

都市域の雨水流出解析への線形応答モデルの適用について
Application of Linear Response Model to the Analysis
of Urban Rainfall Runoff

東京都土木技術研究所 正員 ○ 守 田 優
東京都土木技術研究所 正員 和 泉 清

1. はじめに

都市域の雨水流出の解析手法として、従来、特性曲線法、修正RRL法など多くの流出解析モデルが適用されてきたが、最近、都市流域内で貯留浸透施設の設置が進められており、このような施設の配置とその流出抑制機能を直接組み込めるモデルが必要となってきた。また、近年、都市域で下水管の容量を越える雨水が、豪雨時にマンホールから噴出する現象が発生しており、これまでのように河川のある地点での流量だけではなく、流域内部での雨水の面的な挙動を把握することが要求されている。これらのことから、都市域の雨水流出を解析するには、下水管内の雨水の貯留・流出の機構を、下水管の管径、粗度、勾配などの水理学的なパラメーターと関係づけること、さらに、それを下水管網の構成によって表現することが望まれる。

本論文では、以上の認識を踏まえ、都市域の流出現象を面的に解析する第一歩として、下水管網を対象とする新たな流出解析モデルを検討した。この方向では、すでに市川らによってメッシュ法が提示されているが、筆者らは、線形応答モデルの下水管網への適用を試みた。線形応答モデルとして包括される流出解析モデルには、単位図法を基本に、瞬間単位図や貯水池モデルなどがあり、最近では鮎川らによる線形貯水池モデルの研究もある。ここでは、1個の線形貯水池を下水管の単位要素と対応させ、さらに、その単位要素を連結させて下水管網を構成する方法をとった。本論文で提案するこのモデルも、一応、線形応答モデルという一般的な名称で呼ぶことにする。

2. 線形応答モデルの基礎理論

最初に、本モデルの解析の対象範囲を明確にする。図-1は、都市域の雨水流出のフローを表わしたものである。ここで、下水道の取付管へ雨水が流出する流域の単位要素を素流域とすると、この素流域から下水管への流出量が有効降雨となる。図-1の下水管の単位要素は、図-2に示したとおり、両端を取付管によって区切られている。下水管に流入した雨水は、単位要素から枝線、さらに幹線のレグルの下水管網を流れ、最後に河道へ流出する。本モデルでは、この図-1の点線で囲んだ範囲を解析の対象とする。

ここで、下水管の単位要素（図-2）について、連続の式と運動方程式を考える。まず、連続の式は、流量 q 、流積 A として、次式のとおりである。

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

上式を、下水管の単位要素 i （ $x = 0 \sim \ell_i$ ）において積分する。管の断面積を A_{oi} 、空間平均流積を $\bar{A}_i$ とし、変数 $\bar{\varphi}_i$ （ $= \bar{A}_i / A_{oi}$ ）を用いると式（2）を得る。

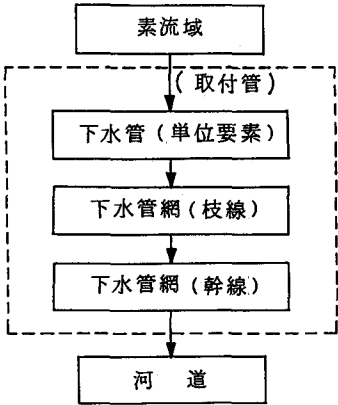


図-1 都市域の雨水流出のフロー

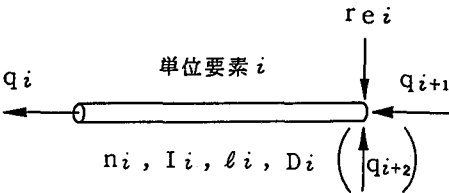


図-2 下水管の単位要素

$$A_{oi} \cdot \ell_i \cdot \frac{d\bar{\varphi}_i}{dt} + q_i - (q_{i+1} + re_i) = 0 \quad (2)$$

ここに、 ℓ_i 、 q_i 、 re_i は、それぞれ単位要素 i の管路長、流量、有効降雨である。式(2)では、簡略化し、上流側からの流入量を q_{i+1} のみとしている。単位要素の式については、以下同様とする。

次に、運動方程式としてマンニングの式を用いる。流速を v_i 、径深、水路勾配、粗度係数を、それぞれ R_i 、 I_i 、 n_i とすると、下水管の単位要素 i の流量 q_i について式(3)の関係が得られる。

$$q_i = \bar{A}_i \cdot v_i = \bar{A}_i \cdot \frac{1}{n_i} \cdot R_i^{2/3} \cdot I_i^{1/2} = A_{oi} \cdot \frac{1}{n_i} \cdot R_i^{2/3} \cdot I_i^{1/2} \cdot \varphi_i = \frac{1}{K_i} \cdot \varphi_i \quad (3)$$

上式の K_i は、線形貯水池モデルの貯留係数に相当する。ここで、線形応答モデルの基本的なパラメーターである時定数 T_i を定義する。

$$T_i = \frac{\ell_i}{v_i} = \frac{\ell_i \cdot n_i}{R_i^{2/3} \cdot I_i^{1/2}} = A_{oi} \cdot \ell_i \cdot K_i \quad (4)$$

この時定数 T_i は、下水管の単位要素 i を雨水が流下するのに要する時間であり、式(4)から明らかなように、径深 R_i つまり水深の増減によってその値が変わる。しかし、ここで、満管時(あるいは半分満した時)の流速 v_{io} をもって v_i とすると、時定数 T_i は、単位要素 i の水理学的なパラメーター、 n_i 、 I_i 、 ℓ_i 、 D_i (管径)によって決まる定数となる。

さて、連続の式とマンニングの式から、式(2)、式(3)、式(4)を導いてきたが、これらの式から式(5)を得る。

$$T_i \frac{dq_i}{dt} + q_i - (q_{i+1} + re_i) = 0 \quad (5)$$

上式をLaplace変換して、整理すると式(6)が得られる。

$$Q_i(s) = \frac{1}{T_i \cdot s + 1} (Q_{i+1}(s) + Re_i(s)) \quad (6)$$

式(6)で伝達関数 $G_i(s)$ を次のようにおく。

$$G_i(s) = \frac{1}{T_i \cdot s + 1} \quad (7)$$

上の式(6)は、線形応答モデルにおける下水管単位要素の基本式である。これは、単位要素への上流側からの流入量

($Q_{i+1}(s) + Re_i(s)$)を、伝達関数 $G_i(s)$ によって、下流側への流出量 $Q_i(s)$ に変換する式である。

ここで、下水管単位要素の基本式(6)を図-3に模式的に示した下水管網に適用する。ここでは、図-2の単位要素が直列、並列に接続されており、式(6)を乗算、加算によって連結すると、流域内の任意の単位要素の流量 $Q_i(s)$ を、それより上流のすべての単位要素 j ($= i \sim m_i$)の有効降雨 $Re_j(s)$ で表わせる。

$$Q_i(s) = \sum_{j=i}^{m_i} U_{i,j}(s) \cdot Re_j(s) \quad (8)$$

上式の伝達関数 $U_{i,j}(s)$ は、単位要素 i から j までの伝達関数 $G_\nu(s)$ ($\nu = i \sim j$)の積である。

$$U_{i,j}(s) = \prod_{\nu=i}^j G_\nu(s) = \frac{1}{(T_i \cdot s + 1) \cdot (T_{i+1} \cdot s + 1) \cdots (T_j \cdot s + 1)} \quad (9)$$

この式(9)の $U_{i,j}(s)$ をLaplace逆変換した関数を $u_{i,j}(t)$ とすると、これは式(10)となる。

$$u_{i,j}(t) = \sum_{k=1}^{m_{i,j}} \sum_{p=1}^{\sigma_k} \frac{a_{k,p}}{(p-1)!} \cdot t^{p-1} e^{-\lambda_k t} \quad (10)$$

$$a_{k,p} = \lim_{s \rightarrow -\lambda_k} \frac{1}{(\sigma_k - p)!} \cdot \frac{d(\sigma_k - p)}{ds(\sigma_k - p)} \{ (s + \lambda_k)^{\sigma_k} \cdot U_{i,j}(s) \} \quad (11)$$

$1/T_\nu$ ($\nu = i \sim j$)を、重複を考慮して λ_k ($k = 1 \sim m_{i,j}$)におきかえ、 λ_k の重複度を σ_k とする。
 $j - i + 1 = \sum_{k=1}^{m_{i,j}} \sigma_k$

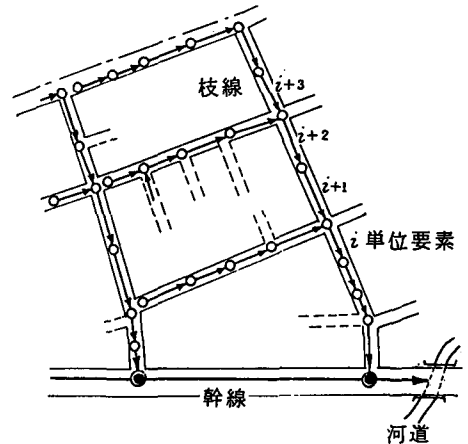


図-3 下水管網の模式図

以上、式(8)および式(10)によって、合成定理から、下水管単位要素 i の流量は、式(12)のように有効降雨の多重入力によるたたみ込み積分の形で表わされる。

$$q_i(t) = \sum_{j=i}^{mi} \int_0^t u_{i,j}(t-\tau) \cdot re_j(\tau) \cdot d\tau \quad (12)$$

この式(12)が、線形応答モデルを下水管網の雨水流出解析に適用したときの基本式である。

3. 線形応答モデルの定式化

線形応答モデルの基本式は式(12)に示したとおりであるが、実際に流出計算を行うにあたっては、モデルの変数を時間的に離散化し、モデルを、単位時間の有効降雨量から対象地点の流出量を計算できる形に定式化しなければならない。

ところで、筆者らは、すでに、被圧地下水位変動を解析するための線形応答モデルを提案している。このモデルは、解析対象が異なるものの、本論文のモデルと同じ考え方に立っている。そこで、本モデルの定式化を進めるにあたり、すでに提案した線形応答モデルと同様の手続きをとることにする。

まず、時間 $t (= t_0 + t')$ の下水管の単位要素 i の流量 q_i を、時間 t_0 から t' 後の流量変化量 q'_i を用いて次式のように表わす。

$$q_i(t) = q_i(t_0) + q'_i(t) \quad (13)$$

この式を、式(15)に代入して整理すると、式(14)を得る。

$$T_i \frac{dq'_i}{dt'} + q'_i - q'_{i+1} = re'_i \quad (14)$$

$$re'_i(t) = re_i(t) - q_i(t_0) + q_{i+1}(t_0) \quad (15)$$

ここで、式(14)を、下水管網の全単位要素($i = 1 \sim M$)について書き表わすと、各単位要素の流量変化量 q'_i を未知量とする連立一次常微分方程式が得られる。そこで、初期条件を、 $t' = 0$ のとき、 $q'_i = 0$ と与え、 $re'_i = \text{const.}$ として式(14)を解くと、式(16)の形で解が得られる。

$$q'_i = \sum_{j=i}^{mi} \alpha_{i,j}(t') \cdot re_j \quad (16)$$

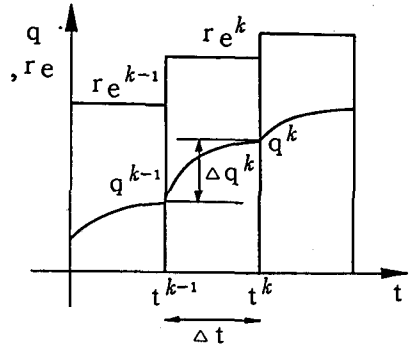


図-4 離散化した変数

さて、離散化の単位時間を Δt とし、離散化した変数をあらためて図-4のように定義する。そして、式(13)、式(15)、式(16)において、変数を、 $t_0 \rightarrow t^k$ 、 $t' \rightarrow \Delta t$ 、 $q'_i \rightarrow \Delta q_i^k$ 、 $re'_j \rightarrow \Delta re_j^k$ とおきかえる。こうして、下水管単位要素 i の k 期の流量変化量 Δq_i^k は、上流の単位要素 j の k 期の有効降雨増加分の線形結合として、以下のように表わすことができる。

$$\Delta q_i^k = \sum_{j=i}^{mi} \alpha_{i,j}(\Delta t) \cdot \Delta re_j^k \quad (17)$$

$$\Delta re_j^k = re_j^k - q_j^{k-1} + q_{j+1}^{k-1} \quad (18)$$

さらに、流量変化量 Δq_i^k から、流量 q_i^k が次のように算出される。

$$q_i^k = q_i^{k-1} + \Delta q_i^k \quad (19)$$

以上、式(17)、式(18)、式(19)によって、雨水流出解析のための線形応答モデルを定式化できた。

式(17)の $\alpha_{i,j}(\Delta t)$ は、 α マトリックスと呼ぶが、これは、 j 単位要素への有効降雨増加分を、 i 単位要素の流量変化量に変換するマトリックスである。また、有効降雨増加分 Δre_j^k は、 $k-1$ 期の流量を基準にした k 期の実質的な有効降雨の増加量である。本モデルを定式化する過程で導入した α マトリックスは、流域内に貯留浸透施設を設置したとき、それにとりあう当該単位要素の有効降雨の変化が、下流の下水管の流量にどのような影響を及ぼすかを評価するさいに、その指標として用いることができる。

4. 線形応答モデルによる流出計算例

以上のように定式化した線形応答モデルによって実流域の雨水流出解析を行った。流出計算の対象流域は東京都の多摩ニュータウンに位置する永山試験流域である。

(1) 流域の概要と水文観測資料

永山試験流域は、都市化と流出の関係を調査する目的で設置された多摩ニュータウン流出試験地の一つであり、昭和45年以降、住宅・都市整備公団と東京大学生産技術研究所によって水文観測が続けられている。本流域は、中層集合住宅10棟と舗装面、芝生地などからなる都市化流域であり、下水道も100%整備されている。ここで、永山試験流域の諸元と概要を、表-1、図-5に示した。この図-5には、本流域の下水管網とそれをもとにした38区分のブロックを図示してある。

永山試験流域では、図-5のA地点で雨量と水位の自記観測が行われている。この雨量・水位データは、2.5分間隔で読み取られており、本解析でも、同じ単位時間で、雨量データを入力し、流出量を計算した。

(2) 対象洪水

対象洪水を選定するにあたって考慮すべき点は、規模が大きすぎる洪水の場合、雨水管の容量を越えること、および、雨水管へ流入せずに直接、路面上を流下する雨水の量が無視できないほど増加することである。これから、本解析では、昭和56年7月30日と昭和58年8月14日の中〜大規模の2洪水を対象とした。

(3) 有効降雨

本モデルでは、下水管の取付管への流入量を有効降雨とする。上述のように、本試験流域は、住宅地と舗装面の不透透域、そして芝生地等の浸透域からなるが、対象洪水の規模から、当初、不透透域への降雨の流出分を有効降雨とし、浸透域からの寄与を無視して流出計算を行い、解析の過程で若干の修正を加えた。

本解析では、下水管の単位要素をもとに、流域をさらに93のブロックに分割したが、各ブロックごとに不透透域率を求め、それを流出率として有効降雨を算出した。

(4) 下水管網

下水管の径、勾配、管路長、粗度は、本モデルの基本となる入力データである。そこで、本流域の下水管単位要素93本について、管径、勾配、管路長を調べた。その値については表-1に示した。また、粗度係数は、通常考えられる値として、 $n = 0.014$ を仮定した。

(5) 流出計算結果

以上のようにモデルのパラメーターを設定し、対象とする2洪水について、図-5のA地点の流量を計算した。その結果を、実測値とともに図-6、図-7に示した。これらの図には、同時に計算した図-5のB地点、C地点の流量も、A地点と比較するため図示している。

この流出解析では、モデルのパラメーターのうち、下水管の粗度係数とブロックの流出率の値に修正を加えた。これらのパラメーターの同定値は、図-6、図-7に併記した。ただし、流出率は不透透域率との比で示した。

表-1 永山試験流域の概要

諸元	概要
流域面積	2.8 ha
地形勾配	1/47
土地利用	集合住宅
不透透域率	48%
下水道整備	分流式100%
下水管管径	200~600 mm
下水管勾配	1~70‰
最長管路長	384 m

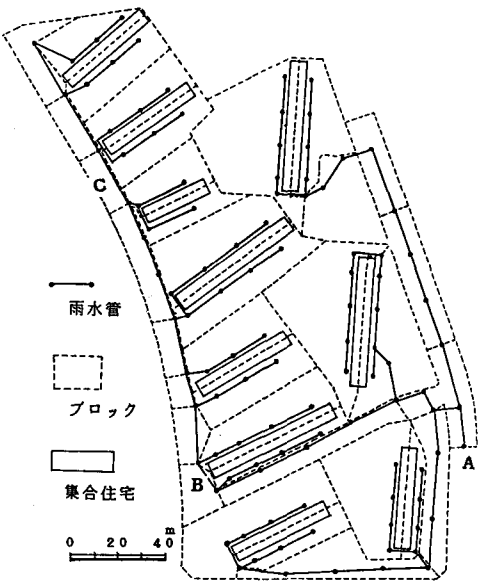


図-5 対象流域の下水管網

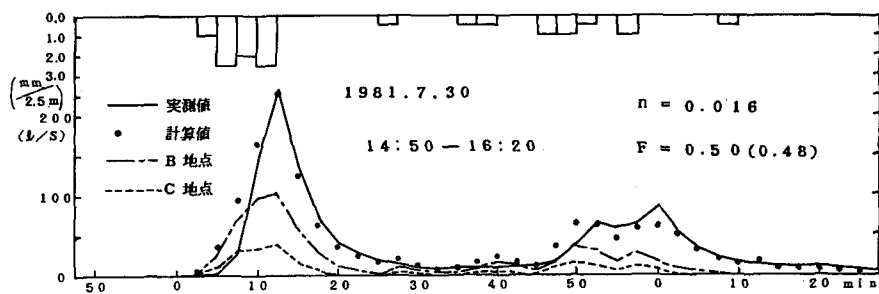


図-6 流出計算結果(1)

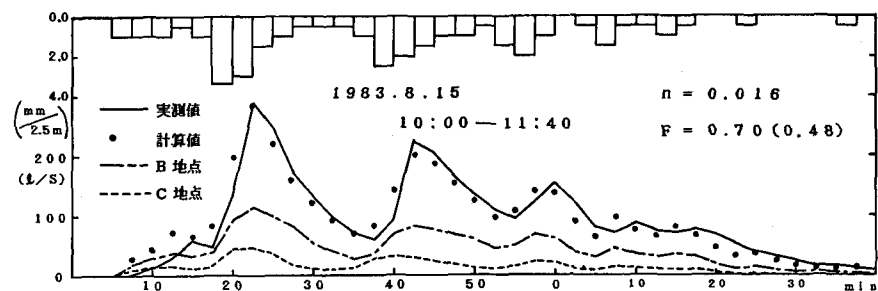


図-7 流出計算結果(2)

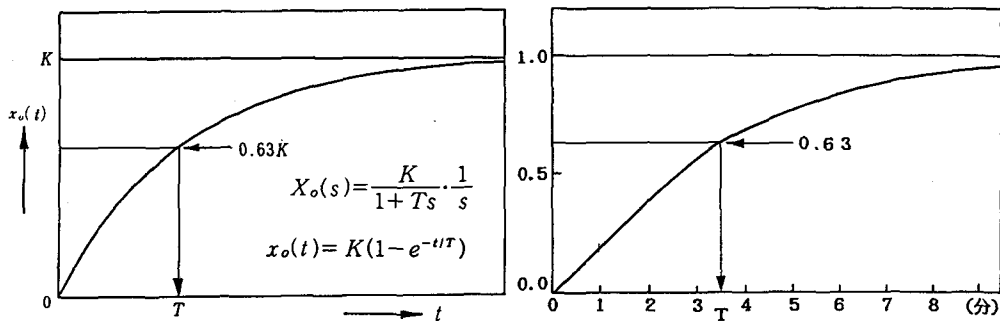


図-8 インディシャル応答と時定数

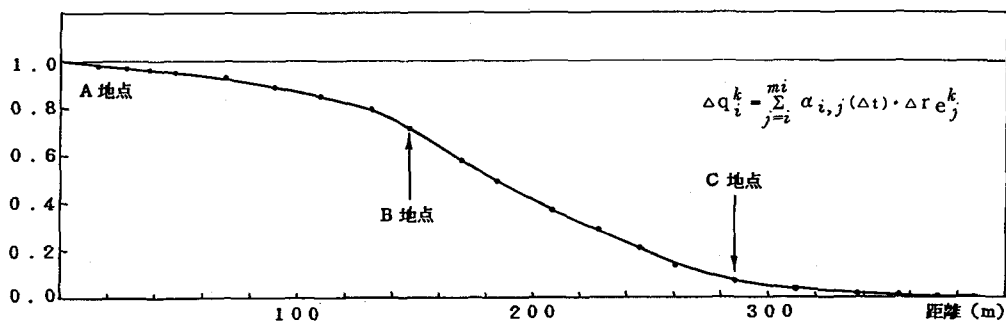


図-9 下水管網の α マトリックス

5. 考 察

都市域の雨水流出解析のための線形応答モデルを定式化し、さらに実流域への適用計算を行ったが、以下のことについて考察する。

(1) 洪水到達時間について

時定数 T_i が、線形応答モデルの基本的なパラメーターであることはすでに述べた。この時定数 T_i は、下水管の単位要素 i を雨水が流下するのに要する時間であり、いわば単位要素 i の洪水到達時間と言える。ところで、この T_i は、図-8の左に示したように、式(7)で定義した単位要素 i の伝達関数 $G_i(s)$ のインディシヤル応答、すなわち高さ1のステップ入力に対する応答が最終値の0.63の値に達する時間に相当する。

ここで、単位要素が直列、並列に組み合わせられた下水管網の洪水到達時間を考える。そこで、上の単位要素の場合と同様、下水管網の伝達関数のインディシヤル応答を調べた。そして、その最終値の0.63の値に達する時間をもって、下水管網の洪水到達時間 t_c とした。こうして、4.の雨水流出解析で用いた下水管単位要素の時定数 T_i から、式(9)により永山試験流域のA地点における下水管網の伝達関数 $U_{i,j}(s)$ を構成し、そのインディシヤル応答を計算した結果が図-8の右である。この図の曲線で、最終値の0.63に対応する時間を、本流域の洪水到達時間 t_c とすると、図から $t_c = 3.5$ 分という値が求まった。これは、下水管網の最長流路に沿って単位要素の時定数 T_i を合計した時間 $\Sigma T_i = 7.0$ 分よりも小さな値となった。

洪水到達時間については、これまでさまざまな議論がなされてきたが、本論文では、流域全体を一つの線形応答システムとみなし、その伝達関数の過渡特性から洪水到達時間を考えた。

(2) 雨水流出の平均化過程について

線形応答モデルを定式化して得た式(17)は、流域の単位要素(素流域)の有効降雨増加分が重ね合わされて、言い換えれば加重平均されて、対象地点の流出量に変換されることを示している。流出の平均化という見地から、この式について二つの点を指摘できる。一つは、平均化されるのが、有効降雨の変化量(時間変化)ではなく、式(18)で定義した有効降雨増加分、すなわち、下水管単位要素の流量に対する有効降雨の増加分であるということ。いま一つは、平均化過程における加重平均の重みづけの係数が、式(16)で求められるマトリックス $\alpha_{i,j}$ になるということである。この $\alpha_{i,j}$ には、下水管単位要素の管径、勾配、粗度係数などの水理特性値が含まれている。これを、永山試験流域の流出解析結果から求め、図示したのが図-9である。当然のことながら、A地点から遠くなるほど、同じ流路に沿って、 $\alpha_{i,j}$ の値が小さくなる。

6. 結 語

一般に線形応答モデルと呼ばれる流出解析モデルの範囲は広いが、本論文では、下水管の単位要素から構成した下水管網に、降雨一流出の線形応答関係を適用し、都市域の雨水流出解析のための線形応答モデルを定式化した。実流域への適用においては、有効降雨の算定に関して、今後、浸透を考慮した詳細な解析が必要となろう。また、時定数の分布と α マトリックスの関係についても、さらに検討を加えるつもりである。

最後に、本研究を進めるにあたり、貴重な水文資料を提供していただいた住宅・都市整備公団および東京大学生産技術研究所の方々に、心から感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) 市川 新・榊原 隆(1983):メッシュ法による都市域の雨水流出機構の解析,第27回水理講演会論文集, pp.55-60.
- 2) 鮎川 登・北川善広(1983):線形貯水池モデルに基づく流出解析法,第27回水理講演会論文集, pp.29-35.
- 3) 守田 優・高橋 裕(1985):線形応答モデルによる揚水量と被圧地下水位変動の解析,土木学会論文集,第363号/Ⅱ-4, pp.175-183.