

台地の試験流域における平面2次元モデル
による地下水流動・流出解析
Groundwater Flow and Runoff Analysis by Plane
Two-dimensional Model for Upland Experimental Basin

東京都立大学工学部 正員 安藤義久
東京大学工学部 正員 高橋 裕
明治大学付属明治中学校 ○田村孝廣

1. はじめに

従来の地下水流出解析では、地下水流出量のみを解析対象とする場合には地下水流出量を時間の関数として表示する地下水流出の減水式（低減式）による解析が、高木¹⁾や高橋・安藤・伊藤・伊藤²⁾などにより行なわれている。一方、近年いくつかの試験流域において、地下水流出量だけでなく地下水位も同時に観測され、地下水貯留量も含む地下水流出解析が、佐合・石崎³⁾によりタンク・モデルを用いて、Ando, Musiaki, and Takahasi⁴⁾により地下水流出の貯留関数を用いて、水谷・虫明⁵⁾により地下水流出の応答関数を用いて行なわれてきている。以上のように、従来の地下水流出に関する研究では、時間や地下水貯留量の関数として地下水流動を含まないモデルにより地下水流出解析を行なう方法がとられてきたが、安藤・高橋・田口⁶⁾、安藤・高橋・吉田・石川⁷⁾は多角形領域分割を用いて台地の試験流域内において帯水層内の地下水流動を含むモデルにより地下水流出解析を行なうことを試みてきた。本研究では、多角形領域分割ではない通常の平面2次元モデルを用いて台地の試験流域における地下水流動を含む地下水流出解析を行ない、その適合性を検討することを試みる。具体的には、まず不圧地下水の平面2次元モデルの基本式を差分化して解く方法を示し、ついで揚水試験を用いたモデルの検証を行ない、最後に国分寺試験流域へモデルを適用して、モデルの実流域への適合性を検討する。

2. 不圧地下水の平面2次元モデル

不圧地下水の平面2次元の基本式は、ダルシー則と連続式から次式で表わされる。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ K(h-Z) \frac{\partial h}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ K(h-Z) \frac{\partial h}{\partial y} \right\} + R = S \frac{\partial h}{\partial t} \quad \text{..... ①}$$

ここで、 K : 透水係数、 h : 地下水位標高、 Z : 不透水層上面（帯水層下面）の標高、 R : 地下水涵養量、 S : 有効空隙率である。

基本式①を差分法を用いて数値的に解くために、陽解法より差分化する。まず、 x 軸、 y 軸、および時間 t をそれぞれ Δx , Δy , Δt の間隔で離散化する。また、格子点 $(x, y) = (i\Delta x, j\Delta y)$ (i, j は整数) における Z, K, S, R をそれぞれ $Z_{i,j}$, $K_{i,j}$, $S_{i,j}$, $R_{i,j}$ と表わし、時刻 $t = n\Delta t$ のこの格子点における h を $h_{i,j}^n$ と表わす。こうして、①式を陽解法により差分化すると、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\Delta x)^2} \left\{ K_{i,j} (h_{i+1,j}^n - h_{i,j}^n)(h_{i,j}^n - Z_{i,j}) - K_{i-1,j} (h_{i,j}^n - h_{i-1,j}^n)(h_{i-1,j} - Z_{i-1,j}) \right\} \\ & + \frac{1}{(\Delta y)^2} \left\{ K_{i,j} (h_{i,j+1}^n - h_{i,j}^n)(h_{i,j}^n - Z_{i,j}) - K_{i,j-1} (h_{i,j}^n - h_{i,j-1}^n)(h_{i,j-1} - Z_{i,j-1}) \right\} \\ & + R_{i,j}^n = S_{i,j} \frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n}{\Delta t} \quad \text{..... ②} \end{aligned}$$

となる。

これを $h_{i,j}^{n+1}$ について解くと、

$$h_{i,j}^{n+1} = h_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{S_{i,j}} \left\{ \frac{K_{i,j}(h_{i+1,j}^n - h_{i,j}^n)(h_{i,j}^n - Z_{i,j}) - K_{i-1,j}(h_{i,j}^n - h_{i-1,j}^n)(h_{i-1,j}^n - Z_{i-1,j})}{(\Delta x)^2} \right. \\ \left. + \frac{K_{i,j}(h_{i,j+1}^n - h_{i,j}^n)(h_{i,j}^n - Z_{i,j}) - K_{i,j-1}(h_{i,j}^n - h_{i,j-1}^n)(h_{i,j-1}^n - Z_{i,j-1})}{(\Delta y)^2} + R_{i,j} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

時間ステップ n のときの h の値が計算領域内のすべての格子点で既知となれば、③式を用いて次のステップ ($n+1$) の h を境界を除く全ての点について求めることができる。なお、境界の h については、予め設定した境界条件に合うように定める。したがって、はじめに計算領域の全ての格子点に初期水位を設定しておけば、基本式である偏微分方程式①の近似解を次々と求めることができる。

なお、以上のようにして求める数値解の安定性について、Wang and Anderson⁸⁾は、

$$\frac{T \Delta t}{S \Delta x \Delta y} < 0.25 \dots\dots\dots (4)$$

としている。ここで、 T は透水量係数であり、不圧地下水の場合には全ての格子点で

$$\frac{K(h-Z) \Delta t}{S \Delta x \Delta y} < 0.25 \dots\dots\dots (5)$$

となるように、 Δx 、 Δy 、 Δt を選ぶ必要があることに相当する。

流出量は、ダルシー則を差分化したものを用いて計算する。すなわち、格子点 ($i \Delta x$, $j \Delta y$) を中心とするメッシュを $M_{i,j}$ とかくと、時間ステップ n における $M_{i,j}$ から $M_{i+1,j}$ への流量 Q_{xi}^n は、

$$Q_{xi}^n = -K_{i,j}(h_{i,j}^n - Z_{i,j}) \Delta y \frac{h_{i+1,j}^n - h_{i,j}^n}{\Delta x} \dots\dots\dots (6)$$

となる。同様に、 $M_{i,j}$ から $M_{i,j+1}$ への流量 Q_{yj}^n は、

$$Q_{yj}^n = -K_{i,j}(h_{i,j}^n - Z_{i,j}) \Delta x \frac{h_{i,j+1}^n - h_{i,j}^n}{\Delta y} \dots\dots\dots (7)$$

となる。従って、流域内のある断面からの流出量は、その断面について、 Q_{xi}^n 、 Q_{yj}^n の和をとればよい。

3. 揚水試験を用いたモデルの検証

前章で導入した不圧地下水の平面 2 次元モデルの実流域での適合性を本章および次の第 4 章で検討する。本章ではプログラムチェックも兼ねて、揚水試験の解析を行なった結果について検討する。

(1) 揚水試験

国分寺試験流域の東端部の通信住宅に共同浴場があり、ここでは営業用に不圧地下水を汲み上げている。これを揚水試験とみたと、揚水時および揚水後の周囲の井戸の地下水位変化を観測したデータがある。揚水量は 3.3 l/s であり、揚水時間は 19 分 40 秒であった。観測日は、1984 年 2 月 24 日であり、揚水開始時刻は午後 1 時 53 分である。初期水位は井戸上端を基準として -14.316 m であり、帯水層下端の高さは井戸上端を基準として -15.124 m であり、観測井の揚水井からの距離は 23 m である。

(2) モデル化のための仮定

(a) 平面の離散化

別の観測井のデータなどから、この揚水の影響半径は 100 m 以下であると推定された。さらに、この影響圏内での帯水層の対称性を仮定すれば、解析は図 1 に示すような正方形領域について行なえば十分であると考えられる。解析に当っては、揚水井と観測井との距離などを考慮して、 $\Delta x = \Delta y = 8 \text{ m}$ 間隔のメッシュでこの領域を離散化する。

(b) 境界条件

図 1 で境界 BW と CW は等ポテンシャル線に直交していると考え、不透水境界とする。また、境界 AB、

ACも影響圏外ゆえ、ここを通る流入は無視しうる。したがって、これらも不透水境界とする。

(c) 帯水層下端の高さ (Z)

領域が小さく、また地表面が平坦であることなどから帯水層下面は水平面と近似してよいと考え、観測井上端を基準として、一様に -15.124 m とする。

(d) 初期水位 (h^0)

揚水開始時の地下水面も水平面と近似できると考え、初期水位は観測井上端を基準として一様に -14.316 m とする。

(e) 揚水量

揚水井を含むメッシュでは $R = -3.09 \times 10^{-3}\text{ m/min}$ 、それ以外のメッシュでは $R = 0$ とする。

(f) 透水係数 (K) および有効空隙率 (S)

領域が小さいことから全メッシュで一様に与える。値については試行錯誤的に決める。

(g) 時間ステップ (Δt)

⑤式の解の安定条決に安全率も含めて、 $\Delta t = 0.1\text{ min}$ とする。観測値は1分毎に得られているので精度の点でも問題ないと考えられる。

(3) 解析結果と考察

前項の仮定のもとに、パラメーターである透水係数 (K) と有効空隙率 (S) を試行錯誤的に決め、実測値との適合性の最も高い解析結果を図2に示す。図2をみると、本モデルの計算値は観測値と最大でも2 mm程度しか差がない。地下水位の観測精度を考えると高い再現性を示したといえる。また、揚水中の水位降下のみならず、揚水終了後の回復までを再現できたことは、本モデルの有効性を表わすものとして注目される。一方、図には、Jacob⁹⁾と安藤¹⁰⁾により示された不圧地下水の揚水井のまわりの非平衡式を用いて解析した結果も示してある。合わせて示したパラメーターの値をみると、本モデルと非平衡式とは、同一の透水係数 (K)、および同程度の有効空隙率を与えている。これは、本モデルの妥当性の裏付けとして十分であろう。

4. 国分寺試験流域へのモデルの適用

前章において有効性の示された不圧地下水の平面2次元モデルを本章では国分寺試験流域の地下水流動・流出解析に適用することを試みる。

(1) 国分寺試験流域の概要

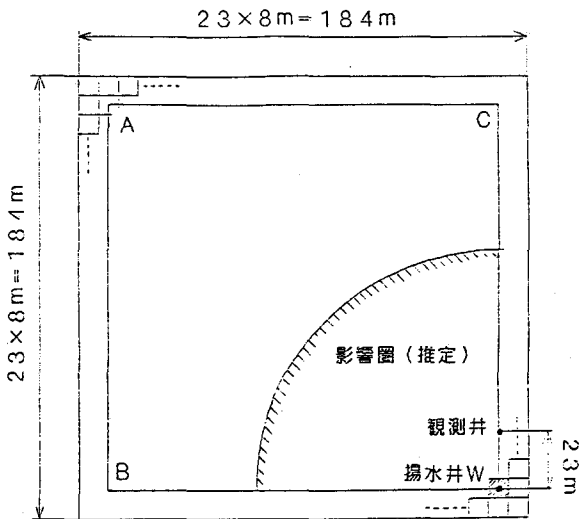


図1 平面の離散化の方法

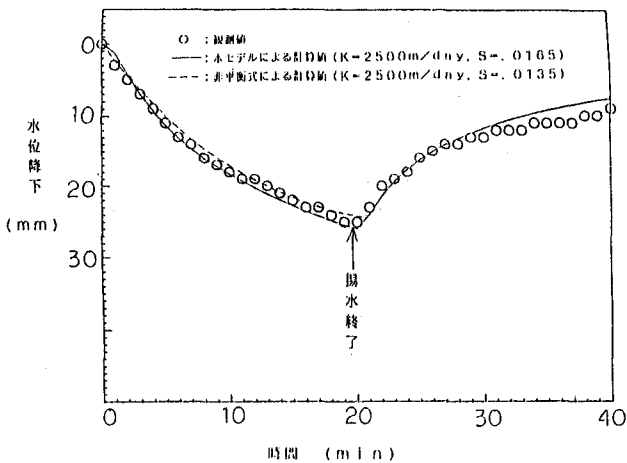


図2 揚水試験の解析結果

国分寺試験流域の流域特性については、安藤・高橋・吉田・石川⁷⁾がすでに詳細に述べているので、ここではその概要を述べる。国分寺試験流域は、野川の上流の国分寺万葉園内の湧水を対象とする流域であり、その流域面積は 41.1 ha である。この湧水は、武蔵野砂礫層中の不圧地下水帯水層からの流出に由来する。地下水面は西高東低であり、地下水は水深 0.5 ~ 1 m で西から東方へ流動して湧水地点で流出している。図 3 には国分寺試験流域の概要を示すが、流域内では雨量、6ヶ所の地下水位、および流出量の自記観測が行なわれている。なお、安藤・大隅・高橋・松尾¹¹⁾は、国分寺試験流域の地下水の涵養源として、降水だけでなくいわゆる「吸い込み井戸」による生活排水の地下処理があり、その寄与率がかなり大きいことを指摘している。

(3) 国分寺試験流域の地下水流動・流出解析

(a) 解析対象期間の設定

解析対象期間としては、無降雨期間が2ヶ月程度続いており、欠測の少ない、1983年12月2日から1984年1月18日までの期間を選んだ。

(b) モデル化のための仮定

① 流域の離散化

図4のように流域をメッシュで区切り、離散化する。メッシュ間隔は井戸の分布を考えて、 $4x = 50\text{ m}$ 、 $4y = 60\text{ m}$ とする。また、井戸の水位は、その井戸を含むメッシュの地下水位を代表すると仮定する。さらに、流出量は、波線で示した断面を通過する流量とする。これは次に述べる境界条件の仮定に基づく。

② 境界条件

図4に示すように流域東縁部を除き、すべて不透水層境界と仮定する。

③ 帯水層下端の高さ(Z)

ボーリング資料および井戸底の高さの測定値から内・外挿して各メッシュのZを与えた。

④ 初期水位(h^0)

解析期間の最初の日(1983年12月2日)における観測井の地下水位から内・外挿して各メッシュの初

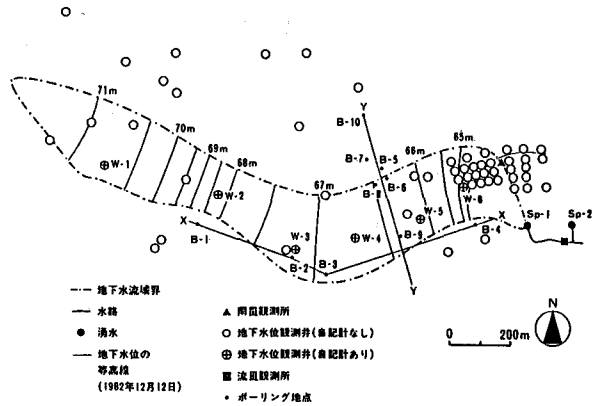


図3 国分寺試験流域の概要

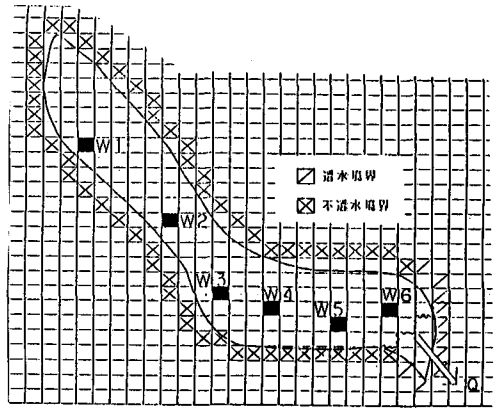


図4 流域の離散化と境界条件

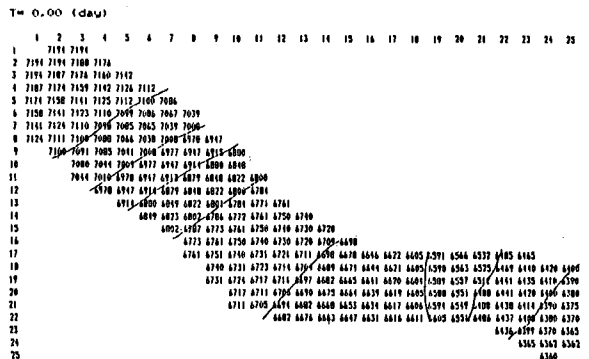


図5 初期水位 (単位はcm)

1983年12月2日

期水位を与える。図5に初期水位を示す。

⑤ 地下水涵養量および揚水量(R)

解析は無降雨期について行なうので、吸い込み井戸からの家庭排水の涵養量及び共同浴場による揚水量だけを考え、降雨や上下水道からの漏水などは無視した。図6には、地下水涵養量・揚水量分布図を示す。

⑥ 透水係数(K)、有効空隙率(S)

解析を通じて試行錯誤的に決める。具体的な値については解析結果の項に示す。

⑦ 時間ステップ(Δt)

⑤式の解の安定条件に安全率も含めて $\Delta t = 0.05 \text{ day}$ とする。本研究は日単位の解析なので精度の点でもこれで問題ないと考えられる。

(c) 解析結果と妥当性の検討

以上の仮定のもとに解析を行なった。パラメーターである透水係数(K)と有効空隙率(S)を試行錯誤的に決め、実測値との適合性の最も高かった解析結果を図7に示す。また、解析において用いた K の値を図8に、 S の値を図9に示す。

まず、再現性について考察する。パラメーターを調整する際に流出量の再現性を優先させたために、W4やW6などの一部の井戸では地下水位の再現性が悪くなっている。これらを除く井戸の地下水位は5 cm程度の誤差におさまっている。流出量の相対誤差は20%未満であり、流出解析モデルとしての本モデルの有効性を示している。

次にパラメーターの値の妥当性を検討する。本モデルは2つのパラメーター(K , S)を含むため、その両方の値を任意に調整できるのであれば、解の自由度はきわめて高くなる。したがって、このモデルが地下水流動・流出モデルとして意味をもつためには、これらのパラメーターが物理的に意味をもつ値であることが必要である。今回の解析では、 K , S の値を与える際の目安として、最下流部では前述した揚水試験の解析から得られた値を、また、その値の領域では安藤・高橋・吉田・石川⁷⁾による解析で用いられた値を参考とした。しかし、実際に解析を行なってみると、これらはかなり大きな変更を要し、結局、最も高い再現性を与えたパラメーター値はさきに示したような値となった。それらの値は、流域全体で大きくばらついており、とくに K の値は4桁にわたって分布している。これは、モデルの欠陥に起因するものと解釈できるが、当試験流域が旧河道であると仮定すれば、現在の河床でもそうであるように、レキ径の分布が平面的に大きなばらつきを示すこともありうる。

以上のように、パラメーター値に多少の疑問点は残るものの、高い適合性をもって流出量と6地点の地下水位を再現できたことは、本モデルの実流域での妥当性を示すものといえる。

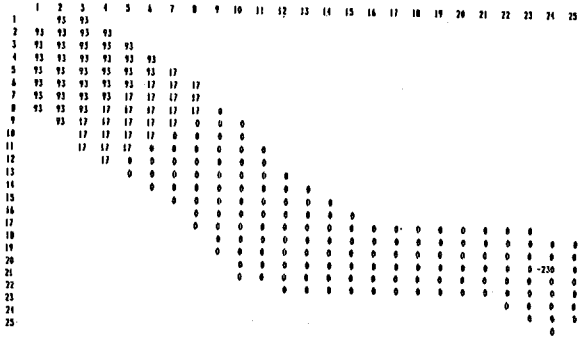


図6 地下水涵養量・揚水量分布図(単位は 10^{-5} m/day)

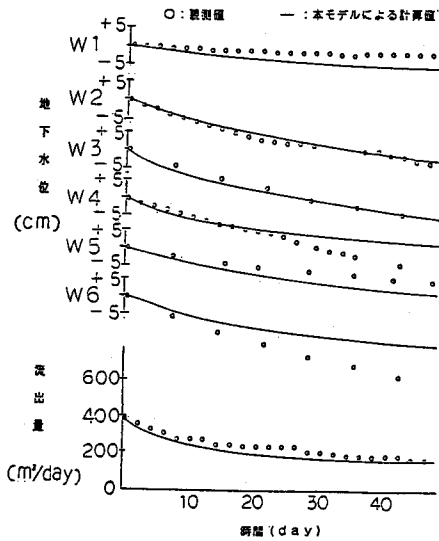


図7 地下水位と流出量の解析結果

5. 結 論

本研究では、ダルシー則と連続式とから導かれた不圧地下水の平面2次元モデルを用いて、実流域の解析を行ない、次のような成果を得た。

(1) 本モデルを揚水試験の解析に適用し、揚水開始から回復にいたるまでの観測井の地下水位を、きわめて高い適合性をもって再現した。

(2) 本モデルを国分寺試験流域に適用し、無降雨期間について地下水位と流出量を高い適合性をもって再現した。したがって、ダルシー則と連続式とから導かれた不圧地下水の平面2次元モデルを用いて国分寺試験流域における地下水流動を含む地下水流出解析を行ない、その適合性を明らかにすることができた。

参考文献

- 高木不折：低水流出の低減特性に関する研究，土木学会論文報告集 第128号，1966.
- 高橋・安藤・伊藤・伊藤：山地河川の低水流出の減水特性に関する研究，土木学会論文報告集 第337号，1983.
- 佐合・石崎：地下水を含めた現地観測と水循環機構について，第24回水理講演会論文集，1980.
- Y. Ando, K. Musiaka and Y. Takahasi: Modelling of hydrologic processes in a small natural hillslope basin, based on the synthesis of partial hydrological relationships, Journal of Hydrology, 64, 1983.
- 水谷・虫明：武蔵野台地における水循環機構に関する研究，第25回水理講演会論文集，1981.
- 安藤・高橋・田口：台地の小試験流域における地下水流動を含む地下水流出解析，第28回水理講演会論文集，1984.
- 安藤・高橋・吉田・石川：台地の試験流域における地下水流動を含む水循環解析，第30回水理講演会論文集，1986.
- H.F. Wang and M.P. Anderson: Introduction to groundwater modeling, W.H. Freeman and Company, 1982.
- C.E. Jacob: Determining the permeability of water table aquifers, U.S. Geological Survey, Survey, Water Supply Paper, 1536-1, 1963.
- 安藤義久：不圧地下水における井戸揚水の非平衡理論に関する研究，日本地下水学会誌，第20巻 第3号，1978.
- 安藤・大隅・高橋・松尾：都市河川の環境維持流量としての地下水流出の形態と涵養源に関する研究，第11回環境問題シンポジウム講演論文集，1983.

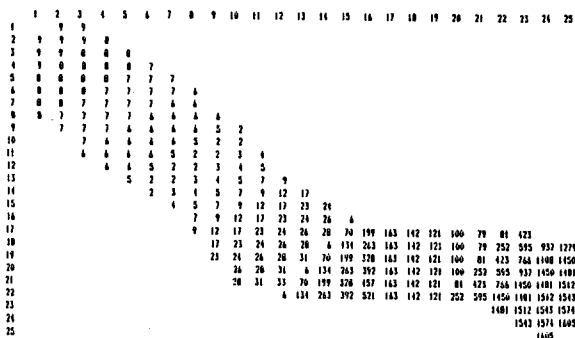


図8 透水係数 K の分布 (単位は m/day)

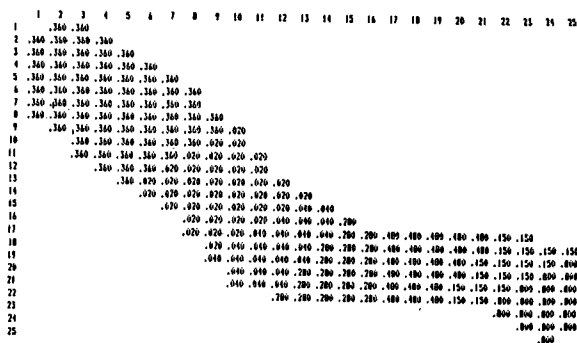


図9 有効空隙率 S の分布