

成層流体中の内部孤立渦の中の密度と渦度の混合 Mixing of the Mass and the Vorticity in the Internal Solitary Vortex in a Stratified Fluid

山口大学工学部 正 員 蒲 地 政 文
山口大学工学部 正 員 斎 藤 隆
九州大学応力研 正 員 本 地 弘 之

1. まえがき

一様な密度の流体中で、2次元定常流中の閉じた流線内では、高レイノルズ数の場合、渦度が一様となることが導かれている。これは、プラントル・パチェラーの定理^{1), 2)}と呼ばれている。この定理のいくつかの拡張が、熱伝導率を含んだ場合に対して³⁾、3次元のらせん流に対して⁴⁾、そして海洋の回転流体中の乱流に対して^{5), 6)}なされてきている。この定理に関しては、主に解析的な面の研究がなされてきた。そのため、この定理を室内実験に適用することが望まれてきている。本研究では、上記の定理を、成層流体中あるいは混合物を含む流体中の定常で2次元の閉じた流線内に拡張し、その結果を内部孤立渦の室内実験に適用する。

従来、内部孤立波は、海洋中での普遍的な現象として、また気象学での晴天乱流と関連して研究されるとともに、海底掘削時の波力算定といった実際的な問題にも関連して、解析的及び実験的に数多く研究されてきた(たとえば、文献7)。それらの中で、Davis & Acrivos⁸⁾は数値実験と室内実験を行ない、その結果をもとにして、内部孤立波はその振幅が大きいときには内部孤立渦として伝播するらしい、ということ述べている。しかしながら、彼ら自身も述べているように、彼らの数値計算は流線が閉じている場合(すなわち渦の場合)には妥当性を欠くものである。また、彼らは、二層界面の一点に衝撃を与え、その衝撃が内部孤立波または内部孤立渦として伝播することを、染料を用いて可視化したストリーク・ラインの観察から示している。しかしながら、その室内実験では、非定常な運動をストリーク・ラインで観察しているため、一般にはその観察結果は流線としての解釈にあてはめることはできない。それは、非定常運動においては、ストリーク・ラインと流線は全く異なることがあるので、ストリーク・ラインで渦が観察されたからといって同一の流体粒子から常に成り立っている(定常な閉じた流線からなる)渦が存在するとは限らないからである^{9)~11)}。そのため、Kamachi & Honji¹²⁾は、内部孤立波または内部孤立渦の移動速度と同じ速度で動く座標系から定常な流線を観察して、波と渦の区別をすべきこと、及びそのパラメーターへの依存性を示している。今回、その実験と同様な可視化実験を行ない、その定常な流線模様を上記のプラントル・パチェラーの定理を適用して、内部孤立渦の中の混合機構を検討した。

第2節では、一様な密度をもった流体中のプラントル・パチェラーの定理を紹介し、次の第3節で、密度成層した、あるいは混合物を含んだ流体中の渦にその定理を拡張する。第4節で、内部孤立渦の実験方法とその結果について議論する。最後に、第5節で、本研究で得られた渦の中の混合機構に関する知見をまとめて結びとする。

2. 密度一様な流体中のプラントル・パチェラーの定理

密度一様な流体中の2次元定常な閉じた流線の領域を考える。代表流速 U と代表長さ D で無次元化された定常な渦度方程式は、次式のようになる。

$$J(\omega, \psi) = \frac{1}{Re} \Delta \omega, \quad (2.1)$$

ここで、 ω は渦度、 ψ は流れ関数、 Re はレイノルズ数、 Δ はラプラシアン、そして J はヤコビアン

$$J(a, b) = \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial x} \quad (2.2)$$

である。高レイノルズ数の流れに対しては、粘性力が小さいと仮定して（かつ領域を境界層と非粘性の領域に分割して）、渦度をレイノルズ数の逆数で、以下のように摂動展開する。

$$\omega = \omega_0(x) + Re^{-1} \omega_1(x, t) + O(Re^{-2}), \quad (2.3)$$

ここで x は位置ベクトルである。次に、直交曲線座標系 (ψ, ξ) を導入する。渦の中では、渦度のわき出し、吸い込み共にないので、渦度は ξ に独立である。そのため、渦度は ψ だけの関数と考えられる。

次に、式 (2.1) を渦の中の領域 S で積分し、連続の式と発散定理を用いると、次式が得られる。

$$\frac{1}{Re} \iint_S \Delta \omega dS = \frac{1}{Re} \oint_{\xi} \nabla \omega \cdot n d\xi = 0, \quad (2.4)$$

ここで n は ξ に垂直で外向きの単位ベクトルである。上式に式 (2.3) を代入すると次式が得られる。

$$\frac{d\omega_0}{d\psi} \Gamma = O(Re^{-1}), \quad (2.5)$$

ここで、

$$\Gamma = \oint_{\xi} \nabla \psi \cdot n d\xi = \oint_{\xi} u \cdot d\xi \quad (2.6)$$

は循環である。もし、渦の領域で循環が零でなければ、式 (2.5) から

$$\frac{d\omega_0}{d\psi} = 0, \quad (2.7)$$

が得られ、渦度は渦の中で一様な値をもつことがわかる。このとき誤差は $O(Re^{-1})$ である。このプラントル・パチェラーの定理は、2次元定常で高レイノルズ数の流れをもつ渦の中での近似的なトルクバランスを表現しているものである。

3. 成層流体中のプラントル・パチェラーの定理

前節のプラントル・パチェラーの定理を成層流体中の渦に対して拡張する。無次元化された密度の拡散方程式

$$\frac{D\rho}{Dt} = \kappa_1 \Delta \rho \quad (3.1)$$

を用いる。ここで、 ρ は密度、 κ_1 は拡散係数で、密度が温度によって規定される場合は熱伝導率に対応する。上式と温度場との対応については文献13、上式を使用するときの運動量についての留意事項に関しては文献14、15に詳しい。定常で拡散が弱い場合には、第2節の議論と同様にして、

$$\kappa_1 \frac{d\rho}{d\psi} \oint_{\xi} u \cdot d\xi = O(\kappa_1^2), \quad (3.2)$$

が導けて、2次元定常な渦の中では密度は一定となることがわかる。更に、渦度方程式も、一様密度中の式 (2.1) になり、渦度も一様になる。

また、静止流体中を移動する渦（たとえば文献12）に対しては、渦の領域と同じ速度で移動する座標系 $(X, Y) = (x + cy, y)$ を用いて、次のような変換を行なうと、本節と前節の結果は変わらない。

$$J, \Delta \text{ and } \psi \text{ replacing } J_{XY}, \Delta_{XY} \text{ and } \Psi, \quad (3.3)$$

ここで $J_{XY}(a, b) = (\partial a / \partial X)(\partial b / \partial Y) - (\partial a / \partial Y)(\partial b / \partial X)$, $\Delta_{XY} = \partial^2 / \partial X^2 + \partial^2 / \partial Y^2$ であり、 $\Psi = \psi + cy$ は移動座標系でみたときの定常な流れ関数である。

次に、式(3.1)に静水圧近似を仮定し、基本場 $\rho_0(y)$ からの変動を σ とすると、無次元化した基礎式は次式のようになる。

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + J(\sigma, \psi) + F^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} = \kappa_1 \Delta \sigma, \quad (3.4)$$

ここで、 F はフルード数 NL/U 、 N はブルント・ヴァイサラ振動数である。移動座標系では、式(3.4)は次式のように変形できる。

$$J_{XY}(\sigma - F^2 Y, \Psi) = \kappa_1 \Delta_{XY}(\sigma - F^2 Y). \quad (3.5)$$

この場合、渦度方程式も次式のように変形できる。

$$J_{XY}(\omega, \Psi) + \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{1}{R_e} \Delta_{XY} \omega. \quad (3.6)$$

前節と同様にして、式(3.5)は

$$\frac{d(\sigma - F^2 Y)}{d\Psi} \Gamma = O(\kappa_1), \quad (3.7)$$

と変形され $\sigma - F^2 Y$ が一定であることが導かれる。誤差は $O(\kappa_1)$ である。これから次式が得られる。

$$\frac{\partial \sigma}{\partial Y} = F^2. \quad (3.8)$$

これは、密度の変動成分の鉛直勾配が基本場の勾配と大きさが等しく逆符号をもつことを示しており、渦の中の密度は一樣となっていることを示している。この結果は、静水圧分布を仮定していない式(3.1)から導かれた結果とも一致する。

本節の議論は、一般の混合物 C に対しても同様に展開できる。その場合、拡散方程式

$$\frac{DC}{Dt} = K \Delta C \quad (3.9)$$

を用いて、無次元化した係数 K が小さいことおよび2次元の高レイノルズ数の閉じた流線をもった流れであることが必要である。その結果、渦の中では C が一樣になること、そしてそれは渦の外と独立に混合されていることがわかる。

最後に本節の議論は、乱流中の渦に対しても展開できる(詳細は文献5, 6, 16を参照の事)。

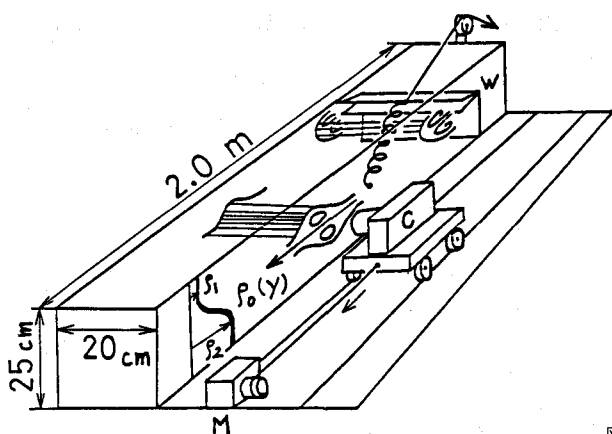


図1 実験装置。C：35 mm カメラ，M：モーター，W：造波機。

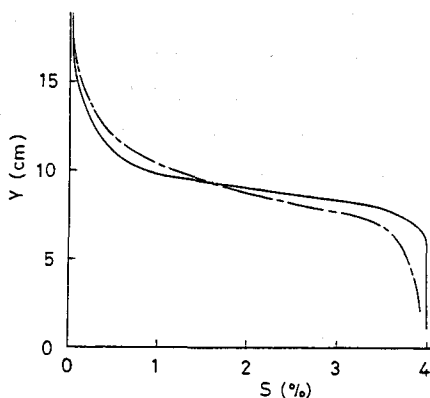


図2 密度分布。横軸は塩分濃度 S であり、実線は実験前、破線は実験後のデータである。

4. 内部孤立渦の実験方法および結果

実験は、長さ 2.0 m、深さ 25 cm、幅 20 cm のアクリル製水槽を用いて行なわれた。実験装置の概略を図 1 に示す。成層流体は、最初密度 ρ_1 の純水を注入し、その後密度 ρ_2 の塩水を水槽底面から徐々に注入して作られた。密度分布は電気伝導度計を用いて塩分濃度を測定し、それを変換して得られた。その一例を図 2 に示す。下層の密度は、1.01 から 1.10 g cm⁻³、中間層の厚さは 0.35 から 1.0 cm の範囲で、実験を行なった。

水槽の一端には、ヒンジ結合された 2 枚の板とゴム製のバネを用いた造波機が、中間層の高さに設置されている。2 枚の板を開き、急に閉じることにより、中間層を伝わる内部孤立渦が形成される。

可視化は、アルミ粉末、吸水して水よりわずかに重い銕くずをトレーサーとして用いて行なった。水槽の外に、水槽に平行にモーターとレールを用いて 35 mm カメラが移動できるように台車が設置されており、内部孤立渦の移動速度と同じ速度で移動しながら、定常な流線模様を撮影した。この実験方法は、文献 12 で用いられた方法と同一であり、詳細はそちらを参照されたい。

写真に撮影された内部孤立渦の定常な流線模様は、文献 12 の中の図と同じである。その写真を用いて、プラントル・パチェラーの定理を検討する。渦度は、速度の空間微分を含んでいるため、可視化写真から直接算定するのは、困難である。そのため、写真中のトレーサーの軌跡の長さ l 、露出時間 T (今回は 1 秒) から循環を算出し、渦の領域の面積 A を用いて、以下のように近似的に渦度を求めた。概略を図 3 に示す。

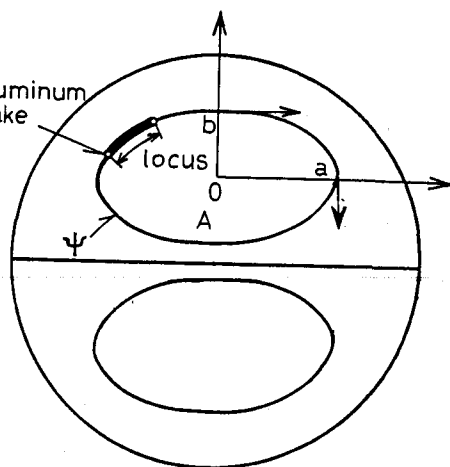


図 3 渦の領域の概略図

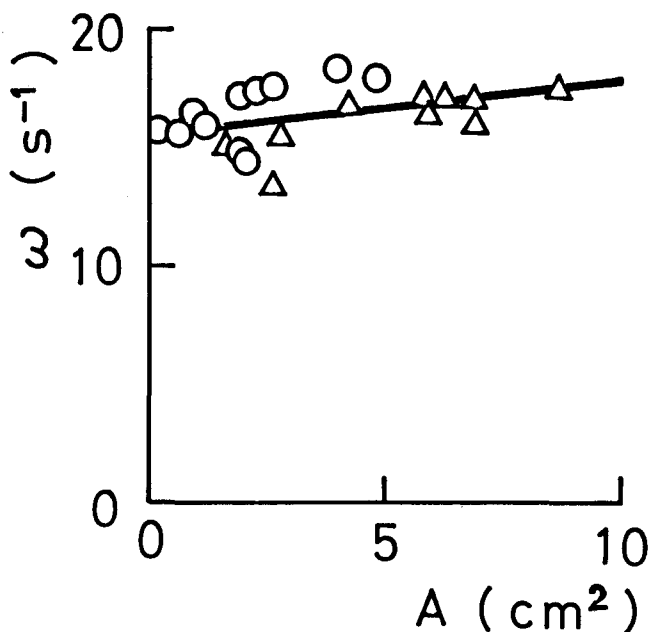


図 4 渦の中の渦度の分布

$$|\omega| \doteq \frac{|\Gamma|}{A}, \quad (4.1)$$

渦の全ての辺長にわたってトレーサーはないので、循環は以下のように近似した。

$$\Gamma \doteq \frac{1}{T} [l^2 + (L-l)^2], \quad (4.2)$$

ここで、 L は渦の周長であり、更に渦の形を、長軸の長さが a 、短軸の長さが b である楕円で近似すると、

$$L = 4aE(e^2), \quad (4.3)$$

$$e^2 = (a^2 - b^2) / a^2, \quad (4.4)$$

$$E(e^2) = \int_0^{\pi/2} (1 - e^2 \sin^2 \theta)^{1/4} d\theta \quad (4.5)$$

と計算できる。ここでEは第2種の完全楕円積分¹⁷⁾である。

上述の式で算定された渦度を、種々の閉じた流線で囲まれた領域の面積に対して描いたものが、図4である。内部孤立渦は渦対となって形成されるため、2つの渦の領域に対してプロットしており、記号の違いで表わしてある。図中、直線は最小自乗法で求められたものである。図から、渦の全ての領域で渦度がほとんど一様であることがわかる。

最後に、渦が通過するときの密度変化の測定例を図5に示す。図から、渦の領域では、密度はほとんど一様になっていることがわかる。また、渦の背後には、内部波が形成されていることもわかる。

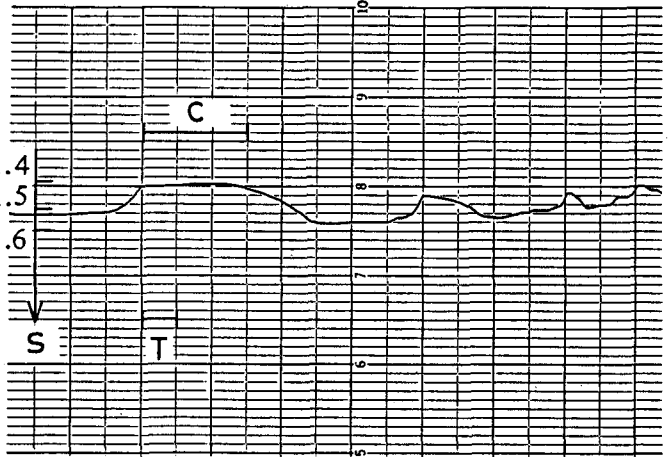


図5 渦の領域の塩分濃度のアウトプットシグナル。Sは塩分濃度、Cは渦の領域を表し、Tはタイムスケール(=1.7秒)を表す。

5. むすび

本研究で明らかとなったことは、以下の2点である。

(1) プラントル・バッチラーの定理を、成層流体中の渦(2次元で定常な閉じた流線を持ち、高レイノルズ数の流れ)に拡張した。その拡張された定理は、その渦の中では、渦度と密度は一様化されていることを示している。この定理は、汚染物質の拡散・混合にも応用できる。

(2) 内部孤立渦の可視化実験を行ない、渦の中では、実際に渦度と密度が一様になっていることが示された。

参考文献

- 1) Prandtl, L. 1928 On the motion of fluid of small viscosity, in English as NACA Technical Memorandum, No.452.
- 2) Batchelor, G.K. 1956 On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number, J. Fluid Mech. vol.1, 177-190.
- 3) Grimshaw, R.H.J. 1969 On steady recirculating flows, J. Fluid Mech. vol.39, 695-703.
- 4) Blennerhassett, R.J. 1979 A three-dimensional analogue of the Prandtl-Batchelor closed streamline theory, J. Fluid Mech. vol.93, 319-324.
- 5) Yamagata, T. & Matsuura, T. 1981 A generalization of Prandtl-Batchelor theorem for planetary fluid flows in a closed geostrophic contour, J. Met. Soc. Jpn. vol.59, 615-619.
- 6) Rhines, P.B. & Young, W.R. 1982 Homogenization of potential vorticity in planetary gyres, J. Fluid Mech. vol.122, 347-367.

- 7) Maxworthy, T. 1981 Non-linear, dispersive waves in the laboratory and in nature, in B.J. West (ed.) Nonlinear properties of internal waves, AIP Conference Proceedings, vol. 76, 11-46.
- 8) Davis, R.E. & Acrivos, A. 1967 Solitary internal waves in deep water, J. Fluid Mech. vol. 29, 593-607.
- 9) Hama, F.R. 1962 Streaklines in a perturbed shear flow, Phys. Fluids. vol. 5, 644-650.
- 10) Bradshaw, P. 1964 Experimental Fluid Mechanics. Pergamon Press 219pp.
- 11) Tritton, D.J. 1977 Physical Fluid Dynamics. Van Nostrand Reinhold Comp. 362pp.
- 12) Kamachi, M. & Honji, H. 1982 Steady flow patterns of internal solitary bulges in a stratified fluid, Phys. Fluids, vol. 25, 1119-1120.
- 13) Charney, J.G. 1973 Planetary Fluid Dynamics, in P. Morel (ed.) Dynamic Meteorology, D. Reidel Pub. Comp. 99-351.
- 14) Landau, L.D. & Lifshitz, E.M. 1959 Fluid Mechanics. Pergamon Press 536pp.
- 15) Kamachi, M., Saitou, T. and Honji, H. 1985 Characteristics of stationary closed streamlines in stratified fluids, Part I : Theory of Laminar Flows, Tech. Rep. Yamaguchi Univ. vol. 3, 295-304.
- 16) Kamachi, M. 1985 Characteristics of stationary closed streamlines in stratified fluids, Part 3 : An exact solution of the vortex pair and theory of a turbulent flow, Tech. Rep. Yamaguchi Univ. vol. 3, 315-322.
- 17) Abramowitz, M. & Stegun, I.A. (ed.) 1984 Handbook of Mathematical Functions. Dover Pub. 1046pp.