

正規分布のパラメータのPWM解
A PWM Solition for Parameters of Normal Distribution

山梨大学工学部 正 員 竹内 邦良
山梨大学大学院 学生員 土屋 一仁

①はじめに

Probability Weighted Moment 法（以下 PWM法）は、Greenwood ら（1979）²⁾により提案された分布関数のパラメータ推定手法である。Landwehrら（1979）⁴⁾は、この手法を Gumbel 分布に適用したところ、標本数が小さい時の、パラメータの推定誤差分散が、最尤法より小さいことを示した。Hosking ら（1985）³⁾は、一般化極値分布にこれを適用し、リターンビリオドの大きなところでの Quantile の推定誤差分散が、最尤法より小さい場合もあるという結論を得た。又、バイアスが小さい傾向にある点は、双方に共通している。ところで、現在までのところこの手法は、分布関数が $x=F(x)$ なる inverse form で表わすことの出来る場合についてのみ利用されており、通常の $F=F(x)$ なる Normal form でしか表すことのできない場合については、計算が困難であると考えられ、まだ利用された例がない。ところが、正規分布に対しては、簡単にこの手法が利用出来ることが分かった。本報では、その PWM法と最尤法とにより推定されるパラメータとQuantileの違いを比較し、両推定法の有能性を検討する。

②基礎概念

Probability Weighted Moment 法：
Probability Weighted Moment $M_{\ell,j,k}$ は下式で定義される。

$$M_{\ell,j,k} = E [X^{\ell} F^j (1-F)^k] \quad (1)$$

ここに、 ℓ, j, k ：実数、 $E [\]$ ：期待値演算子、 F ：非超過確率。ここで、 $\ell=1, j=0$ の時の $M_{1,0,k} = M(k)$ と書き改める。つまり

$$M(k) = E [X (1-F)^k] \quad (2)$$

である。一方 N 個の標本の順序統計量 $\{x_i\}$ がある時には、 $M(k)$ の推定値 $\tilde{M}(k)$ は

$$\tilde{M}(k) = 1/n \cdot \sum x_i \binom{n-1}{k} / \binom{n-1}{k} \quad (3)$$

となる。以上の理論値 $M(k)$ と推定値 $\tilde{M}(k)$ が等しいと考え、パラメータを求める方法が PWM法である。

正規分布：

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \exp \{ -(t-\mu)^2 / 2\sigma^2 \} / \sigma \sqrt{2\pi} dt \quad (-\infty < x < \infty) \quad (4)$$

μ, σ ; パラメータ $\pi = 3.141592 \dots$

③評価公式

正規分布の最尤解は

$$\tilde{\mu} = 1/n \cdot \sum x_i \quad (5)$$

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{1/(n-1) \cdot \sum (x_i - \tilde{\mu})^2} \quad (6)$$

で表される。この $\tilde{\sigma}$ は、データの平均自乗誤差ではなく、パラメータ σ のいわゆる不偏推定値である。一方 PWM解は、

$$\tilde{\mu} = \tilde{M}(0) \quad (7)$$

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\pi} (\tilde{M}(0) - 2\tilde{M}(1)) \quad (8)$$

で表される(補遺参照)。ところで、正規乱数の Plotting Position法としては、Blom Plot

$$F_i = (i - \alpha) / (n + 1 - 2\alpha) \quad \alpha = 3/8 \quad (9)$$

が良いと言われている(Blom;1958)¹⁾。そこで著者らは、PWM解に含まれる $\tilde{M}(1)$ の各データに掛けられる重み $(n-i)/(n-1)$ の代わりに、この(15)式の F_i を用いた $(1-F_i)$ を代用した場合、推定値がどのような値を示すかという点についても比較検討した。(この推定法をBlom法と呼ぶことにする。)

④実験方法

標準正規乱数 ($\mu=0, \sigma=1$ の正規乱数) を Box Muller法⁵⁾により発生させる。1つ1つの乱数を年流量と考え、 n 年分の標本集団を N 組作成する。本実験では $n=5, 9, 19, 29, 49, 99$ とした。各標本集団から最尤法、PWM法において $\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}, \tilde{\chi}(F)$ (但し $F=0.001, 0.01, 0.02, 0.05, 0.10, 0.50, 0.90, 0.95, 0.98, 0.99, 0.999$) をそれぞれ N 個推定する。 $\tilde{\eta} \in \{\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}, \tilde{\chi}(F)\}$ に対し下記の統計量を求める。

$$\text{Mean}(\tilde{\eta}) = 1/N \cdot \sum \tilde{\eta}_i \quad (10)$$

$$\text{SD}(\tilde{\eta}) = \sqrt{1/N \cdot \sum (\tilde{\eta}_i - \text{Mean}(\tilde{\eta}))^2} \quad (11)$$

$\text{Mean}(\tilde{\eta}), \text{SD}(\tilde{\eta})$ は、 $N \rightarrow \infty$ で収束値を取る確率変数であるから、それぞれが不変となったと判断できるまでの N を採用する必要がある。これに対しては、 $n \leq 49$ の時 $N=50000$, $n=99$ の時 $N=10000$ とした。ところで、各標本集団の η に対する Bias と Mean Squer Error は、

$$\text{Bias}(\eta) = \eta - \text{Mean}(\tilde{\eta}) \quad (12)$$

$$\text{MSE}(\eta) = \{ \text{Bias}(\eta) \}^2 + \{ \text{SD}(\tilde{\eta}) \}^2 \quad (13)$$

で計算され、最尤法と PWM法の MSEの比較のために Efficiencyを

$$\text{Effi}(\eta) = \text{MSE}(\eta : \text{MxL}) / \text{MSE}(\eta : \text{PWM}) \quad (14)$$

で規定する。この指標が1より大きいならば、PWM法が最尤法より、有能な推定法であることを示し、1未満ならば逆のことが言え、1の場合は同等であることを示している。尚実験は、乱数発生の際に、1次のマルコフモデル

$$z_j = \rho z_{j-1} + \sqrt{1-\rho^2} \delta_j \quad (15)$$

を利用して (δ_j は独立の標準正規乱数, ρ は相関係数) 2つの場合, $\rho=0$ 及び $\rho=0.5$ について行なった。

Table 1. Statistics of Estimators of Parameters ($\rho=0$)

⑤実験結果

I. $\rho=0$ の場合

Table 1 を見ると、PWM法によるパラメータ σ の Bias は、全て 0を示す。しかし、他の 2つは、 σ より小さい値を推定する傾向がある。MSE,あるいは Efficiency で推定法の有能性を比較すると最尤法が良いことがわかる。標本数の増加は PWM法の有能さが、最尤法に近づく状況を表している。Blom法を用いた場合は Bias, MSE 共に大きく、好結果をしめさなかった。Quantile については、Table 2 の Bias に注目すると、PWM法は、ほとんど 0を示

Method	Sample Size	μ			σ		
		Bias	SD	MSE	Bias	SD	MSE(Eff1)
MxL	5	.00	.45	.20	.06	.34	.12(1)
PWM					.00	.37	.13(.90)
Blom					.24	.28	.13(.90)
MxL	9	.00	.34	.11	.03	.25	.06(1)
PWM					.00	.26	.07(.94)
Blom					.13	.22	.07(.92)
MxL	19	.00	.23	.05	.01	.17	.03(1)
PWM					.00	.17	.03(.96)
Blom					.06	.16	.03(.94)
MxL	29	.00	.19	.03	.01	.13	.02(1)
PWM					.00	.14	.02(.97)
Blom					.04	.13	.02(.95)
MxL	49	.00	.14	.02	.01	.10	.01(1)
PWM					.00	.10	.01(.97)
Blom					.03	.10	.01(.96)
MxL	99	.00	.10	.01	.00	.07	.01(1)
PWM					.00	.07	.01(.98)
Blom					.01	.07	.01(.97)

Table 2. Bias of Estimators of Quantiles ($\rho=0$)

Method	Sample Size	F=.001 x=-3.09	F=.01 x=-2.33	F=.02 x=-2.05	F=.05 x=-1.64	F=.10 x=-1.28	F=.50 x=.00	F=.90 x=1.28	F=.95 x=1.64	F=.98 x=2.05	F=.99 x=2.33	F=.999 x=3.09
MxL	5	-.18	-.14	-.12	-.10	-.07	.00	.07	.10	.12	.14	.18
PWM		.01	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	-.01
Blom		-.73	-.55	-.49	-.39	-.30	.00	.30	.39	.49	.55	.73
MxL	9	-.09	-.07	-.06	-.05	-.04	.00	.04	.05	.06	.07	.09
PWM		.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00
Blom		-.41	-.31	-.28	-.22	-.17	.00	.17	.22	.28	.31	.42
MxL	19	-.04	-.03	-.03	-.02	-.02	.00	.02	.02	.03	.03	.04
PWM		.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00
Blom		-.20	-.15	-.13	-.11	-.08	.00	.08	.11	.13	.15	.20
MxL	29	-.03	-.02	-.02	-.02	-.01	.00	.01	.02	.02	.02	.03
PWM		.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00
Blom		-.13	-.10	-.09	-.07	-.06	.00	.05	.07	.09	.10	.13
MxL	49	-.02	-.01	-.01	-.01	-.01	.00	.01	.01	.01	.01	.02
PWM		.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00
Blom		-.08	-.06	-.05	-.04	-.03	.00	.03	.04	.05	.06	.08
MxL	99	-.01	-.01	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.01
PWM		.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00
Blom		-.04	-.03	-.03	-.02	-.02	.00	.01	.02	.02	.03	.04

Table 3. SD of Estimators of Quantiles ($\rho=0$)

Method	Sample Size	F=.001	F=.01	F=.02	F=.05	F=.10	F=.50	F=.90	F=.95	F=.98	F=.99	F=.999
MxL	5	1.15	.91	.83	.72	.63	.45	.63	.72	.84	.92	1.15
PWM		1.22	.97	.88	.75	.65	.45	.65	.75	.88	.97	1.22
Blom		.97	.79	.73	.64	.57	.45	.58	.64	.73	.79	.97
MxL	9	.83	.66	.61	.52	.46	.34	.46	.53	.61	.67	.84
PWM		.86	.68	.62	.54	.47	.34	.47	.54	.63	.69	.86
Blom		.76	.61	.56	.49	.44	.34	.44	.50	.57	.62	.77
MxL	19	.56	.45	.41	.35	.31	.23	.31	.36	.41	.45	.56
PWM		.57	.45	.41	.36	.31	.23	.32	.36	.42	.46	.57
Blom		.54	.43	.40	.35	.30	.23	.31	.35	.40	.44	.54
MxL	29	.45	.36	.33	.29	.25	.19	.25	.29	.33	.36	.45
PWM		.46	.37	.34	.29	.25	.19	.26	.29	.34	.37	.46
Blom		.44	.36	.33	.28	.25	.19	.25	.29	.33	.36	.45
MxL	49	.34	.28	.25	.22	.19	.14	.20	.22	.26	.28	.35
PWM		.35	.28	.26	.22	.19	.14	.20	.22	.26	.28	.35
Blom		.34	.27	.25	.22	.19	.14	.19	.22	.25	.28	.35
MxL	99	.24	.19	.18	.16	.14	.10	.14	.16	.18	.20	.25
PWM		.25	.20	.18	.16	.14	.10	.14	.16	.18	.20	.25
Blom		.24	.19	.18	.16	.14	.10	.14	.16	.18	.20	.24

Table 4. Efficiency of Estimators of Quantiles ($\rho=0$)

Method	Sample Size	F=.001	F=.01	F=.02	F=.05	F=.10	F=.50	F=.90	F=.95	F=.98	F=.99	F=.999
PWM	5	.91	.92	.92	.93	.94	1.00	.95	.93	.92	.92	.91
Blom		.91	.92	.93	.93	.95	1.00	.95	.94	.93	.92	.91
PWM	9	.94	.95	.95	.96	.97	1.00	.97	.96	.95	.95	.95
Blom		.93	.93	.94	.95	.96	1.00	.96	.95	.94	.94	.93
PWM	19	.97	.97	.97	.98	.98	1.00	.98	.98	.97	.97	.97
Blom		.95	.96	.96	.96	.97	1.00	.97	.97	.96	.96	.95
PWM	29	.97	.97	.98	.98	.98	1.00	.98	.98	.98	.98	.97
Blom		.96	.96	.96	.97	.97	1.00	.98	.97	.97	.96	.96
PWM	49	.97	.98	.98	.98	.99	1.00	.99	.98	.98	.98	.98
Blom		.96	.97	.97	.97	.98	1.00	.98	.98	.97	.97	.97
PWM	99	.98	.98	.98	.98	.99	1.00	.99	.99	.99	.98	.98
Blom		.98	.98	.98	.98	.98	1.00	.99	.99	.99	.98	.98

し、他の 2 つは $x(F) > 0$ では $x(F)$ より小さい値を、 $x(F) < 0$ では $x(F)$ より大きい値を推定する傾向のあることがわかる。Table 4 では Efficiency が、 σ 同様、最尤法が有能であることを表している。標本数の増加に関しても、 σ の時と同じことが言える。Quantile の Bias, SD, Efficiency に共通して言えることは、 $F=0.5$ を基準に、値(の絶対値)がほぼ対称になっていることがわかる。

II. $\rho=0.5$ の場合

σ については、Bias が PWM 法にも生じている点に気付く。 $\rho=0$ と比較すると、Bias, SD 共に増加している。(標本数が 5 の時は除く) Efficiency を見ると、標本数 9 までは、PWM 法が、最尤法より大きい値を示し、小さい標本数での PWM 法の有能さが現われているが、標本数 29 以降では、この状況は逆転する。この境を、標本数 19 辺りで見えておくことに、たいして無理はないであろう(以上 Table 5)。Quantile についても、Table 6 を見ると Bias が、PWM 法に生じ 3 つの手法に共通して、 $x(F) > 0$ の時 $x(F)$ より小さい値を、 $x(F) < 0$ の時 $x(F)$ より大きい値を推定する傾向のある。Table 8 で、Efficiency により、標本数 9 までは PWM 法

の方が有能であろうが、標本数 29 以降では逆転する値も目立ち、標本数 19 辺りがその境らしい状況が、見受けられる。又、Bias SD Efficiency (の絶対値) が $F=0.5$ を基準にほぼ対称になっている点は、 $\rho=0$ の場合と同様である。Blom 法は、余り有能な推定法ではなかろう。

Table 5. Statistics of Estimators of Parameters ($\rho=0.5$)

Method	Sample Size	μ			σ		
		Bias	SD	MSE	Bias	SD	MSE(Eff1)
MxL PWM Blom	5	.00	.67	.45	.22	.31	.14(1)
					.17	.33	.14(1.04)
					.37	.25	.20(.72)
MxL PWM Blom	9	.00	.54	.29	.14	.25	.08(1)
					.11	.27	.08(1.01)
					.23	.23	.11(.79)
MxL PWM Blom	19	.00	.38	.15	.07	.19	.04(1)
					.05	.20	.04(1.00)
					.12	.18	.05(.88)
MxL PWM Blom	29	.00	.31	.10	.05	.16	.03(1)
					.04	.16	.03(.99)
					.08	.16	.03(.91)
MxL PWM Blom	49	.00	.24	.06	.03	.13	.02(1)
					.02	.13	.02(.99)
					.05	.13	.02(.94)
MxL PWM Blom	99	.00	.17	.03	.01	.09	.01(1)
					.01	.09	.01(.99)
					.02	.09	.01(.96)

⑥ PWM 法から推定される σ の特徴

正規分布の σ は、正規乱数の標準偏差を表す。標準偏差とは (6) 式に示す通り平均値回りの 2 次モーメント (分散) の平方根である。ところで、PWM 法によって表される標準偏差とは一体何であろうか。 σ 算出に関し (8) 式に興味を持った著者らは、まづ (8) 式を下式に変形した。

$$\hat{\sigma} = \sum x_i w_i \quad w_i = \sqrt{\pi(2i-n-1)/n(n-1)} \quad (16)$$

この $\hat{\sigma}$ を図示したものを、右に Fig. 1 として示したが、これは、データ x に対して直線にのる重み w を掛けていることを意味し、 i の増加により符号に変化も生じている。 $w=0$ を満たす x は、正規乱数であることを考慮すると、平均値に近いことが予想される。いずれにせよ、正規乱数の散ばりを表す指標 (標準偏差) が重みを用いて求められることは、大変興味深い。

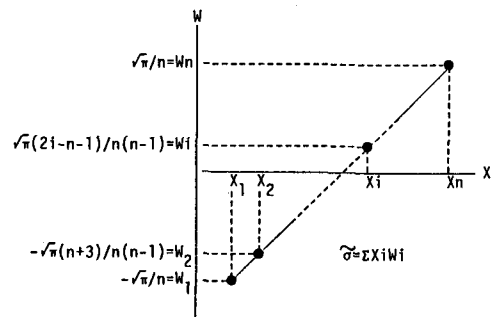


Fig.1 Weight for Estimation of σ

Table 6. Bias of Estimators of Parameters ($\rho=.5$)

Method	Sample Size	F=.001 x=-3.09	F=.01 x=-2.33	F=.02 x=-2.05	F=.05 x=-1.64	F=.10 x=-1.28	F=.50 x=.00	F=.90 x=1.28	F=.95 x=1.64	F=.98 x=2.05	F=.99 x=2.33	F=.999 x=3.09
MxL	5	-.69	-.52	-.46	-.37	-.29	.00	.29	.37	.46	.52	.69
PWM		-.53	-.40	-.35	-.28	-.22	.00	.22	.28	.35	.40	.53
Blom		-1.14	-.86	-.76	-.61	-.47	.00	.47	.61	.76	.86	1.14
MxL	9	-.42	-.32	-.28	-.23	-.18	.00	.18	.23	.28	.32	.43
PWM		-.33	-.25	-.22	-.18	-.14	.00	.14	.18	.22	.25	.33
Blom		-.71	-.53	-.47	-.38	-.29	.00	.29	.38	.47	.53	.71
MxL	19	-.22	-.16	-.14	-.12	-.09	.00	.09	.11	.14	.16	.21
PWM		-.17	-.13	-.11	-.09	-.07	.00	.07	.09	.11	.12	.17
Blom		-.36	-.27	-.24	-.19	-.15	.00	.15	.19	.24	.27	.36
MxL	29	-.15	-.11	-.10	-.08	-.06	.00	.06	.08	.10	.11	.14
PWM		-.11	-.09	-.08	-.06	-.05	.00	.05	.06	.07	.08	.11
Blom		-.24	-.18	-.16	-.13	-.10	.00	.10	.13	.16	.18	.24
MxL	49	-.09	-.07	-.06	-.05	-.04	.00	.03	.04	.06	.06	.07
PWM		-.07	-.05	-.05	-.04	-.03	.00	.03	.04	.04	.05	.07
Blom		-.15	-.11	-.10	-.08	-.06	.00	.06	.08	.10	.11	.14
MxL	99	-.04	-.03	-.03	-.02	-.02	.00	.01	.02	.02	.03	.04
PWM		-.03	-.02	-.02	-.02	-.01	.00	.01	.01	.02	.02	.03
Blom		-.07	-.05	-.05	-.04	-.03	.00	.03	.04	.04	.05	.07

Table 7. SD of Estimators of Parameters ($\rho=.5$)

Method	Sample Size	F=.001	F=.01	F=.02	F=.05	F=.10	F=.50	F=.90	F=.95	F=.98	F=.99	F=.999
MxL	5	1.16	.98	.92	.84	.78	.67	.78	.84	.92	.98	1.16
PWM		1.22	1.02	.95	.86	.79	.67	.79	.86	.95	1.02	1.22
Blom		1.03	.89	.85	.79	.74	.67	.74	.79	.85	.89	1.03
MxL	9	.95	.79	.75	.68	.63	.54	.63	.68	.75	.80	.96
PWM		.98	.82	.76	.69	.63	.54	.64	.70	.77	.82	.99
Blom		.89	.76	.71	.65	.61	.54	.62	.66	.72	.76	.90
MxL	19	.70	.58	.55	.49	.45	.38	.46	.50	.55	.58	.71
PWM		.72	.59	.55	.50	.46	.38	.46	.50	.56	.60	.72
Blom		.68	.57	.54	.49	.45	.38	.45	.49	.54	.58	.69
MxL	29	.58	.49	.45	.41	.37	.31	.38	.41	.46	.49	.59
PWM		.59	.49	.46	.41	.38	.31	.38	.42	.46	.50	.60
Blom		.57	.48	.45	.40	.37	.31	.37	.41	.45	.48	.58
MxL	49	.46	.38	.35	.32	.29	.24	.29	.32	.36	.38	.46
PWM		.46	.38	.36	.32	.29	.24	.30	.32	.36	.39	.47
Blom		.46	.38	.35	.32	.29	.24	.29	.32	.36	.38	.46
MxL	99	.32	.27	.25	.23	.21	.17	.21	.23	.25	.27	.33
PWM		.33	.27	.25	.23	.21	.17	.21	.23	.26	.27	.33
Blom		.32	.27	.25	.23	.21	.17	.21	.23	.25	.27	.33

Table 8. Efficiency of Estimators of Parameters ($\rho=.5$)

Method	Sample Size	F=.001	F=.01	F=.02	F=.05	F=.10	F=.50	F=.90	F=.95	F=.98	F=.99	F=.999
PWM	5	1.03	1.02	1.02	1.02	1.01	1.00	1.01	1.02	1.02	1.02	1.03
Blom		.77	.80	.82	.85	.88	1.00	.88	.85	.82	.80	.77
PWM	9	1.01	1.01	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.01	1.01	1.01
Blom		.84	.86	.87	.90	.92	1.00	.92	.90	.88	.86	.84
PWM	19	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
Blom		.91	.92	.93	.94	.96	1.00	.96	.95	.93	.93	.91
PWM	29	.99	.99	.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
Blom		.93	.94	.95	.96	.97	1.00	.97	.96	.95	.95	.94
PWM	49	.99	.99	.99	.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.99	.99
Blom		.95	.96	.96	.97	.98	1.00	.98	.98	.97	.97	.96
PWM	99	.99	.99	.99	.99	.99	1.00	1.00	1.00	.99	.99	.99
Blom		.97	.98	.98	.98	.99	1.00	.99	.99	.98	.98	.98

⑦結論

1. 従来 PWM法は、 $x=x(F)$ なる inverse form に変形可能な分布関数にのみ適用されてきたが、本報では、正規分布(inverse form 変形不可能)に適用可能であることを示した。

2. 最尤法との有能さを比較し、以下の結果を得た。

(1) σ の推定に関し PWM法では、最尤法の不偏推定値で生ずるBiasより小さいものが生ずる傾向がある。

(2) 独立な乱数では、パラメータの推定は、最尤法が良いと思われる。

(3) 持続性を持つ ($\rho=0.5$ に限るとする) 乱数で、資料数が少ない時 ($n \leq 19$) は、PWM 法による推定を選択する余地が生ずる。但し、持続性を持つか、否かの判定に問題が生じて来る。

3. 正規乱数の標準偏差 σ は、Fig 1 に示されるような興味深い性質を持つ。

補遺)

$$M_{1,1,0} = \int_0^1 xF(x)Fdx = \int_{-\infty}^{\infty} xF(x)f(x)dx = \sigma \int_{-\infty}^{\infty} z\phi(z)\Phi(z)dz + \mu \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z)\Phi(z)dz$$

$$= \sigma \left\{ \left[-\phi(z)\Phi(z) \right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(z)dz \right\} + \mu/2 = \{ \sigma/\sqrt{\pi} + \mu \} / 2$$

ϕ , Φ はそれぞれ、標準正規分布の密度関数、及び分布関数

$$\therefore M_{1,1,0} = \{ \sigma/\sqrt{\pi} + \mu \} / 2 \quad (8-A)$$

$$\text{定義より } M_{1,1,0} = M(0) - M(1) \quad (8-B)$$

$$M(0) = \mu \quad (8-C)$$

(8-A), (8-B), (8-C) より (8) が誘導できる。

※参考文献

- 1) 例えば Cunnane C., Unbiased Plotting Position - A Review, Journal of Hydrology, 37, pp. 205-222 1978
- 2) Greenwood J.A., J.M.Landwehr, N.C.Matalas and J.R.Wallis, Probability Weighted Moments: Definition and Relation to Parameters of Several Distributions Expressable in Inverse Form, Water Resour. Res., 15(5), pp. 1049-1054, 1979
- 3) Hosking J.R.M., J.R.Wallis and E.F.Wood, Estimation of the Generalized Extreme-Value Distribution by the Method of Probability Weighted Moments, Technometrics., 27(3), pp. 251-261, 1985
- 4) Landwehr J.M., N.C.Matalas and J.R.Wallis, Probability Weighted Moments Compared With Some Traditional Techniques in Estimating Gumbel Parameters and Quantiles, Water Resour. Res., 15(5), pp. 1055-1064 1979
- 5) 例えば 脇本和昌, 初等情報処理講座 5 乱数の知識, 森北出版, pp. 82-84 1970