m_k(u_k)\}]$ (3.8)

ただし，期待値 E は，確率変数 $s_0, \{\xi_k\}_{k=0,\cdots,T-1}$ についてとる．

制約条件 $u_{jk}^{min} \leqq u_{jk} \leqq u_{jk}^{max}$, $j=1,\cdots,n_u$, $k=0,\cdots,T-1$ (3.9)

(3.9) の制約条件を満たし，(3.8) の目的関数 J を最小にするような $u_k, k=0,\cdots,T-1$ を求める．

ただし， u_k ：n_u 次元コントロールベクトル．u_{jk} は，u_k の第 j 成分．

§3.2 アルゴリズム

§3.1 で定式化した問題 (PB1) の解法を示す．

$\{u_k\}_{k=0,\cdots,T-1}$ の候補値として，$\{u^{k(i)}\}_{k=0,\cdots,T-1}$ を選ぶ．これは，制約条件 (3.9) を満たしているとする．このコントロールを用いて

$$s_{k+1}^{(i)} = \Phi_k s_k^{(i)} + B_k u_k^{(i)},\ k=0,\cdots,T-1,\ s_0^{(i)} = \bar{s}_0 \tag{3.10}$$

$$P_{s,k+1} = \Phi_k P_{sk} \Phi_k^T + Q_{\xi k},\ k=0,\cdots,T-1,\ P_{s0} = \bar{P}_0 \tag{3.11}$$

とおく． ここで，$\delta s_k = s_k - s_k^{(i)}$, $k=0,\cdots,T-1$ とおく．コントロール $\{u_k^{(i)}\}_{k=0,\cdots,T-1}$ のもとでは，$\delta s_k \sim N(0, P_{sk})$ となる．この時，統計的二次近似を用いて，

$$I_k(s_k) = I_k(s_k^{(i)} + \delta s_k) \simeq 1/2\ \delta s_k^T N_{ssk} \delta s_k + N_{sk}^T \delta s_k + N_{s0k},\ k=1,\cdots,T \tag{3.12}$$

と近似できる．また，Taylor 展開を用いて，

$$m_k(u_k) = m_k(u_k^{(i)} + \delta u_k) \simeq 1/2\ \delta u_k^T N_{uuk} \delta u_k + N_{uk}^T \delta u_k + N_{u0k},\ k=0,\cdots,T-1 \tag{3.13}$$

と近似できる．

コントロール $\{u_k\}_{k=0,\cdots,T-1}$ の $\{u_k^{(i)}\}_{k=0,\cdots,T-1}$ からの偏差を $\delta u_k = u_k - u_k^{(i)}$, $k=0,\cdots,T-1$ と表す．δs_k, δu_k を用いて問題を書き直すと次のようになる．これを (PB2) と呼ぶ．

状態方程式 $\delta s_{k+1} = \Phi_k \delta s_k + B_k \delta u_k + \xi_k$, $k=0,\cdots,T-1$ (3.14)

目的関数 $J = \Sigma_{k=0,\cdots,T-1} E\{I_{k+1}(\delta s_{k+1}) + m_k(\delta u_k)\}$ (3.15)

ただし，期待値 E は，確率変数 δs_0, $\{\xi_k\}_{k=0,\cdots,T-1}$ についてとる．

制約条件 $\delta u_{jk}^{min} \leqq \delta u_{jk} \leqq \delta u_{jk}^{max}$, $j=1,\cdots,n_u$, $k=0,\cdots,T-1$ (3.16)

ただし、$\delta u_{jk}^{min} = u_{jk}^{min} - u_{jk}^{(i)}$, $\delta u_{jk}^{max} = u_{jk}^{max} - u_{jk}^{(i)}$.

(3.14)より δs_k の期待値 $\delta \bar{s}_k$ の推移は，

$$\delta \bar{s}_{k+1} = \Phi_k \delta \bar{s}_k + B_k \delta u_k,\ k=0,\cdots,T-1,\ \delta \bar{s}_0 = 0 \tag{3.17}$$

となり，δs_k の共分散行列の推移は (3.11) で与えられる．(3.15) の期待値を (3.11)，(3.17) を用

いて計算し定数項を除いた部分を $J^{\hat{}}$ とすると，

$$J^{\hat{}} = \Sigma_{k=0,\cdots,T-1} \{l^{\hat{}}_{k+1}(\delta \bar{s}_{k+1}) + m^{\hat{}}_k(\delta u_k)\} \quad (3.18)$$

ここに，$$l^{\hat{}}_{k+1}(\delta \bar{s}_{k+1}) = 1/2\cdot \delta \bar{s}_{k+1}{}^T N_{ss,k+1} \delta \bar{s}_{k+1} + N_{s,k+1}{}^T \delta \bar{s}_{k+1} \quad (3.19)$$

$$m^{\hat{}}_k(\delta u_k) = 1/2\cdot \delta u_k{}^T N_{uuk} \delta u_k + N_{uk}{}^T \delta u_k \quad (3.20)$$

であり、$J^{\hat{}}$ を最小にすればよい．

u_k, $k=0,\cdots,T-1$ を一列に並べた列ベクトルを u とする．gradient vector を

$$\nabla_{\delta uk} J^{\hat{}}(0) = N_{uk} + B_K{}^T P_{k+1}{}^T,\ k=T-1,\cdots,0 \quad (3.21)$$

ここに，$$P_T = N_{sT},\ P_k = \Phi_k{}^T P_{k+1} + N_{sk},\ k=T-1,\cdots,1 \quad (3.22)$$

で計算する．これを用いて

$$w^{(i)} = | u^{(i)} - [u^{(i)} - \nabla_{\delta uk} J^{\hat{}}(0)]^{++} | \quad (3.23)$$

を計算する． $[\cdot]^{++}$ は， $[\cdot]^{++}$ の中の値が u の上下限を超えるとき超過分を切り捨てる操作である．$w^{(i)}$ が十分に小さくなければ $\delta u = 0$ は（PB2）の最適解ではない．このとき後に示す方法で $\delta u^{(i)}$ を求める．元のコントロールの候補値に $\delta u^{(i)}$ を加えて

$$u^{(i+1)} = u^{(i)} + \delta u^{(i)} \quad (3.24)$$

を新たにコントロールの候補値とする．$\delta u = 0$ が最適解になるまで，すなわち $w^{(i)}$ が十分に小さくなるまで以上の手順を最初に戻り繰り返す． $\delta u = 0$ が問題（PB2）の最適解である時のコントロールの候補値 $\{u_k{}^{(i)}\}_{k=0,\cdots,T-1}$ が問題（PB1）の最適解である．

$\delta u^{(i)}$ は次のようにして求める．

① 添字の集合 $A^{++}(u^{(i)})$ を，

$$\begin{aligned} A^{++}(u^{(i)}) = \{ & jk \ /\ u_{jk}{}^{min} \leqq u_{jk}{}^{(i)} \leqq u_{jk}{}^{min} + \varepsilon^{(i)} \text{ かつ } (\partial J^{\hat{}}(0) / \partial \delta u_{jk}) > 0, \\ & \text{または } u_{jk}{}^{max} - \varepsilon^{(i)} \leqq u_{jk}{}^{(i)} \leqq u_{jk}{}^{max} \text{ かつ } (\partial J^{\hat{}}(0) / \partial \delta u_{jk}) < 0, \\ & j=1,\cdots,n_u,\ k=0,\cdots,T-1\} \end{aligned} \quad (3.25)$$

で定める．ただし， $\varepsilon^{(i)} = \min\{\varepsilon, w^{(i)}\}$, ε は小さな正の数である． u_{jk}, $jk \ \varepsilon\ A^{++}$ を active な制約条件に対応するコントロールと呼ぶ． コントロールの改善方向を active な制約条件に対応するコントロールと active でない制約条件に対応するコントロールに分割して求める．

② $\{K_k\}_{k=1,\cdots,T-1}$, $\{k_k\}_{k=1,\cdots,T-1}$ を次式により計算する．

$$K_T = N_{ssT}, \qquad k_T = N_{sT}$$

$$K_k = N_{ssk} + \Phi_k{}^T K_{k+1} \Phi_k - [(B_k{}^T K_{k+1} \Phi_k)^r]^T \cdot [(B_k{}^T K_{k+1} B_k + N_{uuk})^{rc}]^{-1} \cdot [(B_k{}^T K_{k+1} \Phi_k)^r],$$

$$k_k = N_{sk} + \Phi_k{}^T k_{k+1} - [(B_k{}^T K_{k+1} \Phi_k)^r]^T \cdot [(B_k{}^T K_{k+1} B_k + N_{uuk})^{rc}]^{-1} \cdot [(B_k{}^T k_{k+1} + N_{uk})^r],$$

$$k=T-1,\cdots,1.$$

ただし，$(X)^r$, $(X)^{rc}$ は $A^{++}(u^{(i)})$ に含まれるすべての jk に対応する行， 行と列を消去したものを意味する．

③ active でない制約条件に対応するコントロールの改善方向 $\delta u_k{}^*$ を次式により求める．

$$\delta u_k{}^* = - D_k[L_k \delta \bar{s}_k{}^* + \Lambda_k], \quad (3.26)$$

ここに， $$D_k = [(B_k{}^T K_{k+1} B_k + N_{uuk})^{rc}]^{-1}, \qquad L_k = (B_k{}^T K_{k+1} \Phi_k)^r,$$

$$\Lambda_k = (B_k{}^T k_{k+1} + N_{uk})^r, \qquad k=0,\cdots,T-1.$$

$$\delta \bar{s}_{k+1}{}^* = \Phi_k \delta \bar{s}_k{}^* + B_k \delta u_k{}^*,\ \delta \bar{s}_0{}^* = 0,\ k=0,\cdots,T-1. \quad (3.27)$$

ただし， (3.27) 式より $\delta \bar{s}_k{}^*$ を求めるときは，active な制約条件に対応するコントロールは変化しないとする.すなわち，$\delta u_{jk}{}^* = 0$, $jk\ \varepsilon\ A^{++}(u^{(i)})$ であるとする．

④ Hessian の対角成分を次式より計算する．

$$\nabla^2{}_{\delta uk} \hat{J}(0) = N_{uuk} + B_k{}^T G_{k+1} B_k, \ k=T-1,\cdots,0 \tag{3.28}$$

ここに，　$G_T = N_{ssT}$，　$G_k = \Phi_k{}^T G_{k+1} \Phi_k + N_{ssk}$, $k=T-1,\cdots,1$

である．これを用いて，active な制約条件に対応するコントロールの改善方向を次のようにとる．

$$\delta u_{jk}{}^* = -\left(\partial^2 \hat{J}(0) / \partial u_{jk}{}^2 \right)^{-1} \cdot \left(\partial \hat{J}(0) / \partial u_{jk} \right), \ jk \ \varepsilon \ A^{++}(u^{(i)}) \tag{3.29}$$

⑤ (3.26), (3.27), (3.29) から得られた改善方向で斜影法と Armijo 法 とを組み合わせて，制約条件を満たしかつ目的関数　J の値を減少させるように step-size $\alpha^{(i)}$ を $\alpha^{(i)} = \beta^{m_i}$ と決める．m_i は非負の整数で

$$J(0) - J([\beta^m \delta u^*]^{++}) \geqq -\sigma \left[\beta^m \sum_{jk \notin A^{++}(u^{(i)})} \frac{\partial \hat{J}(0)}{\partial u_{jk}} \delta u_{jk}{}^* + \right.$$
$$\left. + \sum_{jk \ \varepsilon \ A^{++}(u^{(i)})} \frac{\partial \hat{J}(0)}{\partial u_{jk}} [\beta^m \delta u_{jk}{}^*]^{++} \right] \tag{3.30}$$

ここに，　$\beta \ \varepsilon \ (0, 1)$，　$\sigma \ \varepsilon \ (0, 1/2)$，

$$[\beta^m \delta u_{jk}{}^*]^{++} = \begin{cases} \delta u_{jk}{}^{min}, & \beta^m \delta u_{jk}{}^* \leqq \delta u_{jk}{}^{min} \text{のとき}, \\ \beta^m \delta u_{jk}{}^*, & \delta u_{jk}{}^{min} \leqq \beta^m \delta u_{jk}{}^* \leqq \delta u_{jk}{}^{max} \text{のとき}, \\ \delta u_{jk}{}^{max}, & \delta u_{jk}{}^{max} \leqq \beta^m \delta u_{jk}{}^* \text{のとき}, \end{cases} \tag{3.31}$$

を満たす最小の m_i である．$\alpha^{(i)}$ を用いて改善すべきコントロール $\delta u^{(i)}$ は次式で得られる．

$$\delta u^{(i)} = [\alpha^{(i)} \delta u^*]^{++} \tag{3.32}$$

δs_k は $N(\delta \bar{s}_k, P_{sk})$ に従い，$\{P_{sk}\}_{k=0,\cdots,T}$ は $\{\delta u_k\}_{k=0,\cdots,T-1}$ に依存しないことに注意すると，状態ベクトルの確率的な制約条件は，状態ベクトルの期待値の制約条件 $\bar{s}_k{}^{min} \leqq \bar{s}_k \leqq \bar{s}_k{}^{max}$ に変換される．この制約条件は，ペナルティ関数を目的関数に付加し反復することによって満足させる．

§4 適用と考察

図 1 に (PB1) への本手法の適用例を示す．ここで用いた準ニュートン法は線形制約で Hessian を BFGS 公式を用いて逐次近似する最適化手法である．次元が小さい場合，準ニュートン法によっても，真の解を得ることが可能である．本手法，準ニュートン法によるコントロールの値はよく一致し，本手法によっても真の解に充分近い解が得られる．また，次元の小さな図 1 の例 B でもすでに本手法が計算時間の点で有利であることがわかる．

§5 結論

本研究で示した手法は，特に以下の点で有効である．(1) DDP に似た方法を用いることによって，次元の呪いから解放されると同時に計算の効率化が実現される．(2) 目的関数の状態ベクトルに関する部分は，統計的二次近似を用いて二次関数に近似する．状態ベクトルが確率変数であるから，Taylor 展開を用いて局所的に近似するよりも大域的に近似する統計的二次近似を用いる方がよい．

[参考文献]　1) Jacobson, D. and D. Mayne ; Differential Dynamic Programming, Elsevier, New York, 1970.　2) Murray, D. M. and S. J. Yakowitz ; Constrained Differential Dynamic Programming and Its Application to Multireservoir Control, Water Resources Research, Vol.15, No.5, pp.1017-1027, 1979.　3) Geogakakos, A. P. and D. H. Marks ; Real Time Control of reservoir Systems, Dept. of Civil Engineering, M.I.T., TR No. 301, cambridge, Mass., 1985.　4) 高棹琢馬，椎葉充晴，富澤直樹 ; 統計的二次近似理論を適用した流出予測システムの構成，京都大学防災研究所年報第27号B-2，別刷pp.1-19, 1984.

A

$n_s = 1, \quad n_u = 1, \quad T = 3$

状態方程式

$$s_{k+1} = s_k - u_k + 0.3 + \xi_k, \ k = 0,\cdots,T-1$$

$$Q_{\xi k} = 0.0001, \ k=0,\cdots,T-1, \qquad \bar{s}_0 = 0.5, \qquad P_{s0} = 0.0001$$

目的関数

$$J = E\{ \Sigma_{k=0,\cdots,T-1} (l_{k+1}(s_{k+1}) + m_k(u_k)) \}$$

$$l_k(s_k) = \mathrm{EXP}\{ (a_k - s_k)^2 \}, \ k=1,\cdots,T, \quad a_1 = 0.4, \ a_2 = 0.5, \ a_3 = 0.6$$

$$m_k(u_k) = \mathrm{EXP}\{ (b_k - u_k)^2 \}, \ k=0,\cdots,T-1, \ b_0 = 0.2, \ b_1 = 0.3, \ b_2 = 0.4$$

コントロールに関する制約条件

$$0 \leqq u_k \leqq 0.5, \ k=0,\cdots,T-1$$

方法	本研究での方法	準ニュートン法	コントロール	本研究での方法	準ニュートン法
繰り返し回数	3	4	U_{10}	0.28495	0.28509
計算時間 (ms)	25	41	U_{11}	0.26895	0.26848
目的関数値	6.03645	6.03645	U_{12}	0.32310	0.32289

B

$n_s = 2, \quad n_u = 2, \quad T = 3$

状態方程式

$$s_{k+1} = \Phi_k s_k + B_k u_k + C_k + \xi_k, \ k = 0,\cdots,T-1$$

$$\Phi_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_k = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad C_k = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.0 \end{bmatrix} \quad Q_{\xi k} = \begin{bmatrix} 0.0001 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0001 \end{bmatrix}$$

$k=0,\cdots,T-1$

$$\bar{s}_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad P_{s0} = \begin{bmatrix} 0.0001 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0001 \end{bmatrix}$$

目的関数

$$J = E\{ \Sigma_{k=0,\cdots,T-1} (l_{k+1}(s_{k+1}) + m_k(u_k)) \}$$

$$l_k(s_k) = \mathrm{EXP}\{ (a_{1k} - s_{1k})^2 + (a_{2k} - s_{2k})^2 \}, \ k=1,\cdots,T$$

$$m_k(u_k) = \mathrm{EXP}\{ (b_{1k} - u_{1k})^2 + (b_{2k} - u_{2k})^2 \}, \ k=0,\cdots,T-1$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.45 & 0.5 & 0.55 \\ 0.55 & 0.6 & 0.65 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.3 & 0.35 \\ 0.35 & 0.4 & 0.45 \end{bmatrix}$$

コントロールに関する制約条件

$$0 \leqq u_{ik} \leqq 0.5, \ i=1,\cdots,n_u, \ k=0,\cdots,T-1$$

方法	本研究での方法	準ニュートン法
繰り返し回数	3	5
計算時間 (ms)	29	95
目的関数値	6.05835	6.05835

コントロール	本研究での方法	準ニュートン法
U_{10}	0.30000	0.30011
U_{20}	0.24334	0.24390
U_{11}	0.30712	0.30738
U_{21}	0.28664	0.28569
U_{12}	0.34150	0.34115
U_{22}	0.35882	0.35960

図 1 (PB1) への本手法の適用例