

周波数応答法の非線形流出系への適用

An Application of Frequency Response Method
to Non-linear Runoff Process

苫小牧工業高等専門学校 正員 嵯峨 浩

1. はじめに

一般に降雨流出系は、線形性の強い非線形であり、最近日野ら¹⁾によりこの非線形性がかなりの程度で明らかにされてきた。一方、周波数応答法は従来線形系に用いられており、降雨資料と流量資料のみから解析する非線形なInput-Output問題への適用は理論的に矛盾すると考えられてきた。しかし、限定された非線形要素を考慮するならば周波数応答法を降雨流出系に利用することが可能であると思われる。

本研究は、非線形要素として遅延要素と分離要素（流出成分を考慮する）を含む流出系に、周波数応答法を用いる手法を理論的に示したものであり、遅延要素を含む流出に対しては流出のむだ時間とタンク時定数を決定する手法を、分離要素を含む流出系に対しては、上述のむだ時間とタンク時定数以外に流出成分の分離方法を提案し、流出現象の非線形性を明らかにすると共に、実流域における流出解析の応用を図るものである。

2. 遅延要素

本論文においてむだ時間 L を入力開始時刻 t_1 と出力開始時刻 t_2 のずれ、即ち、出力が発生するまでの時間であると定義する（ $L = t_1 - t_2$ ）。降雨-流出系において降雨開始後、数時間ののち流出が始まる現象はよく知られている事実である。むだ時間 L の概念はこれまで実用に供されてきた流出解析手法においても自然な形で導入されてきた。たとえば、Prasadの貯留関数法は次式で表わされる。

$$S = K_1 Q^P + K_2 \frac{dQ}{dt} \quad (1) \quad \frac{dS}{dt} = R - Q \quad (2)$$

(1)式は $S-Q$ 曲線の2箇所を最も単純化した表現であると理解できるが、むだ時間 L を導入した $Q(t+L)$ をTaylor展開すると、(3)式になる。

$$Q(t+L) = Q(t) + L \frac{dQ}{dt} + \frac{L^2}{2} \frac{d^2Q}{dt^2} + \dots + \frac{L^n}{n!} \frac{d^n Q}{dt^n} \quad (3)$$

従って、(1)式の右辺第2項は（ $P=1$ の場合）むだ時間 L を1次微分項まで採用した近似式であるとみなすことができる。

流出モデルとしては、むだ時間 L の導入の容易さを考慮して次式で示されるNashの n 段タンクモデルを採用した。

$$K \frac{d^n q}{dt^n} + nK \frac{d^{n-1} q}{dt^{n-1}} + \dots + \binom{n}{i} K \frac{d^{n-i} q}{dt^{n-i}} + \dots + q = r \quad (4)$$

(4)式の瞬間単位図 $h(t)$ は次式で与えられる。

$$h(t) = \frac{1}{K\Gamma(n)} \left(-\frac{t}{K}\right)^{n-1} \exp\left(-\frac{t}{K}\right) \quad (5)$$

ここで、 n はタンクの数、 $\Gamma(n)$ はガンマ関数、 K はタンク時定数で、ハイエトグラフとハイドログラフの重心の時間差を M とすると $K=M/n$ で与えられる。 M は雨水流の伝播時間 t_c との間に、 $M=t_c/2$ の関係があることから、 $K=t_c/2n$ となり、 K は雨水流の伝播時間の変化の影響も表わしている。いま、入力 $r(t)$ があり L 時間後に出力があったとすると出力 $q(t)$ は、 $q(t-L)$ で表わされる。(3)式と同様にTaylor展開すると

$$q(t-L) = q(t) - L \frac{dq}{dt} + \frac{L^2}{2} \frac{d^2 q}{dt^2} + \dots + \frac{(-L)^m}{m!} \frac{d^m q}{dt^m} \quad (6)$$

(4)式に(6)式を用いると、むだ時間 L を導入することが可能であり本論文においては遅延要素として、タンク時定数 K と、むだ時間 L を考慮することとする。また、むだ時間 L を導入することによってみかけ上の $(n+m)$ 段のモデルを構成することになり、このことは多段のモデルを（むだ時間）+（段数の少ないモデル）で近似できることを示唆している。

時間領域では(6)式の右辺を第何項まで採用するかが大きな問題となるが、周波数領域では、以下の様に簡単な表現が可能となる。

(4) 式の解は次式で与えられる。

$$q(t) = \int_0^\infty r(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau \quad (7)$$

フーリエ変換すると

$$Q(\omega) = H(\omega) \cdot R(\omega) \quad (8) \quad Q(\omega) = \int_0^\infty q(t) \cdot \exp(-j\omega t) dt$$

$$\text{ここに } R(\omega) = \int_0^\infty r(t) \cdot \exp(-j\omega t) dt$$

一方、 $q(t-L)$ をフーリエ変換すると

$$\mathcal{L}[q(t-L)] = Q(\omega) \cdot \exp(-j\omega L) \quad (9)$$

$$\text{となり次式を得る。} H(\omega) = \frac{Q(\omega)}{R(\omega)} \exp(-j\omega L) \quad (10)$$

(10)式がむだ時間 L を有する伝達関数である。従って、 n 段タンクモデルを表現する(4)式にむだ時間 L を導入した伝達関数は次式となる。

$$H(\omega) = \frac{\exp(-j\omega L)}{(1+jK\omega)^n} \quad (11)$$

最小位相推移系 ($L=0$ の場合) とむだ時間 L がある場合の周波数応答特性を比較すると表-1のようになる。ただしタンク数を従来の研究成果より $n=2$ とした。

表-1より、むだ時間 L が含まれていてもゲインは最小位相推移系の場合と同じであり位相は ωL [rad] だけ進んでいることがわかる。このことはむだ時間 L を含むとしに従っていくらでも周波数応答特性が存在することを示している。最小位相推移系の n 段タンクモデル ($n=1, 2, 3$) に従う周波数応答特性を図-1に、むだ時間 L を含む流出 (2段タンク) の応答特性を図-2に示す。

以上より、むだ時間 L が含まれていてもゲインは変化しないという事実よりタンク時定数 K を、 K が求まると最小位相推移系の位相 θ が求まるから実測資料の位相 θ からむだ時間 L を求めることができる。

3. 分離要素

降雨流出系は一般に非線形であり、非線形要素として降雨の分離則が日野らにより指摘されている。また、藤田らはエントロピー法によって単位図の変動特性を調べ、日野らの結論と符号する結果を得ている。

図-3における流出過程において有効雨量 re の $q(t) = \int_0^\infty \sum_i r_i(\tau) h_i(t-\tau) d\tau$ (12)
 i 番目の降雨成分 r_i とそれに対応する流出成分 q_i $= \int_0^\infty r_i(\tau) \sum_i g_i(\tau) h_i(t-\tau) d\tau$

が線形関係にあるとすると、(12)式が成立する。

ここに、有効雨量 re と降雨成分 r_i との間に(13)式の関係が成り立つものとする。(13)式は $re(t)$ を入力、 $q(t)$ を出力とする入出力関係を示しており、(7)式と比較すると瞬間単位図 $h(t-\tau)$ は、(12)式において $(t-\tau)$ の関数のみならず、 τ の関数にもなっている。このことは降雨流出系が図-3の流出過程に従うと単位図が時間の経過と共に変動することを示している。

表-1

	最小位相推移系	むだ時間 L を含む場合
システム関数	$H(\omega) = \frac{1}{(1+jK\omega)^2}$	$H(\omega) = \frac{\exp(-j\omega L)}{(1+jK\omega)^2}$
ゲイン (G)	$G = \frac{1}{1+K^2\omega^2}$	$G = \frac{1}{1+K^2\omega^2}$
位相 (θ)	$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{-2K\omega}{1-K^2\omega^2} \right)$	$\Theta = \theta + \omega L$
ゲインと位相の対応	$G = \cos^2 \frac{\theta}{2}$	無数

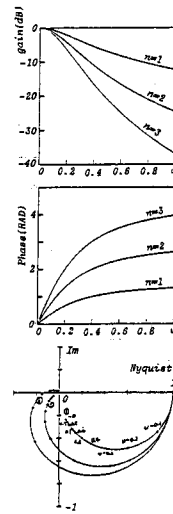


図-1

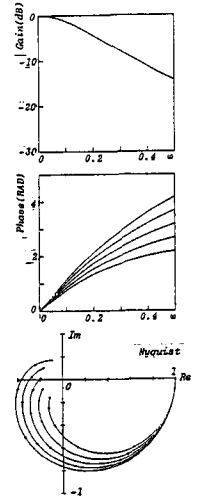


図-2

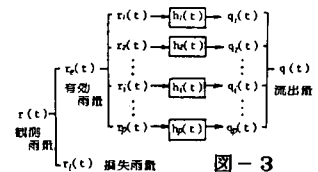


図-3

いま、有効雨量 $re(t)$ が2つの降雨成分 $r1(t), r2(t)$ から構成されているとすると、 $r(t)=r1(t)+r2(t)$ 、 $q(t)=q1(t)+q2(t)$ より(14)式、(15)式が得られ(8)式より(16)式が求まる。

(15)式において未知数は $H1(\omega) \cdot H2(\omega) \cdot R1(\omega)$ であり、一般にこの式を直接解くことはできないが、 $r1(t)$ が卓越するならば $H(\omega)$ は $H1(\omega)$ の近傍の値をとり、逆に $r2(t)$ が卓越する場合には $H2(\omega)$ に近ずき、 $H(\omega)$ は、 $H1(\omega)$ と $H2(\omega)$ の中間の値をとることが予想される。

実際、実測資料を用いてゲイン・位相を計算すると同一流域であっても洪水毎に乱れが生じる。従って、同一流域における複数の出水例のナイキスト図・ゲイン線図・位相線図を求めるとこれらの情報から二流出成分 $H1(\omega) \cdot H2(\omega)$ を推定できると思われる。伝達関数 $H1(\omega) \cdot H2(\omega)$ を(17)式で逆変換すると瞬間単位図が求まり、従って二流出成分の単位図を求めることができる。

$H1(\omega) \cdot H2(\omega)$ が求まると未知数は $R1(\omega)$ だけとなり、(18)式・(19)式の逆変換公式によって、 $r1(t)$ を求めることができ降雨の逆推定も可能となる。

4. 実流域における計算例

計算の対象とした出水例を表-2に示す。有効雨量は、藤田がエントロピー法で推定した値を用い、直接流出量はハイドログラフ立ち上がり時刻と減水部第二折曲点を直線で結ぶ分離方法を採用した。鶴川地点の周波数応答特性を図-4に示す。(a)はゲイン[dB]、(b)は位相[rad]、(c)はナイキスト図である。cut-off 周波数は $\omega=0.5$ 以上の周波数帯でゲインの減衰が著しいので $\omega=0.5$ とした。周波数応答特性より求めた鶴川・大和田地点の各周波数に対応するタンク時定数 K とむだ時間 L を図-5・

6に示す。

図-6の大和田地点においてNo.2は、変動が激しく一定値とみなすことはできないのでむだ時間 L を導入した流出モデルでは説明できない流出であると思われる。各周波数において変動の少ない K と L の平均値を用いて鶴川・大和田地点の流出を再現したものを図-7・8に示す。図-8・(a)は、タンクが1段と仮定して求めた K と L から流出を再現したものである。図-8・(b)は2段タンクを仮定した結果である。同一の流出であっても、むだ時間 L の導入により1段タンクモデルと2段タンクモデルの両方で再現することができた。

このような結果は、他の流出にも多く見られた。このことは高次の遅れ系を(みかけのむだ時間 L)+(低次の遅れ系)で近似できることを示している。

計算の対象とした地点の内4例について、むだ時間 L ・タンク時定数 K 及び降雨特性を表-3に示す。本手法において K と L を同定できた流出は、同一流域内において比較的中小規模の流出(降雨)であった。また、幌糠の流出番号No.4、大和田のNo.2、鹿の子ダムのNo.5は K と L を同定できない流出であり、他の流出と比較すれば大規模流出(降雨)である。

表-2 採用した資料

水系	地点	流域面積(km ²)	洪水番号
留萌川	峠下	48.7	1,2
	幌糠	168.8	1,2,3,4
	大和田	245.0	1,2,3,4,5,6
後志利別川	今金	361.4	1
鶴川	穂里	122.7	1,2
	穂別	949.5	1,2,3,4
	鶴川	1228.0	1,2,3,4,5
渚滑川	渚上	233.3	1,2,3
	上渚滑	1050.6	1,2
常呂川	鹿の子	124.0	1,2,3,4,5
	北光社	558.5	1,2,3
	北見	1394.2	1,2,3,4

表-3 むだ時間 L ・タンク時定数 K 及び降雨特性

地点	No	L	K	降雨継続時間 (hr)	総降雨量 (mm)	平均降雨量 (mm/hr)
幌糠	1	0.2	4.3	13	27.9	2.1
	2	3.3	4.2	10	28.0	2.8
	3	2.3	3.6	8	27.8	5.6
	4	—	—	34	100.7	3.0
大和田	1	3.9	3.1	26	34.5	4.7
	2	—	—	35	126.2	3.6
	3	3.4	5.7	14	79.6	19.4
	4	1.5	4.7	14	33.1	10.2
	5	0.4	5.2	7	33.2	8.1
	6	2.0	4.1	18	43.7	5.1
鹿の子ダム	1	0.0	2.6	20	15.1	0.8
	2	1.4	2.6	14	45.0	3.2
	3	1.3	2.8	25	21.7	0.9
	4	1.2	3.6	33	19.0	0.6
	5	—	—	26	55.8	2.1
鶴川	1	5.5	4.5	28	124.2	4.4
	2	7.5	5.0	13	28.0	2.2
	3	7.2	4.2	23	28.7	1.2
	4	6.0	6.0	18	91.6	5.1
	5	1.7	5.6	24	102.7	4.3

タンク数を2段と仮定して求めた各地点の流出毎のタンク時定数 K ・むだ時間 L と流域面積 A との関係を図-9・10に示す。図-9において、 K は A の大きさによってある幅をもって変動している。その幅は小流域ほど大きく大流域ほど小さくなっている。また、上限値は一定であるが、下限値は A が大きくなるほど K も大きくなっている。このことは小流域ほど流出の局所的な影響を強く（大流域ほど影響は弱く）受けることを意味する。図-10によると、むだ時間 L は流域面積 A との強い相関関係はみられないが、上限値は A によって規定される。この場合 L の上限値は先行降雨及び土壌水分の初期状態が非常に少ない場合を表わしていると思われる。また、鶴川地点と峠下地点は、流域の面積差が1179.3Kmもあるのにむだ時間の差は5時間である。これは流出に寄与する流域が全体ではなく部分的であるPartial Source Areaの概念を表わしていると思われる。

むだ時間 L と初期降雨強度 $r(t=1)$ の関係を図-11に示す。図から $r(t=1)$ と L には相関があり $r(t=1)$ が大きくなると L が小さく $r(t=1)$ が小さいと L が大きくなることがわかる。 $r(t=1)$ が大きいと表面流の発生が顕著であるからであろう。

表-3においてむだ時間 L とタンク時定数 K を同定できなかった大規模流出は、その非線形要素は降雨の分離則にあるとして流出成分の分離を行なった。図-12に大和田地点における複数の流出例の周波数応答特性から推定した伝達関数 $H1(\omega) \cdot H2(\omega)$ を示す。なお、推定法の詳細については参考文献(4)を参照されたい。図-13は、 $H1(\omega)$ 、 $H2(\omega)$ から逆推定した単位図 $U1$ 、 $U2$ を示し、破線は藤田がエントロピー法で求めた単位図 $w1$ 、 $w2$ である。 $w1$ は降雨開始時の単位図であり、 $w2$ は降雨終了時の単位図を示している。また、逆推定した降雨 $r1$ 、 $r2$ と単位図 $U1$ 、 $U2$ から流出を再現したものを図-14に実線で示す。破線は観測値である。同様に幌糠地点における大規模流出NO.4を流出成分を分離して推定した単位図と再現した流出を図-15及び図-16に示す。いずれにおいても周波数領域から機械的に逆変換したにもかかわらず十分な精度で一致していると思われる。

5. 結 論

本研究で得られた主な結論を以下に示す。

1. むだ時間 L を無理なく導入できる周波数応答法でタンク時定数 K とむだ時間 L を同定する手法を示した。
2. 同一流域であっても流出毎に L と K は変動する。この変動特性を検討した結果、以下のことがわかった。
 - a) K は流域面積 A の大きさによってある幅で変動する。その幅は小流域ほど大きく大流域ほど小さい。
 - b) L は A に強い相関は認められないが上限値は A によって規定される。また L は降雨開始時の強度 $r(t=1)$ と強い相関関係があり、 $r(t=1)$ が大きいと L は小さく、逆に $r(t=1)$ が小さいと L は大きくなる。
3. 本手法で K と L を同定すると一段タンクと二段タンクモデルの両方に従う流出が存在した。このことは、高次遅れ系を(みかけのむだ時間 L) + (低次遅れ系)で近似できることを意味する。
4. 3では再現できない流出が存在した。この流出に対して流出成分を分離することで再現できた。
5. K と L の遅延要素を考慮したモデルで再現できた流出は中小規模の流出であり、分離要素を考慮して流出成分の分離を行なうことにより再現できた流出は大規模流出であった。このことから同一流域であっても降雨特性によって降雨-流出の変換機構が変化することが明らかになった。

最後に本研究の遂行にあたり、文献等の御紹介、貴重な資料の提供ならびに終始適切な御指導を戴きました北海道大学・藤田陸博教授に深謝いたします。

参考文献

- (1) 日野・長谷部：流量時系列のみによる流出解析 土木学会論文報告集、第300号、1981
- (2) 藤田・道口：北海道内諸河川における流出成分の分離について 土木学会北海道支部論文報告集第42号、1986
- (3) 嵯峨・藤田：非線形流出系の周波数応答解析について 第39回年講、1984
- (4) 嵯峨・藤田：周波数応答法を用いた流出成分の分離 第40回年講、1985
- (5) 嵯峨：周波数応答法による流出成分の分離について 土木学会北海道支部論文報告集第41号、1985
- (6) 藤田・神田：新体系土木工学26・水文学 技報堂出版

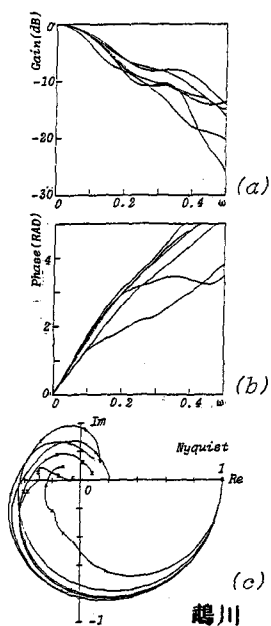


図-4

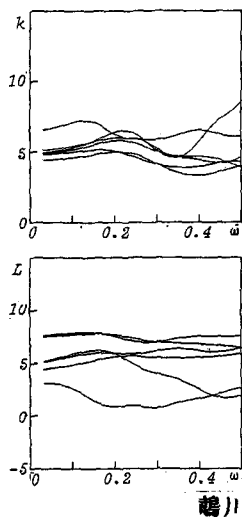


図-5

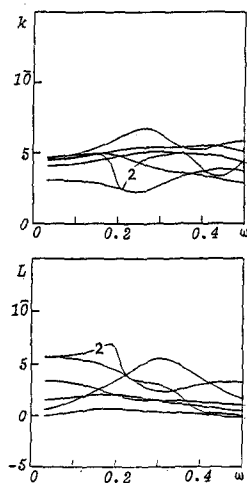


図-6

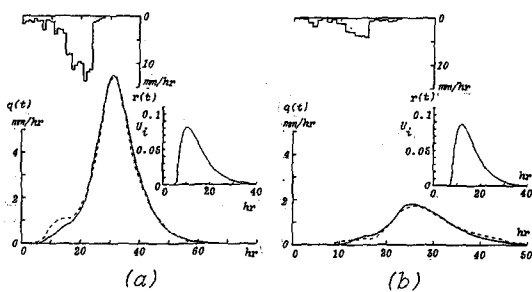


図-7 鶴川

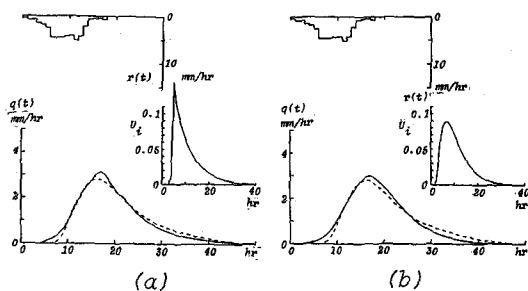


図-8 大和田

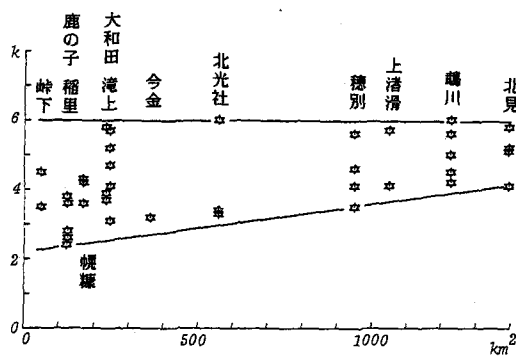


図-9

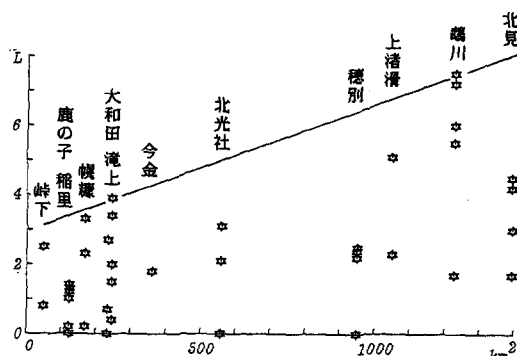


図-10

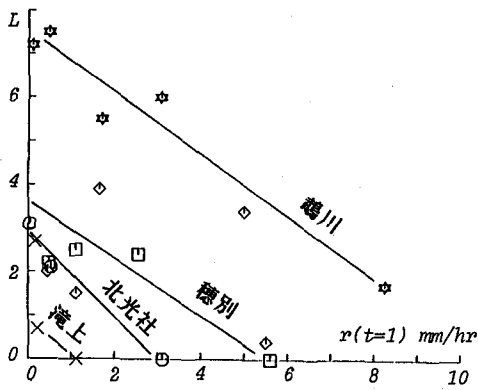


图-11

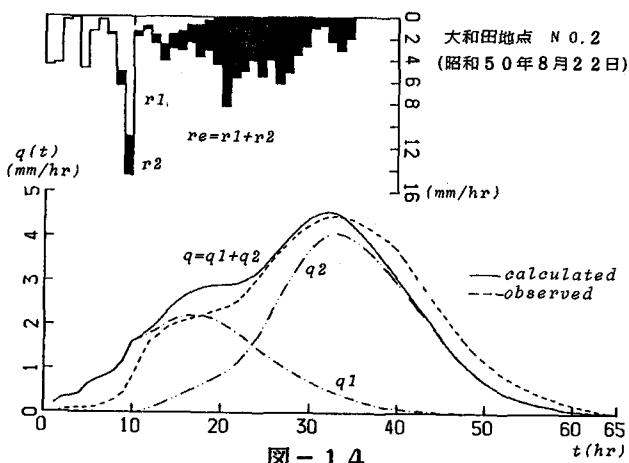


图-14

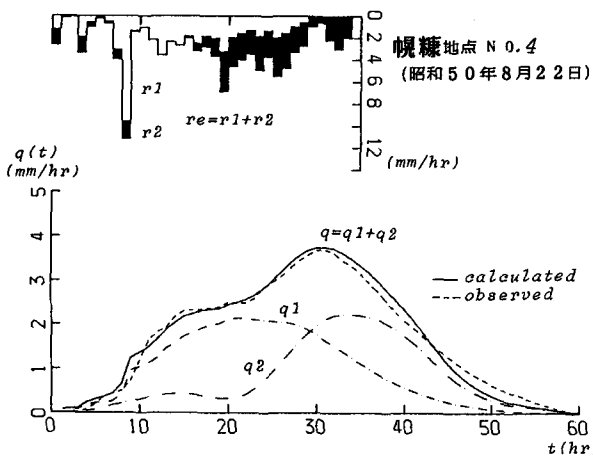


图-16

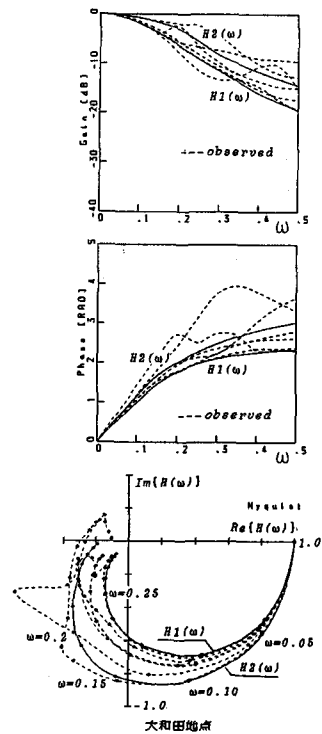


图-12

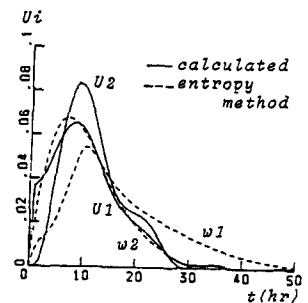


图-13 大和田

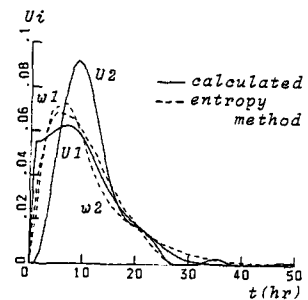


图-15 幌糠