

あいまい推論の流出予測問題への応用

An Application of Fuzzy Reasoning to Runoff Prediction

北海道大学 工学部 正員 藤田睦博

1. はじめに

著者はこれまで流出予測問題へのFuzzy集合理論の応用の可能性について検討してきた。^{1,2} Fuzzy集合は本来、確率論では表現できないような「あいまい」な情報を対象としているので、降雨時に十分な水文情報を入手することが困難な中小河川流域においても、このような条件下での流出予測が可能であると考えたからである。

これまで著者の手法に関して、その問題点を挙ると以下のようである。

- (1) 既存の流出モデルを全く利用できないアルゴリズムになっている。
- (2) 予測値とその実現値との差、すなわち、

予測誤差の大小が次の時間ステップの予測値に全く影響しない形式になっている。本研究は、Fuzzy集合理論の利点を利用しつつ、上記の二つの点を考慮できるアルゴリズムの開発を目的としている。

2. 基礎理論

最も単純な図-2・1に示す線形タンクモデルについて考えてみよう。図において、 $x(t)$ はタンクの上部のパイプ内の流量であり、記号 D は弁である。また、タンクの底部からの流出量を $Q(t)$ とし、 $Q_s(t)$ は目標流量である。(A)は $Q(t)$ と $Q_s(t)$ の偏差 $e(t)$ をなるべく小さくするようにパイプの弁 D を開閉しようとするものである。

$$\begin{aligned} (A) \quad e(t) &= Q(t) - Q_s(t) \\ (B) \quad e(t) &= Q_{out}(t) - Q_s(t) \end{aligned} \tag{2.1}$$

(B)は $e(t)$ をなるべく小にするようにタンクの底部の弁を調節しようとするものである。弁通過後の流量は、弁の開度 $B(t)$ と弁通過前の流量の積で表されるものとする。

$$\begin{aligned} x_{inp}(t) &= B(t) \cdot X(t) \\ Q_{out}(t) &= B(t) \cdot Q(t) \quad 0 \leq B(t) \leq 1 \end{aligned} \tag{2.2}$$

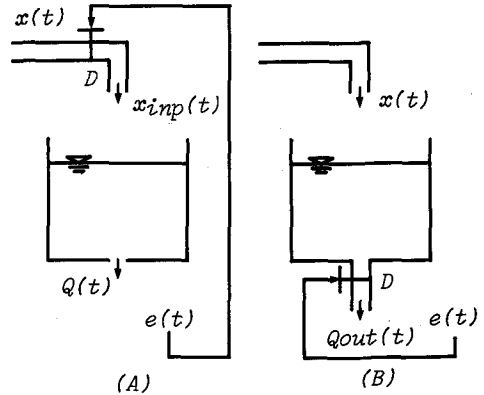


図- 2・1 線形タンクの制御

これらのタンクの制御問題を流出系と対比させると $x_{inp}(t)$ は有効雨量に相当し、(B)の場合は流出系の時定数を求める問題になっている。

さて、図-2・1の弁を手動で制御する場合を考えてみよう。目標流量からの偏差 $e(t)$ が正で大であれば急いで弁を閉め、負で大であれば逆に弁を開けるであろう。次に、この問題をFuzzy理論に基づく「あいまい」推論法を用いて定式化する。山崎ら³は、式(2・1)目標値からの偏差 $e(t)$ のほか偏差の時間増分 $\Delta e(t)$ を採用して

$$\Delta e(t) = de/dt \tag{2.3}$$

表-2・1に示すようなルールの例を提案している。表中、NB, NM, NS はそれぞれ Negative Big, Negative Medium, Negative Small を意味し、PB, PM, PS は Positive Big, Positive Medium, Positive Small を意味している。また、Z0 は約ゼロを表す。制御出力の増分を ΔB とすると、表-2・1は次の13個の条件付命題を意味する。

if e is NB then Δe is Z0 then ΔB is PB.
or
if e is NM then Δe is Z0 then ΔB is PM.

or
 : : : : : :
 or
 if e is NS then Δe is ZO then ΔB is PS.
 or
 if e is ZO then Δe is NB then ΔB is PB.
 or
 if e is ZO then Δe is NM then ΔB is PM.
 or
 : : : : : :
 or
 if e is PM then Δe is ZO then ΔB is NM.
 or
 if e is PB then Δe is ZO then ΔB is NB.

(2.4)

表- 2・1 制御ルール

Δe	NB	NM	NS	ZO	PS	PM	PB
e							
NB	二				PB		イ
NM					PM		
NS					PS		
ZO	PB	PM	PS	ZO	NS	NM	NB
PS					NS		
PM					NM		
PB	ハ				NB		□

(記号(イ)～(ニ)については後述する)

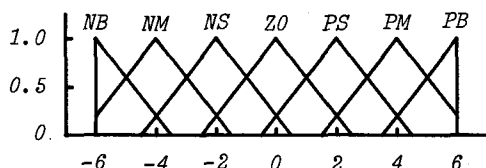


図- 2・2 規格化されたメンバーシップ関数

表-2・1のNB,NM,NS,...には、それぞれ図-2・2に示す規格化されたメンバーシップ関数が対応しているものとする。具体的な計算方法は、図-2・3に示すように式(2・4)の第1式の $e, \Delta e$ に対応するメンバーシップ関数NB,ZOの値A,Bの値の小さい方の値を採用し、 ΔB のメンバーシップ関数PB上のCDEF(ハッチ部)を $e, \Delta e$ に対する ΔB のメンバーシップ関数とする。同様に、式(2・4)の第2式の $e, \Delta e$ に対応する ΔB のメンバーシップ関数をIJKLMとする。表-2・1には13個の条件付命題があるので、13個の ΔB のメンバーシップ関数が得られ、これらは図-2・3の最下部の図のように各々 ΔB のメンバーシップ関数の最大値を合成して、最終的な ΔB のメンバーシップ関数の形状T,U,V,W,X,Y,Zを得る。具体的な制御出力の値としては、図形TUVWXYZの重心の座標値として ΔB を定義する。(メンバーシップ関数の代表値の表示法としては、この他メンバーシップ関数の最大値の座標値で定義する場合もある)図-2・3の計算方法は、Fuzzy理論におけるMamdani的な取扱いを示しているが、その意味するところを通常の集合論との対比で論じると以下ようになる。2つのメンバーシップ関数 x, y を想定し、図-2・4のように与えられるものとする。メンバーシップ関数には種々の属性が対応しているのが、いま、 x の属性として「若い人」、 y の属性として「美人」を考える。これらの属性は日常会話ではよく用いられるが、確率論的には規定できず、むしろFuzzy的な情報である。「美人」でかつ「若い人」の集合、すなわち、積集合は図-2・4(A)のように表現できることが直感的に理解できよう。すなわち、 x, y のメンバーシップ関数の積集合を意味する

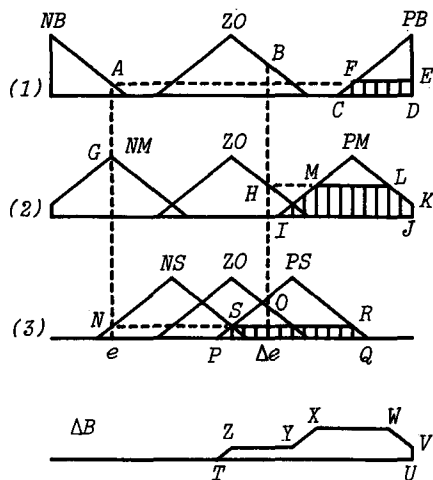


図- 2・3 制御出力の計算法

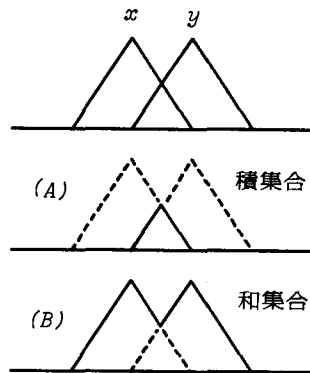


図- 2・4 メンバーシップ関数の積集合と和集合

メンバーシップ関数は、(A)のように x, y の両メンバーシップ関数の小さい方を連ねた形状で定義される。また、「美人」もしくは「若い人」の集合、すなわち、和集合は図-2・4(B)のように表現できる。メンバーシップ関数の和集合のメンバーシップ関数は、 x, y の両メンバーシップ関数の大きい方を連ねた形状で定義されることが理解できるであろう。図-2・3において $\Delta e(t)$ と $e(t)$ のメンバーシップ関数に関しては積集合をとり、最下部のメンバーシップ関数は13個の条件付命題の和集合をとっていることになる。

3. 制御特性の検討

次に簡単な計算例によって式(2・4)の制御特性を検討する。図-2・1(A)のタンクにおいて時定数を K として

$$K \frac{dQ}{dt} + Q = x_{inp}(t) \quad (3.1)$$

$t = t_1$ で $Q = Q_1$

式(3・1)の解は

$$Q(t) = Q_1 \exp\left(-\frac{t-t_1}{K}\right) + \int_{t_1}^t \frac{1}{K} \exp\left(-\frac{t-\tau}{K}\right) x_{inp}(\tau) d\tau \quad (3.2)$$

ここで

$$t = i\Delta t, t_1 = (i-1)\Delta t, Q(t) = Q_i \quad (3.3)$$

とおき、時刻 $t \sim t_1$ 間の $x_{inp}(\tau)$ は $x_{inp}(t_1)$ で与えられるものとする

$$Q_i = Q_{i-1} \exp\left(-\frac{\Delta t}{K}\right) + x_{inp}(i-1) \{1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{K}\right)\} \quad (3.4)$$

i 時刻において

$$\begin{aligned} e(i) &= Q_i - Q_{set}(i) \\ \Delta e(i) &= e(i) - e(i-1) \end{aligned} \quad (3.5)$$

が既知なので、式(2・4)に従って制御出力の増分 ΔB_i が得られるので

$$\begin{aligned} B_i &= B_{i-1} + \Delta B_i \\ x_{inp}(i) &= B_i \cdot x(i) \end{aligned} \quad (3.6)$$

とすることにより、時間ステップを1時刻進めることが出来る。実際の計算にあたっては、図-2・2に示すように規格化されたメンバーシップ関数を定義しているので、式(3・5) $e(i)$ 、 $\Delta e(i)$ に適当な scaling parameter を乗じて、メンバーシップ関数の変域 $(-6, 6)$ に入るようにする。

$$e_*(i) = \begin{cases} 6 & \alpha e(i) > 6 \\ \alpha e(i) & -6 \leq \alpha e(i) \leq 6 \\ -6 & \alpha e(i) < -6 \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\Delta e_*(i) = \begin{cases} 6 & \beta \Delta e(i) > 6 \\ \beta \Delta e(i) & -6 \leq \beta \Delta e(i) \leq 6 \\ -6 & \beta \Delta e(i) < -6 \end{cases}$$

同様に B_i は弁の開度と定義しているので次のように扱うものとする。

$$B_{*i} = \begin{cases} 1 & \gamma B_i > 1 \\ \gamma B_i & 0 \leq \gamma B_i \leq 1 \\ 0 & \gamma B_i < 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

また、タンクの時定数 K 、流入量 $x(t)$ 目標流量 Q_s は、式(3・9)で与えられるものとする。

$$K = 20$$

$$x(t) = 6 + 2 \sin\left(\frac{5\pi}{50} t\right) \quad (3.9)$$

$$Q_s(t) = 3.5$$

タンクへの流入量 $x(t)$ は周期関数、目標流量 Q_s を一定として、弁の制御が効果的に実施できるかを検討しようとしている。図-3・1は式(3・4)、(3・6)において $\Delta t = 0.05, Q_0 = 0, B_0 = 0$ として計算した結果を示している。また、式(3・7)、(3・8)では次の値を採用した。

$$\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1/6 \quad (3.10)$$

$t=0$ でタンク内の水深を0としているので、タンクからの流出量 $Q(t)$ が目標流量 Q_s に近づくまでは、弁の開度は $B(t)=1$ となっている。その後、流入量 $x(t)$ が多い区間では弁の開度の調節が頻繁に実施され、流量を一定に保っていることがよくわかる。

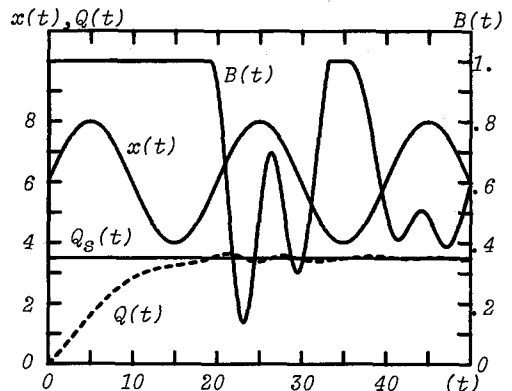


図-3・1 線形タンクの制御 (1)

次に、制御ルールおよび初期条件などは図-3・1場合と全く同一とし、規格化されたメンバーシップ関数を図-3・2のように変更したときの制御結果を図-3・3に示す。メンバーシップ関数の基底幅が、制御結果におよぼす効果を見ようとするものである。図-3・1と図-3・3の $B(t)$ を比較すると、図-3・3では $B(t)$ が二種類の値だけをとっていることがわかる。弁が十分に制御されていないことになる。弁の開度 $B(t)$ が時間にかかわらず一定値をとるということは、式(3・6)の第1式における制御出力の時間増分 ΔB_i が0ということになる。すなわち、図-2・3において e 、 Δe に対応する A, B, G, H などの値が0となる場合が多くなり、その結果として図-2・3の最下部の ΔB のメンバーシップ関数が全域にわたって0となるため、みかけ上重心を0として計算していることになる。したがって、図-2・2に示すように各メンバーシップ関数が適当に重なっていることが、制御が効果的に行われる上で重要である。

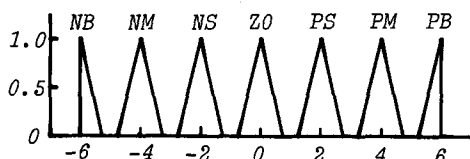


図-3・2 規格化されたメンバーシップ関数

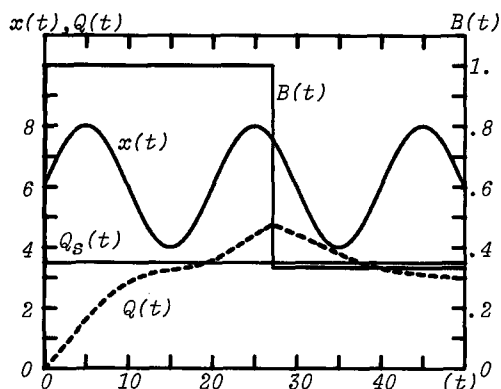


図-3・3 線形タンクの制御 (2)

4. 実流域における計算例

ここでは、図-2・1の(B)に相当するモデルで計算する。一般に、降雨の継続時間より流出の継続時間が長いので、図-2・1の(A)のモデルでは降雨終了後の制御が不可能となる。流出モデルとしては、木村の総合貯留関数を参考に次式を用いるものとする。

$$S = B(t) \cdot Q^{0.5} \quad (4.1)$$

S : 貯留量 (mm)、 Q : 流出量 (mm/nr)

貯留係数 $B(t)$ を時間の関数として、これを制御変数として扱う。以後の数式の展開においては、流出量の予測値に $\hat{\cdot}$ 印を付して実測値と区別する。式(4・1)を連続の式に代入して次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{B(t) \hat{Q}(t)^{0.5}\} + \hat{Q}(t) &= r(t - \Delta t) \\ (i-1)\Delta t \leq t & \\ \hat{Q}\{(i-1)\Delta t\} &= Q\{(i-1)\Delta t\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

$r(t), Q(t)$ は、実測雨量、実測流量である。予測のリードタイムを Δt としているので、式(4・2)の右辺を $r(t)$ ではなく $r(t - \Delta t)$ としている。

式(4・2)において

$$\begin{aligned} B(t) &= B(\text{const.}) \\ t &= t_1 \quad \hat{Q} = Q_1 \end{aligned} \quad (4.3)$$

とすると

$r(t - \Delta t) = r(\neq 0, \text{const.})$ のとき

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= r \left\{ \frac{1-C}{1+C} \right\}^2 \\ C &= \frac{\sqrt{r} - \sqrt{Q_1}}{\sqrt{r} + \sqrt{Q_1}} \exp \left\{ \frac{-2\sqrt{r}(t-t_1)}{B} \right\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

$r=0$ のとき

$$\hat{Q} = \left\{ \frac{1}{(t-t_1)/B + 1/\sqrt{Q_1}} \right\}^2 \quad (4.5)$$

と書くことができる。したがって、

$r > 0$ のとき $B \rightarrow \text{大}, C \rightarrow \text{大}, \hat{Q} \rightarrow \text{小}$

$B \rightarrow \text{小}, C \rightarrow \text{小}, \hat{Q} \rightarrow \text{大}$

$r=0$ のとき $B \rightarrow \text{大}, \hat{Q} \rightarrow \text{大}$

$B \rightarrow \text{小}, \hat{Q} \rightarrow \text{小}$

の関係を得るので、式(3・6)の第1式を次のように書き改めねばならない。

$$B_i = \begin{cases} B_{i-1} - \Delta B_i & r > 0 \\ B_{i-1} + \Delta B_i & r = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

実際の計算にあたっては $t \in (i-1)\Delta t$ の範囲で $B(t) = B\{(i-1)\Delta t\}$ (4.7)

として計算するものとする。予測誤差 e とその時間増分 Δe は、 $(i-1)\Delta t$ 時刻において

$$e\{(i-1)\Delta t\} = \hat{q}\{(i-1)\Delta t\} - q\{(i-1)\Delta t\}$$

$$\Delta e\{(i-1)\Delta t\} = e\{(i-1)\Delta t\} - e\{(i-2)\Delta t\}$$
(4.8)

したがって、 $t = (i-1)\Delta t$ で式(4.8)において $e, \Delta e$ が求まるので表-2.1のような制御ルールが与えられると $\Delta B(t)$ が得られる。式(4.6)で $B(t)$ が得られるので、式(4.2)において $t = (i-1)\Delta t$ 時刻の実測流量を初期値として微分方程式を解くことにより $t = i\Delta t$ の予測値 $\hat{q}(i\Delta t)$ を計算できる。

次に問題となるのは、制御ルールである。図-4.1は、表-2.1のルールに基づく制御出力 ΔB のコンターマップである。図における(A), (B)の0の領域は、表-2.1のルールが不足しているために、この領域内では、 $e, \Delta e$ の値にかかわらず制御不可能なエリアである。不足する制御ルールをどのように補うかについては必ずしも定まった方法がなく、直感的な考察に基づいてルールを設定しなければならない。図-4.2はシステムからの出力とその目標値の関係を模式的に表したものである。(イ)の部分では $e < 0$ 、 $\Delta e > 0$ で破線(u)のように出力が目標値に近づ

くと都合よく、(ロ)の部分では $e > 0$ 、 $\Delta e > 0$ で破線(v)のように出力を目標値に接近させたい。(ハ)の部分では $e > 0$ 、 $\Delta e < 0$ である。(ニ)の部分では $e < 0$ 、 $\Delta e > 0$ となっている。極値の近傍における(イ)~(ニ)の状態を表-2.1に示している。(イ)、(ハ)の部分に関しては目標値に接近する状態にあるので、問題となるのは目標値から離れる状態にある(ロ)、(ニ)の部分であろう。以上のことを考慮して表-4.1に示すように新たに9個の制御ルールを追加するものとする。図-4.3は表-4.1の新制御ルールのコンターマップである。図-4.1と比較して制御不可

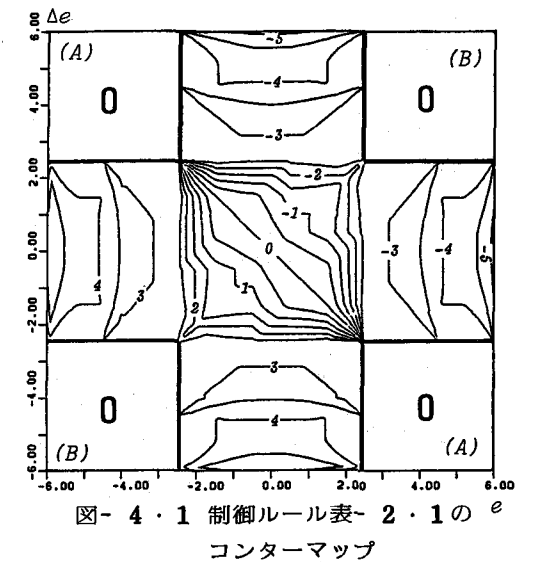
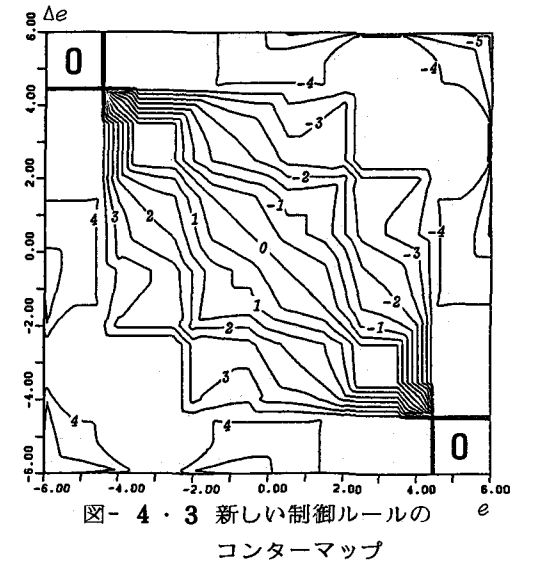
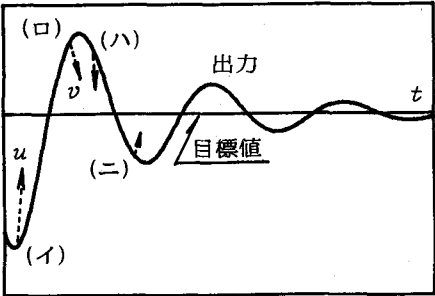


表-4.1 新しい制御ルール

Δe e	NB	NM	NS	ZO	PS	PM	PB
NB	PB				PB	PM	
NM		PM			PM		
NS			PS	ZO			NM
ZO	PB	PM	PS	ZO	NS	NM	NB
PS	PM		ZO	NS			
PM					NM		NM
PB			NM	NB			NB



能な領域が大幅に減少していることがわかる。実際の計算においては式(3・7)に示すように、scaling parameter α, β を乗じた e^* 、 Δe^* を用いる。したがって、 α, β の値によっては表-2・1の制御ルールでも十分な場合があり、本理論の未完成な部分である。

実測資料としては神流川⁴ におけるデータを用い、scaling parameter としては次の値を用いた。

$$\alpha=5, \beta=5, \gamma=2 \quad (4.9)$$

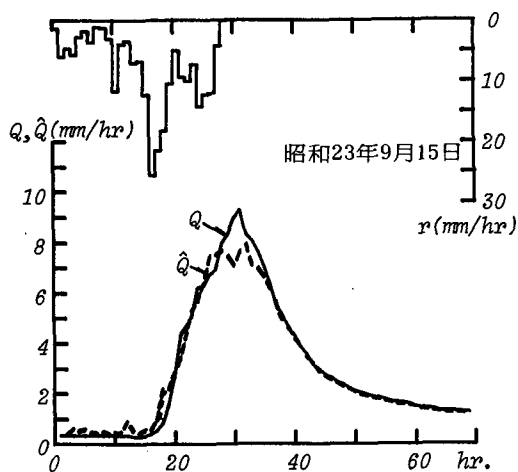


図-4・5 神流川における計算結果 (1)

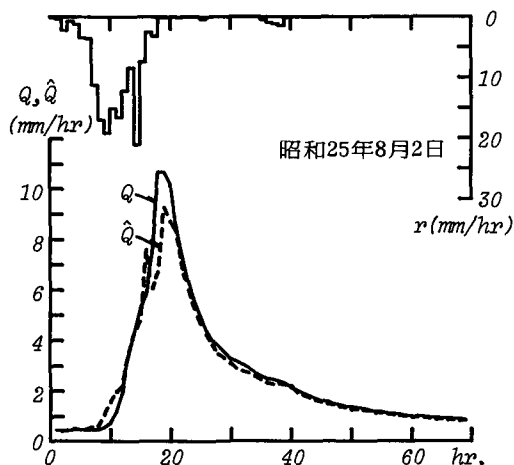


図-4・5 神流川における計算結果 (2)

また、式(4・1)の貯留係数 $B(t)$ の初期値としては $B(0)=30$ を採用した。図-4・5は神流川流域における計算結果を示している。

5. まとめ

Fuzzy理論に基づく「あいまい」推論を用いて、カルマンフィルター理論と同様にシステムのパラメータの同定と予測が同時に可能であることを示した。式(4・2)が観測値方程式、式(4・4)が状態方程式に相当していることがわかる。

今後の研究課題について述べると以下のようになる。

- (1) ここでは、制御変数を1個のみの場合を扱っているが、多変量の制御変数をも扱うことの可能なアルゴリズムの開発。
- (2) 制御ルールを予め定めてその後に制御出力を計算しているが、制御ルールを途中で自動修正するアルゴリズムの開発。
- (3) scaling parameter の決定法。
- (4) 制御出力の計算法として図-2・3に示す手法を採用している。この手法はMamdani的な取扱いであるが、この他種々の計算手法が提案されており、今後、吟味する必要がある。

参考文献

- 1) 藤田睦博；Fuzzy理論を用いた流出予測、第21回自然災害科学総合シンポジウム講演要旨集、PP.311～314、1984
- 2) 藤田睦博；Fuzzy集合理論の流出予測問題への応用、第29回水理講演会論文集、PP.263～268、1985
- 3) 山崎東、管野通夫；ファジィ制御、システムと制御、VOL.28, NO.7, PP442～446、1984
- 4) 建設省土木研究所水文研究室；神流川流域水文観測資料、1982