

開水路浮遊砂流の乱流構造の解析

Analysis of Turbulent Structure of Open-Channel Flow with Suspended Sediments

長岡技術科学大学 工学部 建設系 福嶋 祐介

1. はじめに

浮遊砂を含む流れでは、一般に乱流構造が変化するため、流速分布、濃度分布を予測するのは難しい。本論文では、乱流構造を変化させる原因のうち、底面付近の密度勾配による負の浮力効果に着目し、解析を行ったものである。現在数多くの乱流モデルが開発されているが、浮力効果を考慮できるモデルのうち最も単純と考えられる $k-\epsilon$ モデルを開水路浮遊砂流に適用した。モデルの適用性を検討するため、二次元、等流の条件で数値解析を行い、実験条件との比較からパラメーターを同定した。この結果、開水路の浮遊砂流の乱流構造について興味ある知見を得たので報告する。

2 浮遊砂流に対する $k-\epsilon$ モデル

十分に広い幅の開水路流に砂が浮遊状態で流れている場合を考える。一般的な $k-\epsilon$ モデルに加えて浮遊砂の質量保存の関係を考慮する。座標系、および記号を図-1のように定める。 $k-\epsilon$ モデルは、かなり複雑でありそのまま解くことは容易ではない。本研究の主たる目的は、浮遊砂によって乱流構造がどのように変化するかを調べることにある。そこで、この目的に沿う範囲で方程式系を単純化することを考える。流れが二次元であり、かつ等流であるものとする。つまり、流速分布、濃度分布は流下方向に変化しない場合を考える。また、流れは十分に発達した乱流であり、粘性の影響は無視できると考える。このとき、基礎方程式は次のようになる。

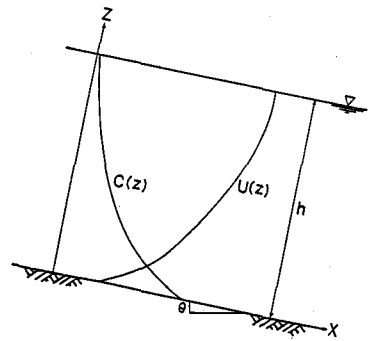


図1 座標系と記号

運動方程式

$$0 = g \sin \theta (1 + Rc) + \frac{d}{dz} \left(\nu_t \frac{du}{dz} \right) \quad (1)$$

浮遊砂の拡散方程式

$$-v_s \frac{dc}{dz} = \frac{d}{dz} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{dc}{dz} \right) \quad (2)$$

乱れの運動エネルギー保存式

$$0 = \frac{d}{dz} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{dk}{dz} \right) + \nu_t \left(\frac{du}{dz} \right)^2 + Rg \cos \theta \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{dc}{dz} - \epsilon \quad (3)$$

粘性逸散率

$$0 = \frac{d}{dz} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{d\epsilon}{dz} \right) + c_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} \left\{ \nu_t \left(\frac{du}{dz} \right)^2 + (1 - c_{3\epsilon}) Rg \cos \theta \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{dc}{dz} \right\} - c_{2\epsilon} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (4)$$

渦動粘性係数

$$\nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (5)$$

表-1

c_{μ}	$c_{1\varepsilon}$	$c_{2\varepsilon}$	σ_k	σ_ε
0.09	1.44	1.92	1.0	1.3

u は x 方向の平均流速、 v_s は静止水中での砂粒子の沈降速度、 g は重力加速度、 p は圧力、 ρ, ρ_s は、それぞれ、浮遊砂流と清水の密度、 c は浮遊砂の濃度、 ν_t は渦動粘性係数、 σ_t は渦動粘性係数と渦拡散係数の比である。式(3)、(4)、(5)中の c_{μ} 、 σ_k 、 σ_t 、 $c_{1\varepsilon}$ 、 $c_{2\varepsilon}$ 、 $c_{3\varepsilon}$ は、それぞれ無次元係数であり、種々の流れとの比較から表1のように定められている。ただし、 σ_t と浮力項に関係する $c_{3\varepsilon}$ の値は求められていない。

浮遊砂の濃度と密度には次の関係がある。

$$\rho = \rho_s (1 + Rc) \quad (6)$$

ここで、 $R = (\rho_s - \rho) / \rho$ は砂粒子の水中比重、 ρ_s は砂粒子の密度である。未知数は、 u, c, k, ε の4つであり、いずれも z だけの関数である。

3. 境界条件

境界条件は、次のように与えた。水面では、せん断応力が零になること、浮遊砂の直角方向のフラックスが零になること、 k と ε には対称条件を与えた。底面での境界条件は、乱流モデルで通常よく用いられる壁関数法(wall function method)を採用した。これは、底面のごく近傍では粘性の影響が卓越するため乱流モデルが適用できないことによる。境界条件を式で表すと、次のようになる。

水面 ($z = h$) で、

$$\begin{aligned} \frac{du}{dz} &= 0 & \frac{dk}{dz} &= 0 \\ v_s c + \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{dc}{dz} &= 0 & \frac{d\varepsilon}{dz} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

底面近傍 ($z = z_0$) で、

$$\begin{aligned} \frac{u}{u_\tau} &= \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{z_0}{k_s} \right) + A_s & k &= \frac{u_\tau^2}{\sqrt{c_\mu}} \\ c &= c_b & \varepsilon &= \frac{u_\tau^3}{\kappa z_0} \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 z_0 は境界条件を与える高さ、 κ はカルマン定数、 k_s は底面粗度の大きさ、 $A_s (= 8.5)$ は無次元定数、 u_τ は摩擦速度である。

式(7)₂を考慮して、式(2)を積分すると、次式を得る。

$$v_s c + \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{dc}{dz} = 0 \quad (9)$$

4. 無次元化された方程式

数値計算を行うため、方程式を無次元化する。代表長さを水深 h 、代表速度を清水流(浮遊砂濃度が零の場合)の摩擦速度 $u_{\tau 0}$ にとり、諸量を次のように無次元化する。但し、無次元量には、アスタリスク "*"を

つける。

$$\begin{aligned} z &= h \eta & u &= u_{\tau 0} u_* & c &= c_b c_* \\ k &= u_{\tau 0}^2 k_* & \varepsilon &= \left(\frac{u_{\tau 0}^3}{h} \right) \varepsilon_* & v_t &= u_{\tau 0} h v_{t*} \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、清水流の摩擦速度 $u_{\tau 0}$ は、次式で定義される。

$$u_{\tau 0} = (gh \sin \theta)^{0.5} \quad (11)$$

このとき、式(1)、(9)、(3)、(4)は、次のように無次元化される。

$$1 + \chi c + \frac{d}{d\eta} \left(v_t \frac{du}{d\eta} \right) = 0 \quad (12)$$

$$\frac{v_s}{u_{\tau 0}} c + \frac{v_t}{\sigma_t} \frac{dc}{d\eta} = 0 \quad (13)$$

$$0 = \frac{d}{d\eta} \left(\frac{v_t}{\sigma_k} \frac{dk}{d\eta} \right) + v_t \left(\frac{du}{d\eta} \right)^2 + R_i \frac{v_t}{\sigma_t} \frac{dc}{d\eta} - \varepsilon \quad (14)$$

$$0 = \frac{d}{d\eta} \left(\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\eta} \right) + c_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} \left\{ v_t \left(\frac{du}{d\eta} \right)^2 + (1 - c_{3\varepsilon}) R_i \frac{v_t}{\sigma_t} \frac{dc}{d\eta} \right\} - c_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (15)$$

但し、アスタリスクは省略している。また、 χ 、 R_i は、次のような無次元数である。

$$\chi = Rc_b \quad (16)$$

$$R_i = \frac{Rc_b gh \cos \theta}{u_{\tau 0}^2} = \frac{Rc_b}{\tan \theta} \quad (17)$$

同様に境界条件も無次元化される。

実験では、通常、水路床勾配(傾き角 θ)、単位幅流量 q 、単位幅流砂量 q_s が与えられ、水深、底面濃度 c_b は、未知量であるのが普通である。そこで、ここでは、単位幅流量 q 、単位幅流砂量 q_s が与えられたとき、水深と底面濃度を求める方法について述べる。単位幅流量 q 、単位幅流砂量 q_s は、次のように定義される。

$$q = \int_0^h u dz = u_{\tau 0} h \int_0^1 u_* d\eta \quad (18)$$

$$q_s = \int_0^h u c dz = c_b u_{\tau 0} h \int_0^1 u_* c_* d\eta \quad (19)$$

式(18)と(19)より、底面濃度 c_b が次のように求められる。

$$c_b = (q_s \int_0^1 u_* d\eta) / (q \int_0^1 u_* c_* d\eta) \quad (20)$$

また、式(11)と(18)より水深 h は、次のように求められる。

$$h = [q / \{ (g \sin \theta)^{0.5} \int_0^1 u_* d\eta \}]^{2/3} \quad (21)$$

表2 水理条件と計算条件

Run No	q cm/s	q_s cm/s	h cm	θ	ρ_s g/cm ³	D_s mm	v_s cm/s	k_s cm	z_0/k_s	σ_t	σ_{3c}	c_b	R_i
Run 1	382	.542	8.66	.00250	2.65	.105	.945	.941	.4	1.20	1.00	.007	4.6
Run 3	500	.612	7.44	.00200	2.65	.105	.945	.018	16.4	1.70	3.00	.014	11.6
Run 5	571	.678	7.83	.00206	2.65	.105	.945	.020	16.0	1.80	6.00	.018	14.4
Run 7	608	.283	7.77	.00258	2.65	.161	1.89	.016	19.4	1.00	2.00	.005	3.2

備考 Bed Condition : Run 1 dunes , Run 3 nearly flat , Run 5,7 flat

水路幅が小さい実験と比較する場合には側壁の抵抗を無視できないため、式(11)の水深を径深に置き換える必要がある。このとき、式(21)は若干変更される。

5. 数値解析

式(12)から(15)は、非線形方程式である。そこで、今回はこれらの方程式系を中央差分法により連立方程式に書き直し、さらにリラクゼーションにより解を求めた。差分方式は、中央差分とし、差分間隔は、変差分間隔と等差分間隔を検討し、その結果、等差分による解析結果が比較的良好な結果を示すことがわかった。なお、 $k-\epsilon$ モデルにおける係数値は、表-1に示す標準値を用いた。

また、式(10)の無次元化により積分範囲は、0から1までとなり、数値計算上便利である。また、浮遊砂の濃度はあまり大きくないので $\chi = Rc_b \leq 1$ と見なすことができる。したがって、 $u = u_{co}$ としてよいので $u_* = 1$ は、よい近似である。

6 計算結果と実験値の比較

計算条件として Vanoni & Nomicos の Run 1,3,5,7 と同じ水理条件を与えた。モデルに含まれるパラメータのうち、底面粗度 k_s 、境界条件を与える高さ z_0 、 σ_t 、 σ_{3c} を変化させ、各Runについて、水深、流速分布、濃度分布にもっとも一致する値を同定した。この結果を水理条件とともに表2にまとめている。但し、単位幅流量 q 、単位幅流砂量 q_s は、流速分布と濃度分布の実測値から求めたものである。図2～図5は、各Runについての流速分布と濃度分布の実測値を計算結果と比較したものである。図4には、Run 5と同じ条件で浮遊砂濃度が零の場合の計算結果も示している。図2～5より、簡単な乱流モデルである $k-\epsilon$ モデルでも適切なパラメータの値を選んでやれば実測値をかなりの程度まで再現できることがわかる。また、Run 5については、濃度が零の清水流の場合も示している。これより浮遊砂流では全体として流速が大きくなっていることがわかる。

表2に示した相当粗度 k_s の値は、dunesがあると報告されているRun 1で0.945cmと大きく、flatあるいはflatに近いと報告されているRun 3,5,7では、ほぼ粒径程度のオーダーであり妥当な値といえよう。

図6は、Run 1,3,5,7の乱れエネルギーと粘性逸散率の計算結果を比較したものである。乱れエネルギーは、水面および底近くで若干の差異があり、底面濃度 c_b が増加するにしたがって乱れエネルギーが減少する傾向にある。粘性逸散率は、底面に近づくほど c_b の増加とともに粘性逸散は増加している。図7は、各Runの渦動粘性係数の比較したものである。図には、Run 5に対応した清水流の結果も示している。渦動粘性係数は清水流の場合が最も大きく、底面の濃度 c_b が増加するにしたがって、流れの大半の領域で渦動粘性係数が減少してゆく。以上のように浮遊砂流では、乱れエネルギー、粘性逸散率、渦動粘性係数といった乱流特性量が清水流と比べて大きく変化する。これは、浮遊砂による僅かな濃度勾配によって乱流の発生が抑えられるためであると考えられる。つまり、浮遊砂流では浮遊砂による負の浮力効果によって、乱流構造が変化していると考えられる。

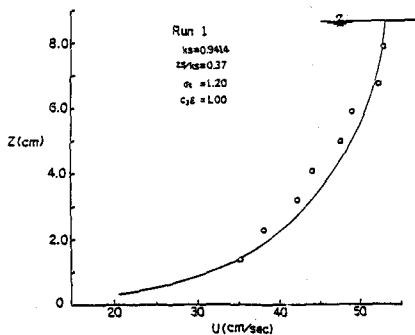


図 2 a 流速分布の比較 (Run 1)

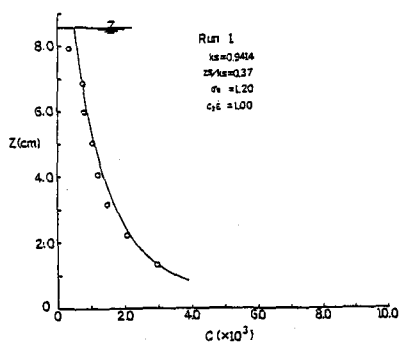


図 2 b 濃度分布の比較 (Run 1)

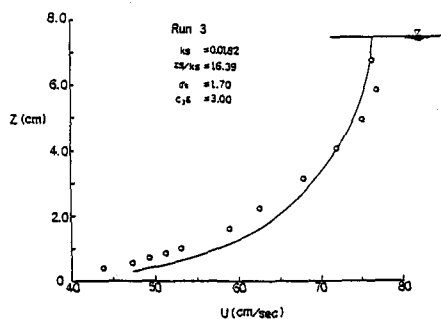


図 3 a 流速分布の比較 (Run 3)

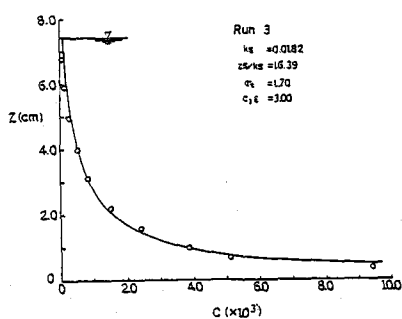


図 3 b 濃度分布の比較 (Run 3)

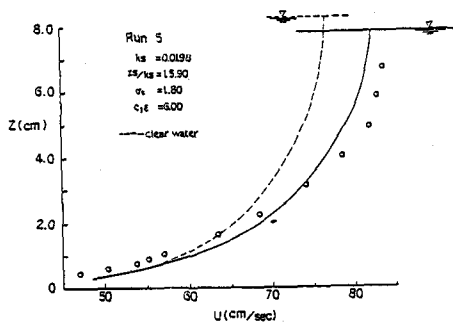


図 4 a 流速分布の比較 (Run 5)

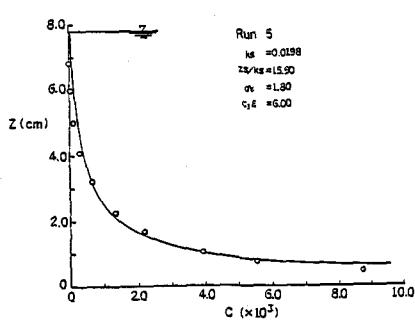


図 4 b 濃度分布の比較 (Run 5)

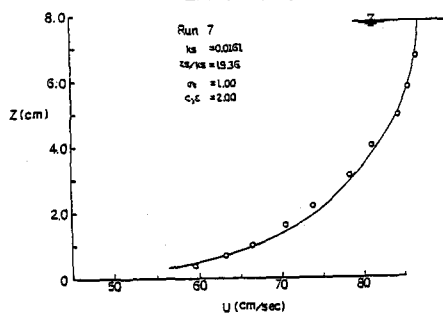


図 5 a 流速分布の比較 (Run 7)

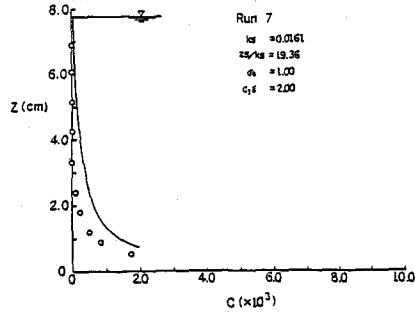


図 5 b 濃度分布の比較 (Run 7)

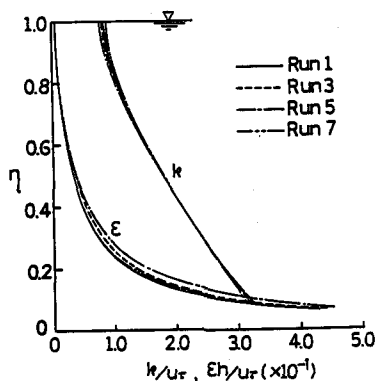


図6 乱れエネルギーと粘性逸散率の分布の比較

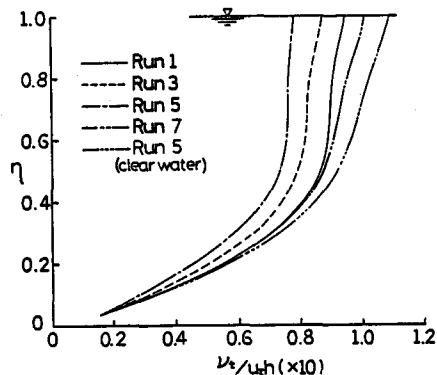


図7 渦動粘性係数の分布

次に、数値計算において同定した係数 σ_t 、 $c_{3\varepsilon}$ の妥当性について検討する。浮遊砂流においては、流れの特性は負の浮力効果に依存するとの立場から、 $1/\sigma_t$ 、 $c_{3\varepsilon}$ をリチャードソン数に対してプロットしたのが図8である。乱れ拡散係数と渦動粘性係数の比 $1/\sigma_t$ は、図8に示すように、リチャードソン数の増加にしたがって減少する。リチャードソン数が増加するにしたがって、つまり、浮遊砂による密度成層の安定性の増加にしたがって $1/\sigma_t$ が減少するという妥当な結果を得ている。

$c_{3\varepsilon}$ は、リチャードソン数の増加に伴いかなり大きく変化しているがこの理由は明確にはわからない。 $c_{3\varepsilon}$ が増加すると、流速の勾配を大きくする効果を持つ。他の条件に比べて、浮遊砂量の多い Run 5 で $c_{3\varepsilon}$ が大きくなったのはこの理由による。しかし、他の研究者による報告では $c_{3\varepsilon} = 0.8 - 1.0$ とされており、今回の値にはこれよりもかなり大きいものもあるが、この点については今後の課題としたい。

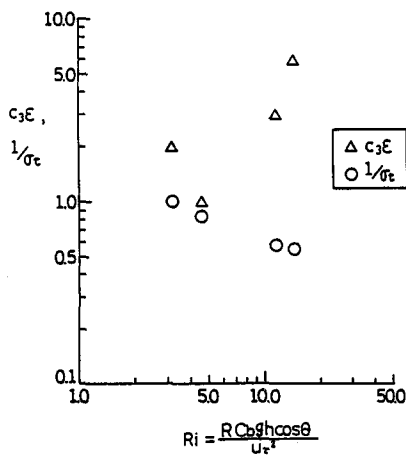


図8 $1/\sigma_t$ 、 $c_{3\varepsilon}$ と Ri の関係

7. おわりに

開水路の浮遊砂流を浮力効果を考慮した $k-\varepsilon$ モデルにより解析した。この結果、浮遊砂流の乱流構造の変化をかなり説明できることを示した。さらに、モデルに含まれるパラメーターがリチャードソン数の関数で与えられることを示した。今後計算例を増し、粒径の影響や底面粗度の効果について検討する必要がある。

最後に、計算に協力された本学大学院一年生の福田雅晴君に深甚なる感謝の意を表します。

参考文献

1. 志村博康 流砂ある水流の諸特性について、土木学会論文集、第46号、1957.
2. 日野幹雄 固体粒子を浮遊した流れの乱流構造の変化、土木学会論文集、第92号、1963.
3. Vanoni, V. A. and Nomicos, G. N., "Resistance Properties of Sediment-Laden Streams", Trans. of ASCE, Vol. 125, 1960.
4. Rodi, W., "Turbulence Models and Their Application in Hydraulics", State of Arts Paper, IAHR, 1980.