

渇水・豊水持続曲線と Hurst数の関係について

Relation between DDC・FDC and Hurst number

山梨大学工学部 正 員 竹内邦良
山梨大学大学院 学生員 吉川正剛

1. はじめに

渇水・豊水持続曲線(DDC・FDC)は、水文時系列の移動平均の年最小値及び年最大値を、その平均再帰間隔をパラメータとして、平均期間長と対応させたものであり、原時系列の低位・高位持続性を確率的に表わす水文統計量である。これは貯水池管理等に利用される一方、水文指標として水文過程を持続性を通して分類把握する為にも利用でき、特に後者について筆者等は、日本及び世界の降水量・流量時系列に適用し、その有用性を示してきた²⁾。本論文ではDDC・FDCと極めて関係が深いと考えられる、時系列の長期持続性を支配しているパラメータであるHurst数について検討し、DDC・FDCとHurst数との関係を明らかにする。具体的には(1)実データのHurst数を推定する。(2)Hurst数を保存できるモデルを用いて模擬発生させたデータのDDC・FDCを描き、その関係を明確にする。但しデータの模擬発生にはFFGN(Fast Fractional Gaussian Noise)を用いる³⁾。

2. 渇水・豊水持続曲線の定義

渇水・豊水持続曲線(DDC・FDC)は移動平均水文量の年最小値、年最大値のみを取り出して、その生起確率をパラメータとして横軸に移動平均期間長、縦軸にパラメータである生起確率を持つ年最小、年最大移動平均水文量をとったもので、これを両対数紙上にプロットする。定義式を以下に示す。

$$\text{DDC: } f_k(m) = k\text{-th smallest} \cdot \min_{j=1, \dots, N} \frac{1}{m} \sum_{t=t_1}^{t_1+m-1} q_t / \bar{q} \quad (2-1)$$

$$\text{FDC: } f_k^*(m) = k\text{-th largest} \cdot \max_{j=1, \dots, N} \frac{1}{m} \sum_{t=t_1}^{t_1+m-1} q_t / \bar{q} \quad (2-2)$$

$$P_k = 1/T_k = k/(N+1) \quad (2-3)$$

ここに $q(t)$; t 時点における水文量、 $\bar{q}$; $q(t)$ の全記録期間の平均値、 m ; 移動平均期間長、 P_k ; DDCにおいては m 日移動平均が $f_k(m)$ を下回る確率、FDCにおいてはこれを上回る確率、 T_k ; 同確率年、 N ; データ年数。

3. Hurst数とHurst現象

★ Hurst数 定義式は以下の通りである。

$$E [R(t,s)/S(t,s)] \propto s^H \quad (3-1)$$

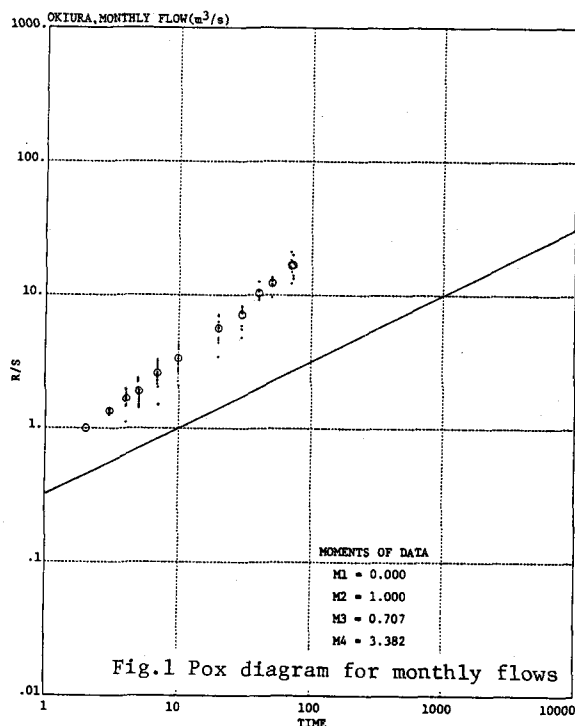
$$R(t,s) = \max_{1 \leq u \leq s} \left[\sum_{v=1}^u X(t+v) - u\bar{X}(t,s) \right] - \min_{1 \leq u \leq s} \left[\sum_{v=1}^u X(t+v) - u\bar{X}(t,s) \right] \quad (3-2)$$

$$s^2(t,s) = s^{-1} \sum_{v=1}^s \{X(t+v) - \bar{X}(t,s)\}^2, \bar{X}(t,s) = s^{-1} \sum_{v=1}^s X(t+v) \quad (3-3, 3-4)$$

ここに H は Hurst数、 E は期待値演算子、 $R(t,s)$ はAdjusted range、 $S(t,s)$ は標本標準偏差、また $X(t)$ は t 時点の水文量、 $\bar{X}(t,s)$ は標本平均である。

貯水池を例にすると、この貯水池が満杯から出発するとして、その後期間長 s のあいだ通年の平均流量を不足なく供給し続けるために必要な貯水池容量が Range である。Hurst 現象とは、この Range が期間長 s の 0.5 乗ではなくそれ以上のべき乗 H に比例するという現象である。この現象は、時系列が Markov 過程のようにその過去の記憶がある時点から消失するのではなく更に長い持続性を持った場合に起こる現象と言われている。(尚非定常性によるなどの説もある。)

Hurst は 100 年間にわたる 14 俣川の流量データから H が普通 0.6 から 0.8 程度であり、代表的な数は 0.7 であることを示した。⁴⁾ その後 Feller(1951)等によって流量時系列が Markov 過程に従う限り H は漸近的に 0.5 に近づくことが示された。また Mandelbrot and Wallis は流量に限らず雨量、太陽黒点、昆虫の分布等多くの事例で $H > 0.5$ であることを示しており、自然界での Hurst 現象の存在を明らかにしている。⁵⁾



4. 実水文データの Hurst 現象

a) Pox diagram

Hurst 数を求める際の期待値計算は、全データ数を N とすると、時間長 s は N 種類、 t は $N-s+1$ 種類を考えることができる。しかしながら t は期間 s が重ならないように値を限定すれば $(N-s+1)/S$ しか選べない。次にそれぞれの s に対して t の異なるものについて $R(t, s)/S(t, s)$ の平均値を計算し、両対数紙上に横軸に s 、縦軸に $R(t, s)/S(t, s)$ の平均値をプロットする。この点を結んだ直線の傾きから Hurst 数 H を推定することができる。このような図は Pox diagram と呼ばれている。

b) 沖浦、三面、厚東川の日、月流量における Hurst 現象 (周期性を除去した場合について)

次に a) に述べた Pox diagram を用いて実際の日、月流量の Hurst 数を推定する。

ここでは、 s が小さい間は一つの s に対し $R(t, s)/S(t, s)$ を 20 通りの t について計算しこれを小さな円で示し、その平均値を大きな円で示した。従ってこの大きな円を通る線の傾きが Hurst 数 H となる。 s が大きくなるにつれて時間長が重ならないような t の種類は

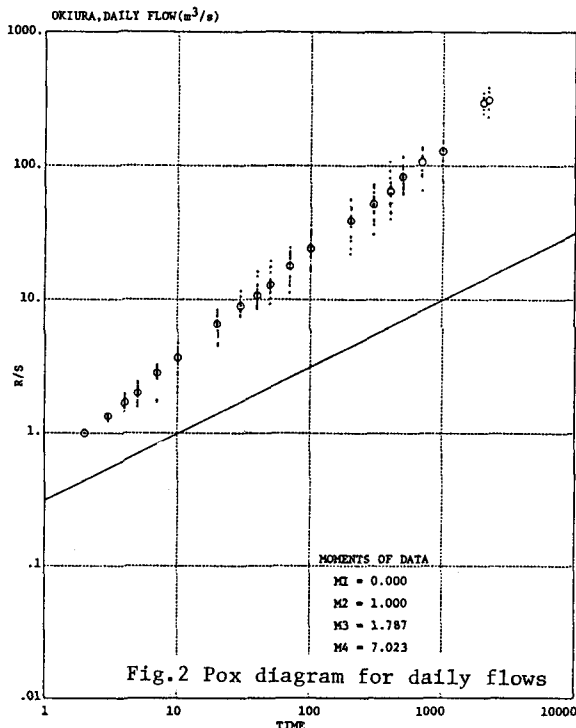
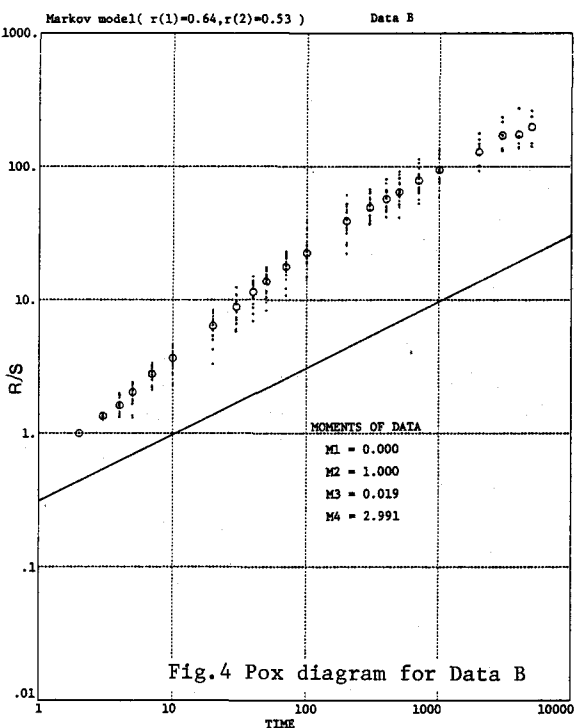
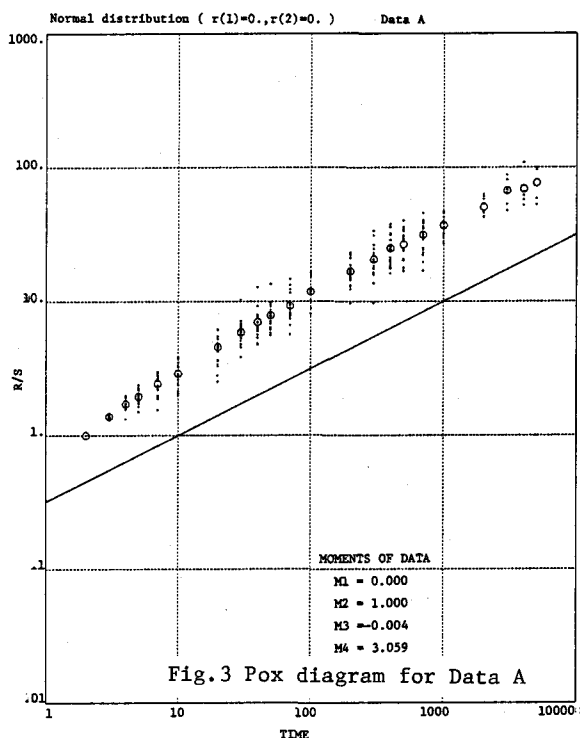


Table 1 Estimated H

Site	H
Okiura, Aomori	
monthly flow	0.78
daily flow	0.79
Miomote, Nigata	
monthly flow	0.59
daily flow	0.59
Kotogawa, Yamaguchi	
monthly flow	0.55
daily flow	0.76
Data A	0.50
Data B	0.51

少なくなつてゆくが、これを 4 以上とれなくなる最大の s まで計算をした。データは沖浦（青森）、三面（新潟）、厚東川（山口）における日、月流量であり、これを日あるいは月について基準化し周期性を取り除いたものであり、Figs.1,2 に示したのはこのうち沖浦の月、日流量の Pox diagram である。これ以外の地点及び後で述べる Data A, B の Hurst 数 H を Table 1 に示す。尚示した H は時間長が一番大きい部分でのグラフの傾きである。

Fig.1 及びその他の月流量においては、時間長によって H の値が変化する。即ち、時間長 10 months 以内での傾きは約 0.75 であり、その後の傾きは Table 1 に示した値になっている。日流量の中でも三面において時間長 200-300 days で傾きが 0.80 から 0.57 に変化しているが、Fig.2 にはこのような傾きの変化は見られない。また図中実線で示した直線の傾きは 0.5 であるがこれらのグラフの傾きはいずれもこれより大きい。更にこの結果と比較する為に、独立な標準正規過程（Data A）、lag 1, lag 2 の自己相関係数が 0.64, 0.53 となるように Markov モデルを用いて発生させたデータ（Data B）の Pox diagram をそれぞれ Figs.3, 4 に示したが、Fig.3 (Data A) については時間長 5 month 以内での傾きはやや大きい、その後の傾きは 0.5 である。Fig.4 (Data B) についても、時間長約 100 months 以内で傾き 0.82 でありその後は 0.51 である。従って Data A, B ともに実線の傾き 0.5 に近づいている。これらのことから、Figs.1, 2 は、 $H > 0.5$ という Hurst 現象の存在を示していると言える。



5. Hurst 数を保存できるモデルによるデータの模擬発生

Hurst数を保存できるデータの模擬発生にはManderbrotによって開発されたFFGN(Fast Fractional Gaussian Noise)を用いた。これはHurst現象を保存できるような自己相関係数をもつデータを、Markov過程に従う変数の重み付き和として発生させるものである。t時点におけるデータをX(t)とし、これを式で表わすと以下ようになる。

$$X(t) = \sum_{i=1}^N W_i \cdot U_i(t, r_i) \quad (5-1)$$

ここに $U_i(t, r_i)$ は lag 1 の自己相関係数が r_i である Markov 正規過程に従う時系列であり、 $U_i(t, r_i) = r_i \cdot U_i(t-1, r_i) + \sqrt{1-r_i^2} \cdot G(t)$ という形で求められる($G(t)$ は独立な標準正規変量)。 W_i は $U_i(t, r_i)$ に対する重みであるが、これは $X(t)$ の lag s の自己相関係数が次式に示す $C(s, H)$ になるように決定する。

$$C(s, H) = s^{-1} (|s+1|^{2H} - 2|s|^{2H} + |s-1|^{2H}) \quad (5-2)$$

ここに H は $0 < H < 1$ の実数であるが、このような自己相関係数を持つ時系列は Hurst数 H を持つことがManderbrot等によって証明されている⁶⁾。この結果 N, r_i, W_i は以下ようになる。

$$W_1^2 = 1 - B^{H-1} H(2H-1) / \Gamma(3-2H) \quad (5-3)$$

$$W_i^2 = H(2H-1) (B^{1-H} - B^{1-H}) B^{2(H-1)(i-2)} / \Gamma(3-2H) \quad (i=2, \dots, N) \quad (5-4)$$

$$r_1 = 0, \quad r_i = \exp[-B(2^{-i})] \quad (i=2, \dots, N) \quad (5-5, 5-6)$$

$$N = \lceil |\ln(TQ) / \ln B| \rceil + 2 \quad (5-7)$$

N ; データを発生させるのに用いる Markov 過程の種類数、 T ; データ発生個数、 B, Q ; 定数 (通常 $B=2 \sim 4, Q=4 \sim 6$)、 $\lceil X \rceil$ は X を超える最小の整数

この方法を用いて発生させた $H=0.9$ のデータの Pox diagram を Fig.5 に又データ内容を Fig.6 に示す。このようにFFGNではデータに任意のHurst数を保存させることができる。

6. DDC・FDC と Hurst 数の関係について

DDC・FDC と Hurst数の関係を検討する為に5.に示した FFGN を用いて模擬発生させたデータのDDC・FDCを描く。発生させた、5種類のHurst数を持つそれぞれのデータは平均0、分散1、歪度0、尖り度3という標準正規分布にほぼ近いMomentを示している。しかし実際のデータのDDC・FDCと同様のグラフにプロットする為に、データを次のようにして用いた。

$$\begin{cases} q(t) = X(t) + 3 & (X(t) > -3) \\ q(t) = 0 & (X(t) \leq -3) \end{cases} \quad (5-8)$$

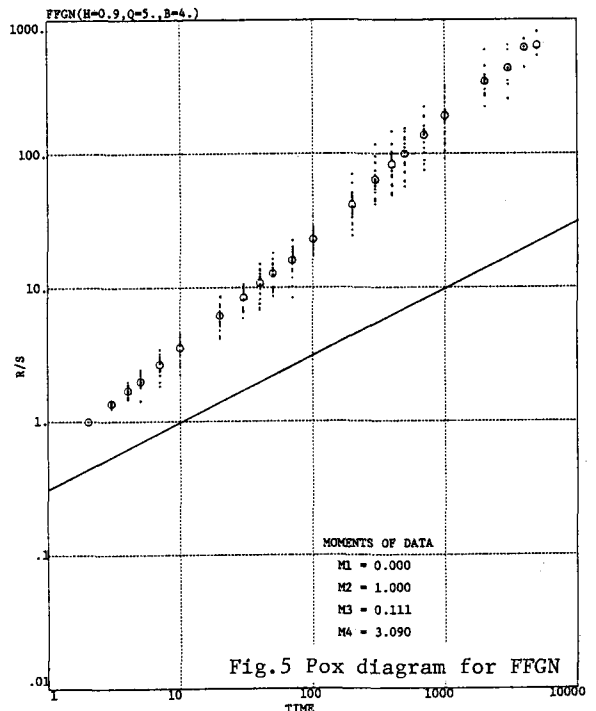


Fig.5 Pox diagram for FFGN

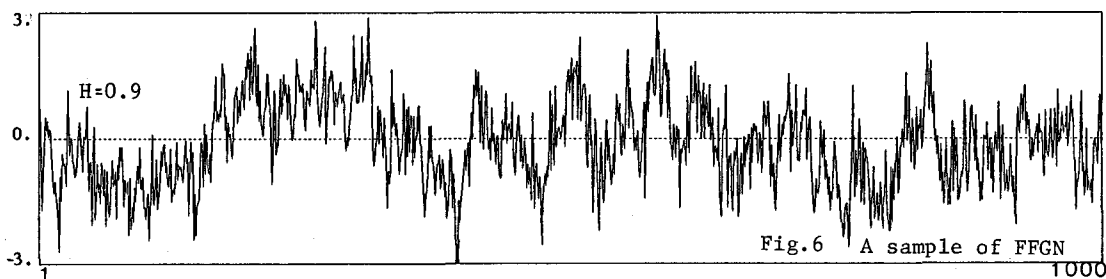


Fig.6 A sample of FFGN

ここに $X(t)$ は式(5-1)に示したデータ、 $q(t)$; t 時点におけるデータである。そして $q(t)$ ひとつひとつを月データとみなし、12個で1年分のデータとした。Figs.7,8に示したDDC・FDCは、このようなデータを300年分10組発生させ、それぞれについてDDC・FDCを求め、これを平均したものである。Hurst数については $H=0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ の5種類とし、図に示したのは $H=0.6, 0.9$ のもので、又 $H=0.5$ のデータは式(5-8)において $X(t)$ を独立な標準正規乱数としたものである。又パラメータである確率年は2, 5, 10, 20, 50年とした。これらを見てみると、 H が大きいほど確率年の違いによるDDC・FDCの差が大きくなっており、又FDCは H が大きいほど直線に近づく傾向があることが分かる。

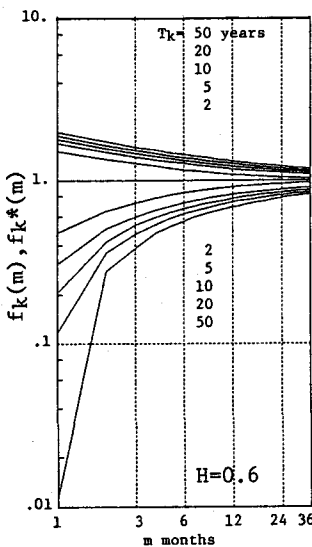


Fig.7 DDC・FDC for FFGN

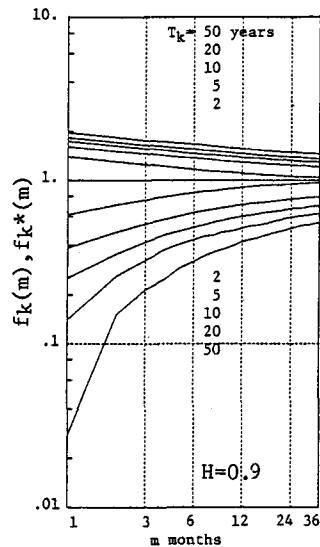


Fig.8 DDC・FDC for FFGN

Figs.9,10はDDC・FDCにおけるHurst数の影響を分かり易くするためにFigs.7,8で用いたデータにおいて、確率一定のDDC・FDCを H をパラメータとして示したものである。これより、移動平均期間 $m \geq 2$ では H が大きいほど、DDC・FDCともに長期平均、即ち縦軸1から離れていることが分かる。 $m=1$ においてはこれが H の値の大小とは逆の順序になっているが、この理由ははっきりしない。

ところでFFGNを用いて発生させたデータは式(5-2)に示したように自己相関係数を任意に決めることができず H を決めると自己相関係数も決定してしまう。従ってFigs.7-10に示したDDC・FDCの違いが必ずしもHurst数の違いによるものとは言えず、lagの小さい自己相関係数の違いによる影響も大きいものと思われる。そこでFigs.7-10に用いたそれぞれのデ

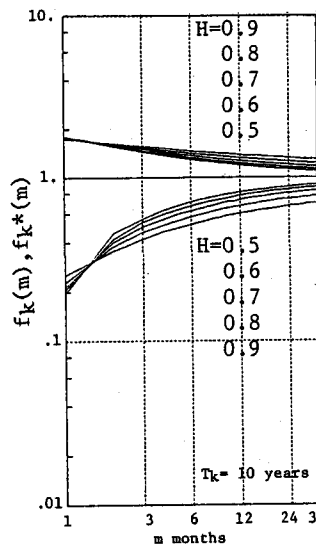


Fig.9 DDC・FDC for FFGN

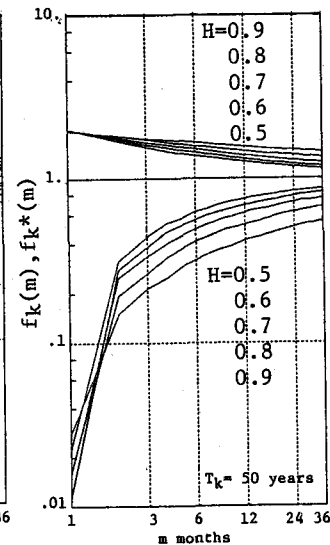


Fig.10 DDC・FDC for FFGN

データの lag 1, lag 2 の自己相関係数を Table 2に示すが、これらとまったく同じ lag 1, lag 2の自己相関係数をもつ 5種類のデータを Markov モデルを用いて発生させた (Table 1中の Data B は $H=0.9$ のデータと lag 1, 2の自己相関係数が等しいが Pox diagram は Fig. 4. に示したとおり $H=0.51$ である。)。これらの Hurst 数は約 0.5 であるが、このそれぞれの DDC・FDC は Figs. 7-10 に示したデータの DDC・FDC と良く似た形状を示した。又これら DDC・FDC と Figs. 7-10 の DDC・FDC とを確率年の等しいものどうしで比較したものが Fig. 11 である ($H=0.6, 0.9$ のデータとこれに対応する自己相関係数をもつ $H=0.5$ のデータを示した)。これより Figs. 7-10 の DDC・FDC には lag 1, lag 2 の自己相関係数の影響がかなり表われており、必ずしも Hurst 数の影響を示しているとはいえないことが分かった。

Table 2 Auto correlation of data

H	lag 1	lag 2
0.5	0.00	0.00
0.6	0.11	0.07
0.7	0.24	0.17
0.8	0.43	0.32
0.9	0.64	0.53

6. まとめ

以上より、1) 沖浦、三面、厚東川という 3 観測地点における日・月流量についてのデータの長期持続性の存在を示す Hurst 現象が認められた。2) DDC・FDC と Hurst 数の関係については、Hurst 数を保存するデータを発生させることのできる FFGN では自己相関係数を任意の値にできないため、今回の方法では必ずしも Hurst 数のみの違いによる DDC・FDC の違いについては確認できなかった。従ってに今後は FFGN 代わるモデルを検討しなければならない。又実データの DDC・FDC から Hurst 数として現われる長期持続性を読み取ることは、これからの課題である。

* 参考文献

- 1) 竹内・富田・伊藤：給水用貯水池のための DDC モデル・カーブ、水理講演会論文集、第 28 回、pp. 21-26、1984。
- 2) 竹内・吉川：渇水・豊水持続特性に関する世界水文世界地図作成の試み、水理講演会論文集、第 31 回、1987。(本論文集中に発表)
- 3) Mandelbrot, B.B.: A fast fractional Gaussian noise generator, Water Resour. Res., Vol. 7, No. 3, pp. 543-553, 1971.
- 4) Hurst, H.E.: Long term storage capacities of reservoirs, Am. Soc. Civil Engineers Trans, Vol. 116, pp. 776-808, 1951
- 5) Mandelbrot B. and J.R. Wallis: Some long run properties of geophysical records, Water Resour. Res., Vol. 5, No. 2, pp 321-340, 1969.
- 6) Mandelbrot, B.B. and J.W. Van Ness: Fractional Brownian motions, fractional Gaussian noise and applications, SIAM Review of Applied Mathematics, Vol. 10, No. 4, pp. 422-437, 1968

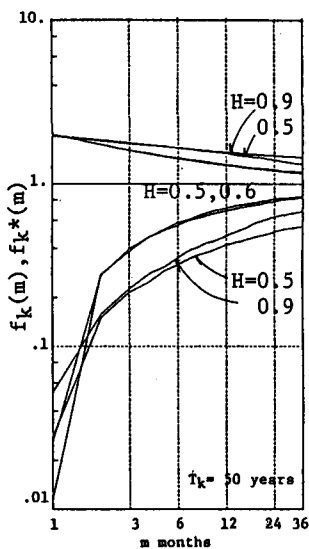


Fig. 11 DDC・FDC for FFGN and Markov model