第31回水理講演会論文集　1987年２月

低水流況予測におけるマスキンガムーカンジェ法の実用化に関する一考察

Practical Aspects of Muskingum-Cunge Method in Low Water Management

（株）日水コン　正員　蔵重俊夫
（株）日水コン　正員　和田芳樹
（株）日水コン　正員　大森啓敬

１．はじめに

渇水時においては、流域のいくつかの計画基準点に対し、取水の安定性および河川の機能の維持を目的としたダム運用による利水補給が行なわれている。しかし、昨今の逼迫した水事情から、緊急時には単に計画基準点のみならず取水地点など河道各地点に『いつ』、『どれだけ』水が到達するかを迅速に予測することが必要となる。しかも緊急ダム放流のように比較的シャープな波形の流れについては、その減衰効果を考慮することが今後さらに要求されよう。このため本稿では、渇水時の流況予測モデルとして低水解析上重要な減衰効果が表現でき、河道各地点の流況予測が可能なマスキンガムーカンジェ法に着目し、その有効性を明らかにする。さらに、一般にこうした分布定数系のモデルの適用に際して附随する定数解析の困難性に対し、準線形化を用いたパラメータの自動同定手法を示し、実用性の確保に関する提案を行なう。

マスキンガムーカンジェ法は、洪水解析用に開発されたいわゆるマスキンガム法に対し、Cunge が水理学的考察から、diffusion-analogモデルの陰形差分表示と等価であることを関連づけたものであり、次のような特色をもつ。まず、水理学的原理に基づくものであり、その適用性が明解で、さらに、分布定数系モデルであるため、多地点の流量予測が可能である。また、パラメータの力学的意義が明らかなため、その同定が比較的容易である。このため、現在低水流況解析に一般に供されているタンクモデル、貯留関数法では解析が困難な多地点の流量予測が可能となるとともに、kinematic waveモデルでは表現できない減衰効果を表現しうる。そして、diffusion-analogモデルやdynamic waveモデルなどと比較し、解析が容易であるという利点を持つ。一方、準線形化によるパラメータの自動同定手法は、試行錯誤を要さず、数回の繰り返し計算で迅速にパラメータが同定できる点で他の手法より優れたパラメータ同定手法と考えられている。この手法により、分布定数系のモデルの適用に際して付随する定数解析の困難性がある程度の解決をみるとともに、複雑な河道断面を有する自然河川や、断面形状を特定し難い河川に対しても容易にパラメータの同定が可能となる。

２．マスキンガムーカンジェ法の特性

２－１．マスキンガムーカンジェ法

マスキンガムーカンジェ法の基礎式は（１）～（３）に示すとおりである。

$$Q_{j+1}^{n+1} = C_1 Q_j^n + C_2 Q_j^{n+1} + C_3 Q_{j+1}^n \tag{1}$$

ここに、

$$C_1 = \frac{KX + 0.5\,\Delta t}{K(1-X) + 0.5\,\Delta t} \quad C_2 = \frac{0.5\,\Delta t - KX}{K(1-X) + 0.5\,\Delta t} \quad C_3 = \frac{K(1-X) - 0.5\,\Delta t}{K(1-X) + 0.5\,\Delta t} \tag{2}$$

$$C_1 + C_2 + C_3 = 1 \qquad K = \frac{\Delta X}{\omega}, \quad X = 0.5 - \frac{\mu}{\omega \Delta X} \quad (0 \leqq X < 0.5) \tag{3}$$

ただし、Q_j ；河道区間ΔX への流入量，Q_{j+1} ；ΔX からの流出量，添字は時刻 $t = n\Delta t$ を示す。

一方、diffusion-analogモデルの基礎式は、

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \omega \frac{\partial Q}{\partial X} - \mu \frac{\partial^2 Q}{\partial X^2} = 0 \qquad (\mu > 0) \tag{4}$$

であり、同式のパラメータω，μは (2)，(3)式のものと等価である。また、これらのパラメータについては、速水の理論に基づいた推定方法が常套手段として用いられるが、その手順は図－１に示す通りである。

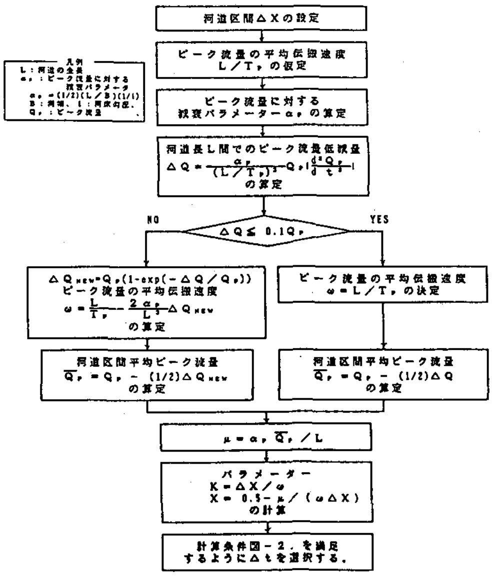
ところが上記の方法以外にも単純に次式でＫ，Ｘを定める方法がある。[2)]

$$K = \triangle x / \omega \quad \text{ただし} \quad \omega = \partial Q / \partial A \fallingdotseq 1.5V \tag{5}$$

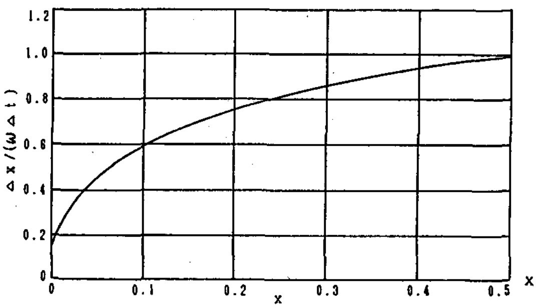
$$X = (1/2)\left(1 - \frac{Q_P}{B\, i \triangle X \omega}\right) \quad \text{ただし、} i\text{：平均河床勾配、}B\text{：川幅} \tag{6}$$

ここにQ_P、ω、Ｖは、ピーク流量、ピーク流量に対する平均伝播速度、平均流速である。

したがって、ある適応範囲内においてこの方法の有効性が示されることは、実用上都合が良く、マスキンガムーカンジェ法のパラメータ決定が更に容易となる。



図－１．速水の理論を根拠とした
パラメータ推定方法

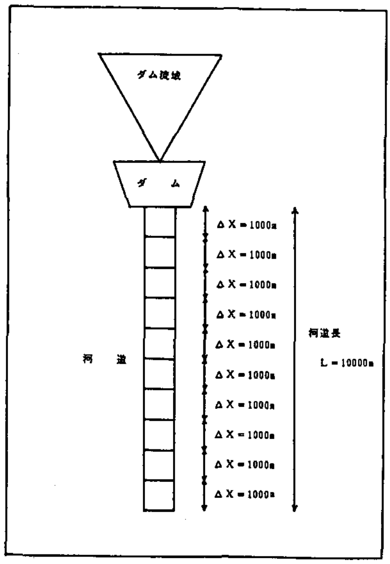


図－２．△Ｘ／（ω△ｔ）～Ｘ曲線
（水理公式集より転記）

２－２．パラメータ推定の簡便法について

先に述べた (5)，(6) 式を用いたパラメータ推定法（以下、簡便法と記す。）に関し、図－３に示す河道モデルを対象として検討した事例について示す。簡便法と速水の理論を基礎としたパラメータの推定方法（以下速水の方法と記す。）の相違は、主としてピークの減衰に関し、ハイドロ波形を考慮するかどうかという点である。したがって推定したパラメータによる流況予測結果の差は、特に低減効果において顕著になると考えられる。速水の方法では、ピーク流量低減量はハイドロ波形の曲率（$\ddot{Q}$）とピーク流量（Q_P）によって影響を受ける。そこで、速水の方法と簡便法による減衰効果の比率を$\ddot{Q}$～Q_P関連において調べた結果を図－４に示す。

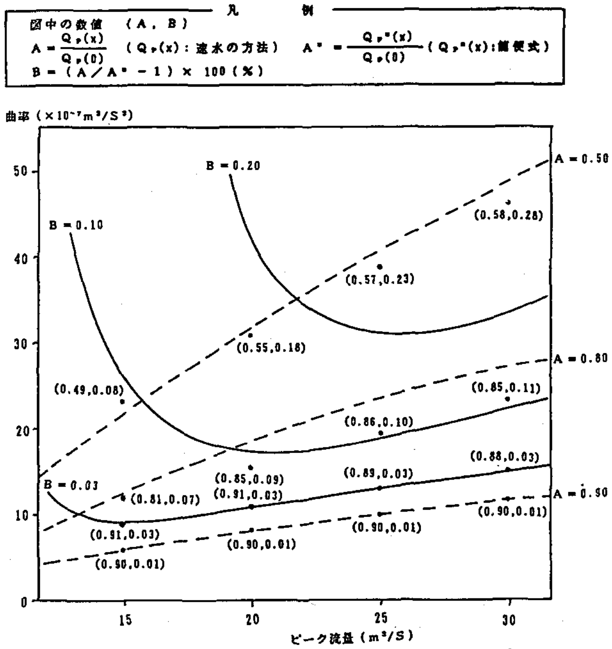
同図より、ピーク流量が大きいほど、いずれの方法も減衰効果が大きくなる他、速水の方法では曲率が大きいほど減衰効果が大きく表われていることが解る。



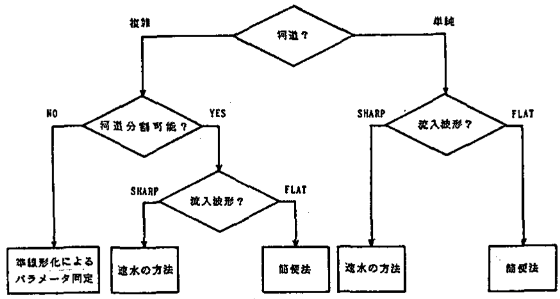
図－３．河道モデル

このためQ_Pが大きくかつ$\ddot{Q}$が大きな場合に、簡便法が速水の方法よりも減衰効果を大きく評価することになる。したがってピーク流量が大きな場合または、曲率（$\ddot{Q}$）が大きな場合には、簡便法を用いると過大な減衰効果を評価する恐れがあるため、例えば、ダム貯水の無効放流を惹起させる可能性があり一般的には簡便法の使用は適切ではないと考えられる。

ところで流域の河道条件によっては、単断面で解析できない場合も考えられる。この場合、一般に河道分割を行なうことにより対応する必要がある。また、自然河川のように河道断面が複雑な場合は、特に渇水時においてその断面形状を一様として設定することが困難なことも多い。このような場合、実績の流量資料にもとづき準線形化手法を用いたパラメータの自動同定を行なうことが一つの方法として有効と考えられる。以上より速水の方法、簡便法、準線形化手法によるパラメータ決定のためのデシジョンツリーは、図－５に示すように設定できよう。



図－４．速水の方法と簡便式のパラメータ推定による低減効果の分析



図－５．各パラメータ推定方法の適用方針

3．準線形化を用いたパラメータの自動同定

3－1．準線形化とマスキンガムーカンジェ法

bellman ら[3)4)]により提案された準線形化は非線形汎関数方程式系の数値解法の１つであり、ニュートン・ラプソン法の関数空間への一般化といえる。その有効性は未知のパラメータを含む非線形常微分方程式のパラメータ決定問題において特に発揮される。すなわち、非線形常微分方程式を線形化することにより、パラメータ決定問題を線形常微分方程式の初期値決定問題のくり返し過程に埋没させることができる。したがって、

①非線形微分方程式の直接的な求解を必要としないので計算が単純化される。

②パラメーター以外の変数についてもその初期値をパラメータと同様に決定できる。

③くり返し過程は２次の収束速度をもつことが示されて計算時間も比較的短い。

などの利点を指摘することができよう。図－６に準線形化を用いたパラメータの自動決定フローを示す。

一般に準線形化を用いたパラメータの自動同定は、集中定数系モデルを対象としたものであった。本稿では、マスキンガムーカンジェ法の基礎式が前進差分により容易に常微分方程式系に変換できることに着目し、分布定数系モデルへの準線形化の適用を試みた[5)]。対象とする河道を、図－７に示す。

まず、マスキンガムーカンジェ法の基礎式（１）式を前進差分に着目して定式化すると（７）～（１１）式となる。

$$\dot{Q}_1^n = \{ C_1 Q_0^n + C_2 Q_0^{n+1} - (C_1 + C_2) Q_1^n \} / \Delta t \tag{7}$$

$$\dot{Q}_2^n = \{ C_2 \Delta t \dot{Q}_1^n + (C_1 + C_2) Q_1^n - (C_1 + C_2) Q_2^n \} / \Delta t \tag{8}$$

$$\dot{Q}_3^n = \{ C_2 \Delta t \dot{Q}_2^n + (C_1 + C_2) Q_2^n - (C_1 + C_2) Q_3^n \} / \Delta t \tag{9}$$

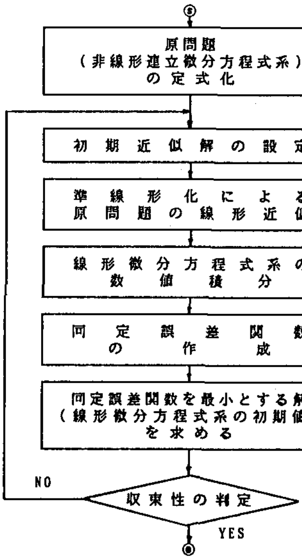
$$\dot{Q}_4^n = \{ C_2 \Delta t \dot{Q}_3^n + (C_1 + C_2) Q_3^n - (C_1 + C_2) Q_4^n \} / \Delta t \tag{10}$$

$$\dot{Q}_5^n = \{ C_2 \Delta t \dot{Q}_4^n + (C_1 + C_2) Q_4^n - (C_1 + C_2) Q_5^n \} / \Delta t \tag{11}$$

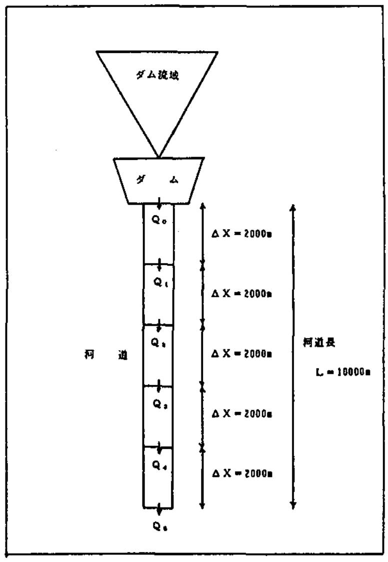
ただし、Q_0 ：ダム放流量，Q_i $_{(i=1,\cdots,5)}$：河道区間（ΔX） i の流出量，

Δt ：計算時間間隔，C_1, C_2 ：パラメータ，n：計算時間間隔

なお、最適化基準は、累積２乗誤差とし、正規方程式は、ガウス法によって求解した。収束性の判定は、$\dfrac{|C_{n+1} - C_n|}{\max(C_{n+1}, C_n)} < 0.01$ を３回繰り返したとき（ただし、Cはパラメータ）、収束したと判断した。



図－６．パラメータの自動決定フロー



図－７．河道モデル

３－２．パラメータの同定結果

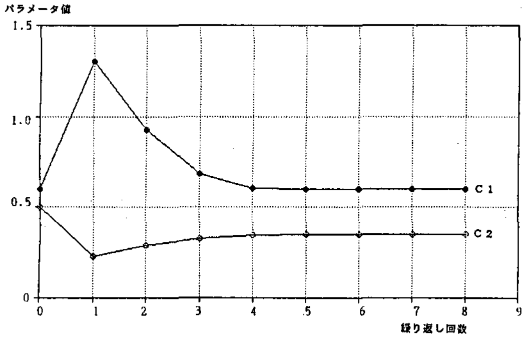
まず、マスキンガムーカンジェ法のC_1，C_2を仮定して流出計算を行ない、その流出ハイドログラフ（Q_5）を作成した。次いで流入ハイドログラフ（Q_0）および流出ハイドログラフ（Q_5）が、既値であると仮定して、準線形化によりそのパラメータを自動同定することにより、準線形化手法のマスキンガムーカンジュ法におけるパラメータ自動同定の有効性を検証する。なお、各河道区間流出量の初期ハイドログラフは　$Q_1(t)=Q_1(1)$，$Q_2(t)=Q_2(1)$，$Q_3(t)=Q_3(1)$，$Q_4(t)=Q_1(1)$，$Q_5(t)=Q_1(1)$として与えている。

パラメータの収束過程を図－８に、河道流出量（Q_5）の収束過程を図－９に、河道区間流出量（Q_1, Q_2, ・・・Q_5）の予測結果を図－１０に示す。

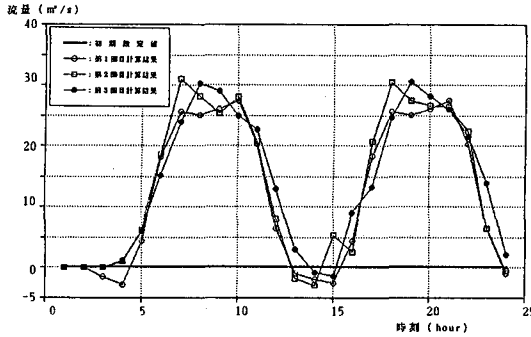
以上より、次のことが考察できる。

パラメータの同定結果は設定値　$C_1 = 0.600$，$C_2 = 0.350$　に対し、同定値　$C_1 = 0.600$，$C_2 = 0.350$ であること、また、設定した流量ハイドログラフと同定した流量ハイドログラフの累積２乗誤差は、0.115×10^{-27} であることから、準線形化によるパラメータの自動同定の精度の高さが明確となった。

また、繰り返し回数は８回であるが、５回程度で最終のパラメータ値にほとんど収束しており、しかも、計算時間は１６ビットのマイクロコンピュータで１分程度であることから、その収束の早さが確認され、本手法の実用性の高さが確認された。



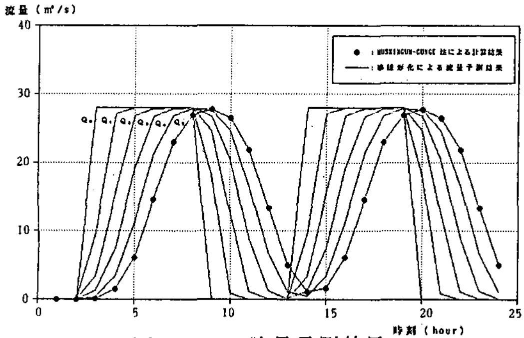
図－８．パラメータＣ１・Ｃ２の収束過程



図－９．予測流量の収束過程

４．おわりに

本稿では、渇水時の流況予測モデルとして、低水解析上重要な減衰効果が表現でき、河道各地点の流況予測が可能なマスキンガムーカンジェ法に着目し、その有効性を明らかにした。すなわち、昨今の逼迫した水事情から、緊急時には単に計画基準点のみならず、河道各地点に「いつ」、「どれだけ」水が到達するかを迅速に予測する必要がある。特に緊急ダム放流のように比較的シャープな波形の流れについては、その減衰効果を考慮することが今後さらに要求されると考え 、マスキンガムーカンジェ法を低水流況予測に用いることを提案した。さらに、パラメーターの推定方法と波形・河道条件との関係から、パラメーター推定方法と適用限界の関係を明らかにした。さらに、一般にこれら分布定数系のモデルの適用に付随する定数解析の困難性に対し、準線形化を用いたパラメーターの自動同定手法の有効性を示し、実用性の確保に関する提案を行なった。しかし、今回の検討は、数値事例にもとづくもので、今後さらにケーススタディを重ねることから、低水流況予測の方法論を確立していきたいと考える。



図－１０．流量予測結果

尚、本稿の作成にあたり（株）日水コンの中川芳一氏には貴重な助言を頂いた。ここに謝意を表します。

〔参考文献〕

1)R.Bettes,B.Sc. and R.Price,M.A.,Ph.D.:COMPARISON OF NUMERICAL METHODS FOR ROUTING FLOW ALONG A PIPE,Hydraulics Reseach Station,1976.

2)Bellman,R.and Kalaba,R.:Quasilinearization and Nonlinear Boundary Value Problems,American Elsevier,New York,1965.

3)萩原良巳・中川芳一・蔵重俊夫：準線形化の河川計画への適用に関する研究,NSC研究年報,VOL.12,No.1,特定研究（７）,1984.

4)ARVED J.RAUDKIVI:HYDROLOGY,Pergamon Press,p258～p270,1979.

5)Yeh,W.W-G and Tauxe,G.W.:Optimal Identification of Aquifer Diffusivity Using Quasilinearization,Water Resources Res.,Vol.7,No1,1971.