

Freund分布による条件付確率降雨波形と計画降雨波形の決定法

Conditional Probability Storm Pattern and Stochastic Design Storm Pattern

徳島大学工学部 正員 端野道夫

1. は し が き

建設省河川砂防技術基準¹⁾によれば、計画降雨は降雨量、その時間分布、地域分布の3要素からなり、降雨量としては流域の大きさ、降雨特性等を考慮して、1～3日の継続時間の降雨量が採用される場合が多い。計画の規模は、一般には降雨量の年超過確率で評価される。次に、大洪水をもたらした降雨や流域で特に生起頻度の高いパターンに属する降雨を選び、これら実績降雨の各時刻の降雨強度を y^*/y 倍(y^* :計画降雨量、 y :実績降雨量)し、これを計画の時間分布とする。この方法を実績降雨の引き伸ばし法というが、実績降雨を引き伸ばすことによって不合理が生じることがあり、その場合、経験的に引き伸ばし率 y^*/y を2程度以下にするか、時間分布に修正を加える。

このように、現行の計画降雨の時間分布すなわち降雨波形の決定法は確率統計的根拠が明確でない。特に、洪水のピーク流量に支配的な(ピーク降雨強度はもちろんのこと)継続時間の降雨強度と計画降雨量の確率的関係は重要であるにもかかわらず定かでない。そこで、本論文では総雨量、ピーク降雨強度の二変数年最大値の同時分布より両者の確率的関係を明らかにするとともに、Freundの二変数指数型分布より導かれた条件付確率降雨波形を用いて、計画降雨波形を確率的に設定する方法を提案する。

2. ピーク降雨強度が与えられたときの条件付確率降雨波形

いま、図-1のような一山型降雨を考える。時間軸 t_b, t_a をピークを基準にその前後にとる。単位時間 Δt 前後の降雨強度を x_{i-1}, x_i とし、両者の周辺確率分布は同一であるとすれば、二変数 (x_{i-1}, x_i) に関するFreund分布の確率密度関数 $g(x_{i-1}, x_i)$ は次式のようになる。²⁾

$$g(x_{i-1}, x_i) = \begin{cases} \alpha\beta \exp\{-\beta x_{i-1} - (2\alpha - \beta)x_i\} & (0 \leq x_i \leq x_{i-1}) \\ \alpha\beta \exp\{-\beta x_i - (2\alpha - \beta)x_{i-1}\} & (0 \leq x_{i-1} \leq x_i) \end{cases} \quad (1)$$

ここに、 $\alpha, \beta (>0)$ はパラメーターである。原データの降雨強度 x_i を $z_i = (x_i - u_z)/\sigma_z$ に変換し、 $z_i < z_{i-1}$ なる条件を考慮すれば、 z_{i-1} が与えられたときの z_i の条件付確率分布関数は次式のように変形される。

$$\begin{aligned} \exp(-\lambda z_i) &= 2G \cdot (1-k) \exp(-\lambda z_{i-1}) + (1-G) & (k \neq 1/2, 0 < k \leq 1) \\ z_i &= G \cdot z_{i-1} + (2\sqrt{7}/7) \cdot G & (k = 1/2) \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、 $k \equiv \alpha/\beta$, $\lambda \equiv (2k-1)\sqrt{3k^2+1}/2k$ であり、 G は条件付確率 $G(z_i|z_{i-1})$ の略記号である。 $k \equiv \alpha/\beta$ は z_i の自己相関係数 $\rho_x = (1-k^2)/(1+3k^2)$ を規定し、 $0 \leq \rho_x < 1$ に対し $1 \geq k > 0$ である。実用的には、この範囲の k を対象とすれば良く、 k を自己相関指標とよぶことにする。条件付確率 G は現象的には時間変化するはずであるが、計画降雨波形を設定するためには、ピーク前後でそれぞれ、 $G = G_b = \text{一定}$, $G = G_a = \text{一定}$ と置くことが許されよう。

つまり、ピーク降雨強度 z_p および自己相関指標 k 、条件付確率 G が与えられると、式(2)より $z_i (i=1, 2, \dots)$ が順次求められ、単位時間 Δt の(片側)離散的降雨波形が得られることになる。これを条件付確率降雨波形と呼ぶことにする。図-2(式(2)と等価な、連続時間 t に関する式に変換したものによる²⁾)に示すように、降雨波形は自己相関指標 k によって大きく変化し、 k が0より大きくなるにつれて、 ρ_x は1より小さ

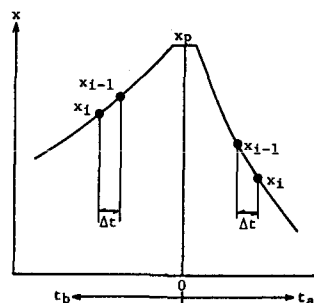


図-1 一山型降雨波形

くなり、降雨波形は次第に急峻となってくる。

式(2)より、いわゆる「後方集中型」降雨波形が得られることになり、「中央集中型」降雨波形は同じピークをもつ二つの条件付確率降雨波形を背中合わせに接合すれば得られる。

徳島市、大阪市、高知県本山、徳島県穴吹、木頭の5地点の時間雨量時系列資料に対するFreund分布の適合性を検討したところ、いずれもほぼ良好であり、条件付確率降雨波形の基本仮定が妥当であることがわかった²⁾

計画降雨量の外に、ピーク降雨強度、その発生時刻、さらには洪水到達時間内の平均降雨強度が与えられれば、これらの条件を満足するような降雨波形パラメーター： k 、 G_a 、 G_b を決定することができ、計画降雨波形が得られることになる。

3. 総雨量とピーク降雨強度の年最大値の同時リターンピリオド

Marked point process理論によれば、一雨の総雨量 y とピーク降雨強度 x の、それぞれの年最大値分布は式(3)、(4)で与えられる。さらに x 、 y の二変数同時年最大値分布へ拡張して式(5)が得られる。³⁾すなわち、

$$P[\eta_{\max} \leq y] = \exp[-\{1-F(y)\} \lambda_{xy}] \quad (3) \quad P[\xi_{\max} \leq x] = \exp[-\{1-F(x)\} \lambda_{xy}] \quad (4)$$

$$P[\xi_{\max} \leq x, \eta_{\max} \leq y] = \exp[-\{1-F(x, y)\} \lambda_{xy}] \quad (5)$$

ここに、 λ_{xy} は二変数 x 、 y の同時年平均発生率、 $F(x, y)$ は x 、 y の同時確率分布関数、 $F(x)$ 、 $F(y)$ はその周辺分布関数である。 (x, y) の密度関数 $f(x, y)$ としてFreund分布：

$$f(x, y) = \begin{cases} a_1 b_2 \exp[-b_2 Y - (a_1 + b_1 - b_2) X] & (0 \leq X \leq Y) \\ b_1 a_2 \exp[-a_2 X - (a_1 + b_1 - a_2) Y] & (0 \leq Y \leq X) \end{cases} \quad (6)$$

$$X \equiv (x - u_x)^m / \sigma_x, \quad Y \equiv (y - u_y)^n / \sigma_y \quad (7)$$

を採用することにする。ここに、 a_1 、 b_1 、 a_2 、 b_2 はパラメーターで、 X 、 Y はFreund分布のあてはめを良くするために原データ x 、 y を式(7)によって変換したものである。 u_x 、 u_y は付加定数、 m 、 n はべき乗指数、 σ_x 、 σ_y は $(x - u_x)^m$ 、 $(y - u_y)^n$ の標準偏差である。したがって、データとして $u_x < x$ 、 $u_y < y$ を同時に満足する (x, y) の部分的データを採用することになるが、Freund分布の適合度を良くするためには、 $(u_x < x, u_y < y)$ のデータ数を観測年数と同程度($\lambda_{xy} \approx 1$)になるように u_x 、 u_y (> 0)を適当な大きさに設定すれば良いことが経験的に明らかとなっている。 m 、 n はFreund分布の周辺分布 $F(x)$ 、 $F(y)$ へのデータの適合度が良くなるように、試行錯誤的に求める。

式(3)～(5)を二変数の超過確率、非超過確率に関する恒等式：

$$P[\xi_{\max} \geq x, \eta_{\max} \geq y] = 1 - P[\xi_{\max} \leq x] - P[\eta_{\max} \leq y] + P[\eta_{\max} \leq x, \eta_{\max} \leq y] \quad (8)$$

に代入すれば、一雨のピーク降雨強度、総雨量の年最大値同時超過確率が求まり、その逆数で同時リターンピリオド T_{xy} が定義される。このとき、それぞれの単独リターンピリオド T_x 、 T_y もFreund分布の周辺分布 $F(x)$ 、 $F(y)$ を用いた式(3)、(4)より得られる。

図-3は徳島市の降雨資料を用い、日雨量を y 、ピーク時間雨量を x とし、 $u_y = 130 \text{ mm}$ 、 $u_x = 10 \text{ mm/h}$

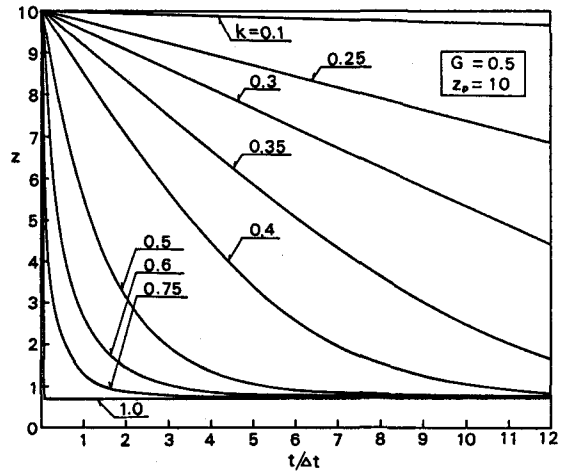


図-2 条件付確率降雨波形(片側)

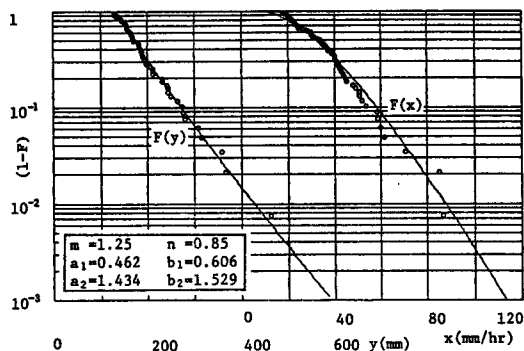


図-3 Freund分布の周辺分布(徳島)

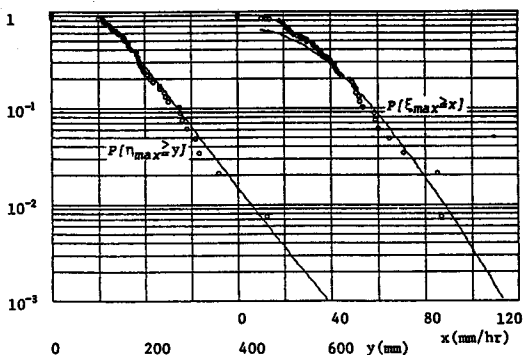


図-4 x, y の年最大値分布(徳島)

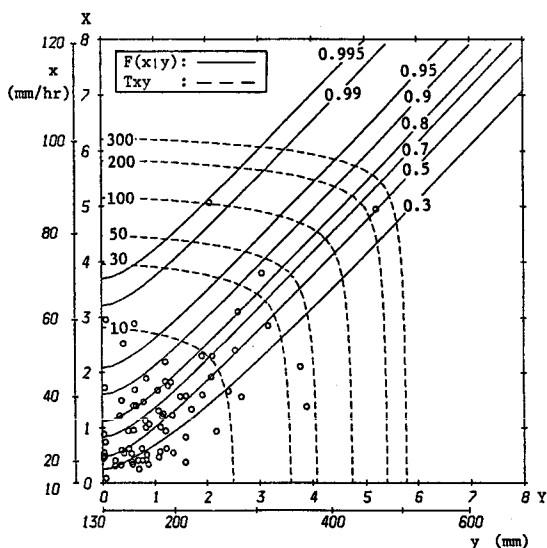


図-5 等確率線図(徳島)

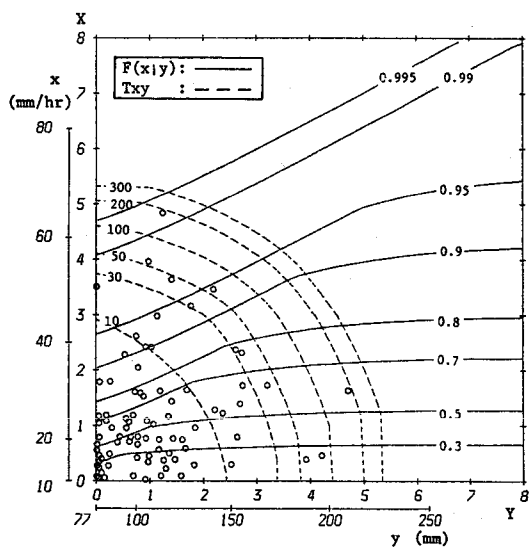


図-6 等確率線図(大阪)

としたときの Freund 分布の適合度を指数確率紙に示したものである。このときのパラメーター値を式(3), (4)に用いて、それぞれの年最大値分布を描くと図-4のようであり、それぞれの年最大値データとよく一致していることがわかる(図-3のデータは年最大値データではなく、 $u_x < x$ かつ $u_y < y$ の部分的データである)。図-3, 4によって、総雨量、ピーク降雨強度の二変数に対する式(6), (7)の Freund 分布適用の妥当性が確認されたと考える。

得られたパラメーター値を用いて、 y の条件下における x の条件付等確率線(実線)と x, y の同時等リターンピリオド線(破線)を示すと図-5のようになる。参考のため、図-3に用いた部分的データをプロットする。パラメーター a_1, b_1, a_2, b_2 より計算された x, y (厳密には X, Y)の相関係数 ρ_{xy} は徳島の場合、 $\rho_{xy}=0.68$ と高く、そのため、 x の条件付等確率線の傾きは 45° に近づき、右上隅($X=Y$)で同時等リターンピリオド線の角度が直角に近づく。このことは、図-6の大阪の場合と比較すればよくわかる。大阪の場合、 $\rho_{xy}=0.19$ で、そのため、条件付等確率線の傾きは 45° よりかなり小さく、同時等リターンピリオド線はほぼ円弧状になっている。ちなみに、理論的には、同時等リターンピリオド線は($X-Y$ 面上で) $\rho_{xy}=1$ のとき正方形の右斜め上半分の形状をとり、 $\rho_{xy}=0$ のとき直線となる。

なお、大阪の場合、相関係数 ρ_{xy} が小さいため、Freund分布の周辺分布 $F(x), F(y)$ の適合度は良いもの

の、それを用いた年最大値分布の適合度があまり良くなかった。このようなときの同時リターンピリオド T_{xy} の推定式として、次式を用いた。誘導については省略するが、参考文献³⁾の方法とは若干異なる。

$$T_{xy} = T'_x \cdot T'_y / \{ \varepsilon \cdot (T'_x - 1) \cdot (T'_y - 1) + 1 \} \quad (9)$$

$$\varepsilon \equiv \exp[-\{F(x) + F(y) - F(x, y) - 1\} \lambda_{xy}] - 1 \quad (10)$$

$$1/T'_x = 1 - \exp[-\{1 - H_x(x)\} \lambda_x], \quad 1/T'_y = 1 - \exp[-\{1 - H_y(y)\} \lambda_y] \quad (11)$$

ここに、 $H_x(x)$, $H_y(y)$ はそれぞれ、 x, y を単一変数としたときの大きさ分布で、結合指数分布³⁾を用いる。 λ_x, λ_y は x, y の年平均発生率、 T'_x, T'_y は式(11)より計算される x, y のリターンピリオドである。式(10)の ε は、 $\varepsilon < 1/(T'_x - 1)$, $1/(T'_y - 1)$ でなければならず、そのため、 $T'_x, T'_y > 2$ とし、 λ_{xy} は1に近く、また λ_x, λ_y は1よりも十分大きくなるよう、データを選択する必要がある。

ところで、 M 時間の継続時間の総雨量 y はその時間雨量 x_i の総和であり、 x_i が小さい順に並べられた順序統計量であれば、ピーク時間雨量は第 M 番目の順序統計量 x_M となる。このような考えから、 M 変数のFreund分布⁴⁾を用いた別の方法によっても、 y と x_M の同時確率分布や条件付確率分布を得ることができる。しかし、式が煩雑となるとともにパラメーター推定がむづかしくなる。この方法については別の機会に譲ることにする。

4. 計画降雨量与えられたときの計画ピーク時間雨量の設定基準

前述のように、現行では計画確率年 T_y^* の計画降雨量 y^* がまず評価される。したがって、ここでは T_y^* と y^* が与えられたとして、計画ピーク時間雨量 x^* を確率的基準により設定する方法を考える。関連するものをあげれば、条件付確率 $F(x^*|y^*)$ 、同時リターンピリオド T_{xy}^* 、単独のリターンピリオド T_x^*, T_y^* および T_{xy}^* と T_y^* の比 $T_{x|y}^* \equiv T_{xy}^*/T_y^*$ である。 $F(x^*|y^*)$ だけは確率であるので、他と同様に、そのリターンピリオド $T_{x|y}^*$ を式(12)で定義する。

$$1/T_{x|y}^* = 1 - \exp[-\{1 - F(x^*|y^*)\} \lambda_{xy}] \quad (12)$$

さて、計画ピーク時間雨量 x^* は次の三つの条件を満足する範囲から設定されるものとする。

$$\textcircled{1} \quad T_x^* \leq T_y^* \quad (13)$$

$$\textcircled{2} \quad 0.5 \leq F(x^*|y^*) < 0.9 \quad (2.5 < T_{x|y}^* < 10.6) \quad (14)$$

$$\textcircled{3} \quad 1 \leq T_{x|y}^* (&= T_{xy}^*/T_y^*) \leq 3 \quad (15)$$

条件①については、洪水のピーク流量に支配的な継続時間の降雨強度が総雨量より重要であると見るならば、ときには $T_x^* > T_y^*$ であっても良いかも知れないが、現行では T_y^* をその水系の重要度で設定していることより、ここでは式(13)の条件を採用する。条件②の $F(x^*|y^*)$ の下限値は条件付平均値に対応する0.5で良い。 $F(x^*|y^*)$ の上限については図-4.5の条件付等確率線と実測値の対応、あるいは後述の $T_{x|y}^* \sim T_{x|y}^*$ 関係(図-7.8)等から判断して0.9とした。 $F(x^*|y^*) = 0.5, 0.9$ を式(12)に代入し、 $\lambda_{xy} \div 1$ とすれば $T_{x|y}^* \div 2.5, 10.6$ が得られる。条件③の下限値は $T_{xy}^* \geq T_y^*$ より1となる。上限値3は後述の図-9のように、大阪市以外では条件②の $F(x^*|y^*) = 0.9$ にほぼ対応することによる。

つまり、条件①, ②, ③を同時に満足する範囲に x^* の値をおおよそ、しほり込み、この範囲で計画ピーク時間雨量 x^* を決定すれば良いと考える。そこで、条件①, ②, ③を同時に満足する範囲について、さらに詳細な検討を加える。条件②の $T_{x|y}^*$ と条件③の $T_{x|y}^* \equiv T_{xy}^*/T_y^*$ との関係については、式(3)~(5)と式(8)において $\lambda_{xy} = 1$ とし、 T_x, T_y が十分大のとき、Taylor展開により近似化し、式(12)を用いて次式を得る。

$$1/T_{x|y}^* \div (T_y/T_x) - (T_y - 1)/T_{x|y} \quad (16)$$

この式より、 T_y が与えられると、 $T_{x|y}^* > 1$ と $T_{x|y}$ はほぼ1対1の対応関係があることが予想される。

$T_y^* = 50, 100, 200$ 年のときの $T_{x|y}^*$ と $T_{x|y}^>$ の関係を調べると、図-7（徳島）、図-8（大阪）のようであり、 x, y の相関係数 ρ_{xy} が小さくなると若干、関係は異なるようであるが、ほとんど T_y^* の値にかかわらず、一つの曲線で表わされることがわかる。このことより、条件②と条件③は各地点ごとに、ほぼ1対1の対応関係をもつと見なせる。さらに、図-7、8中に条件①、②、③を同時に満足する範囲の上限、下限をそれぞれU、L点としてプロットすると、上限点Uは ρ_{xy} の大きい徳島では条件①： $T_x^* < T_y^*$ で規定され、 ρ_{xy} の小さい大阪では条件②の上限： $T_{x|y}^* \geq T_{xy}^* / T_y^* = 3$ で規定されている。

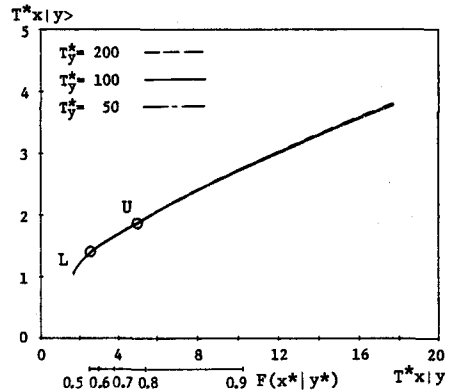


図-7 $T_{x|y}^* \sim T_{x|y}^>$ 関係(徳島)

木頭、本山地点の降雨資料についても同様な処理をし、前述の徳島、大阪とともに、条件①、②、③によってできる範囲を $T_y^* = 100$ でまとめることにする。条件付確率 $F(x^*|y^*)$ をパラメーターとし、横軸に（地点ごとに異なる x, y の）相関係数 ρ_{xy} を、縦軸に $T_{x|y}^* \equiv T_{xy}^* / T_y^*$ をとり図示すれば図-9のようになる。図中に条件①、②、③を同時に満足する範囲の概略を破線で示す。図によれば、徳島、本山は降雨の相関係数 ρ_{xy} が高いため条件①によって制約を受け、図のように斜め直破線が現われる。この斜め直破線は当然 T_y^* の値によって移動する。しかし、 $F(x^*|y^*) = 0.5$ に対する破線の位置と形状はほとんど変化しないことが、図-7、8の $T_{x|y}^*$ と $T_{x|y}^>$ の関係より予想される。 $T_y^* = 100$ のときの $F(x^*|y^*)$ の許容上限を図-9で見れば徳島、本山で $F(x^*|y^*) = 0.7$ 、木頭、大阪で $F(x^*|y^*) \approx 0.8$ である。

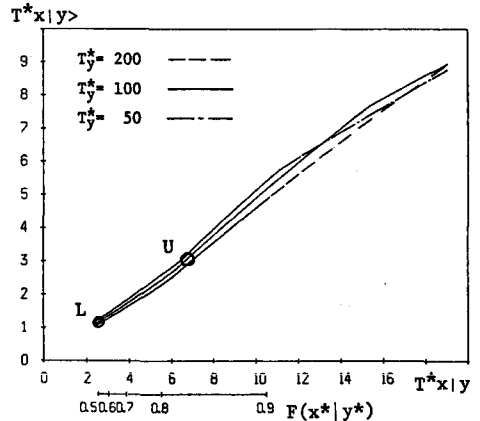


図-8 $T_{x|y}^* \sim T_{x|y}^>$ 関係(大阪)

ところで、現行では計画降雨（群）から適切な流出モデルを介し洪水ハイドログラフ（群）に変換し、基本高水決定のための計画ハイドログラフを選定する。この際、選定された計画ハイドログラフのピーク流量が、上記ハイドログラフ群のピーク流量を充足する割合をカバー率とよび、このカバー率が50%以上になるものとしている。一級水系の主要区間を対象とする計画では、この率が60~80%の例が多いという¹⁾。

このカバー率の概念は前述の条件付確率 $F(x^*|y^*)$ の概念と、その対象は異なるだけで、ほぼ同じである。すなわち、前者は洪水ピーク流量を、後者は降雨のピーク時間雨量を対象としている。こうしたことを勘案すると、条件付確率 $F(x^*|y^*) = 0.6 \sim 0.8$ 、さらにしほるなら、0.7程度に相当するピーク時間雨量を計画量とすることが妥当と考える。図-9によれば、 $F(x^*|y^*) = 0.7$ は $T_{x|y}^* = 1.6 \sim 2.1$ に対応するゆえ、このときの (x^*, y^*) の同時

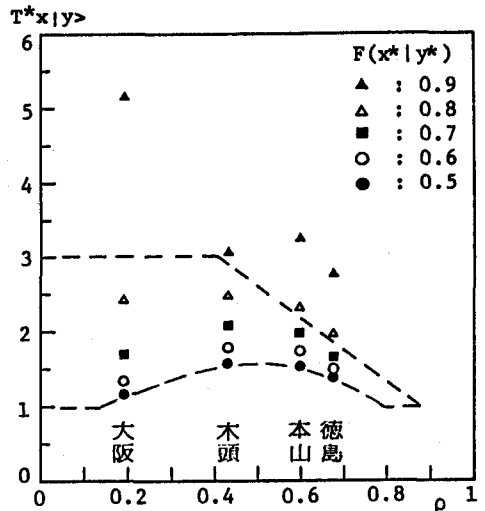


図-9 $\rho \sim T_{x|y}^*$ 関係
($T_y^* = 100$ のとき)

リターンピリオド T_{xy}^* は T_y^* の 1.6 ~ 2.1 倍に相当する。

表-1 に $T_y^*=100$, $F(x^*|y^*)=0.7$ のときの y^* と x^* , T_{xy}^* , T_x^* の例を示す。表-1 によれば、徳島、木頭、本山での $T_y^*=100$, $F(x^*|y^*)=0.7$ に対する計画ピーク時間雨量はそれぞれ、 $x^*=85$, 100, 100 mm/h であり、これらの値はそれぞれの地点降雨の既往最大 (87, 100, 102) とほとんど同程度となっている。また、 x^* の単独リターンピリオドは、それぞれ、 $T_x^*=76$, 35, 76 であり、いずれの場合も妥当な計画値と思われる。

これに対し、大阪の場合、 $T_y^*=100$, $F(x^*|y^*)=0.7$ に対して、 $x^*=36$ mm/h であり地点降雨の既往最大 65 mm/h よりかなり小さく、したがって $T_x^*=5$ も他の地点の T_x^* に比べて大巾に小さい。このように、 T_y^* より大巾に小さい T_x^* をとる x^* を実計画に用いるべきかについては、河川計画の目的、対象流域の大きさ、流出特性等と関連した、別の角度からの詳細な検討が必要であろうが、当初、ピーク時間雨量 x よりも日降雨量 y を重視し、計画規模を T_y で評価した点にも問題があると思われる。図-6 によれば、大阪の場合、降雨の相関係数 ρ_{xy} は小さく、日降雨量が既往最大 ($y=210$, $x=30$) の T_{xy} とピーク時間雨量が既往最大 ($y=115$, $x=65$) の T_{xy} はほぼ同じで $T_{xy}=200$ となっており、一見、 y が大きくなると x が小さくなるようにも見える。このようなことより、降雨量 y とピーク時間雨量 x の相関係数 ρ_{xy} が小さい地点 (図-9 によれば $\rho_{xy} < 0.4$) では、計画規模を降雨量 y で評価すべきか、洪水ピーク流量に支配的な継続時間の降雨強度、特にピーク時間雨量 x で評価すべきかにも配慮が必要であろう。

図-10 に $T_y^*=100$, $F(x^*|y^*)=0.7$ のときの徳島での計画降雨波形の 1 例を示す。このときの計画ピーク時間雨量は前述のように $x^*=85$ であるが、その発生時刻は 19 ~ 20 時に設定した。ピーク以外の各時刻の時間雨量 x_i は 2 で述べた条件付確率降雨波形を用いて計算された。

5. あとがき

計画降雨量が与えられた場合、種々の一山型降雨波形のピーク時間雨量を確率評価する方法を示し、計画降雨波形の確率的設定法を提案した。本方法によれば、ピーク時間雨量と総雨量の相互相関性はもちろんのこと、洪水ピーク流量に支配的な継続時間の降雨強度およびその自己相関性を考慮して計画降雨波形を設定することができる。また、従来の実績降雨の引き伸ばし法による計画降雨波形を確率評価することに利用でき、引き伸ばし率の限界の確率的根拠としても利用できよう。

参 考 文 献

- 1) 日本河川協会編：改訂建設省河川砂防技術基準 (案)，計画編，山海堂，1977。
- 2) 端野道夫：計画降雨波形の確率論的定式化と条件付確率降雨強度式の提案，土木学会論文集，No 369。
- 3) 端野道夫：Marked point process に従う水文二変量の同時確率，水理講演会論文集，No 28，1984。
- 4) Johnson・Kotz: Continuous Multivariate Distributions, John Wiley, 1972, p. 268。

表-1 $T_y^*=100$, $F(x^*|y^*)=0.7$ のときの y^* と x^* , T_{xy}^* , T_x^*

	y^* (mm)	x^* (mm/h)	T_{xy}^*	T_x^*
Tokushima	430	85	165	76
Kito	802	100	207	35
Motoyama	577	100	198	76
Osaka	202	36	170	5

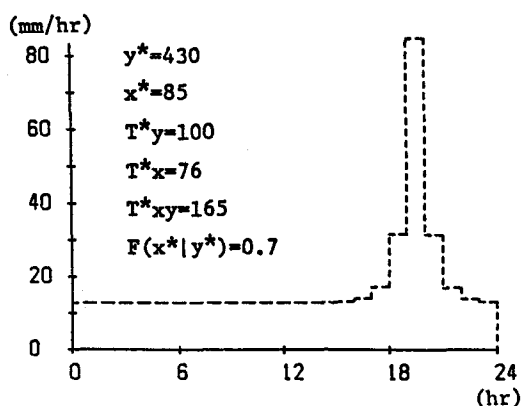


図-10 計画降雨波形の 1 例 (徳島)