

任意境界形状の山腹斜面を対象とした曲線座標系による不飽和浸透流の数値モデル

A Numerical Hydrological Model using a Curvilinear Grid System of Unsaturated Infiltration to Hillslope with Arbitrary Boundary Geometry

東京工業大学大学院 学生員 渡辺 明英
東京工業大学工学部 正 員 瀬岡 和夫
東京工業大学工学部 正 員 日野 幹雄

1. はじめに

Freeze^{1) 2) 3)} によって飽和—不飽和浸透流の数値計算が行われて以来、流出現象における物理的な機構を取り入れた形で浸透流の数値計算を行う試みが、数多く行われるようになってきている。しかし、斜面の形状や構成物質の種類や特性及び層厚等といった複雑な水文特性をそのままの形で直接、数値計算の中へ簡潔に取り入れることは依然として難しい。

不飽和浸透流の計算には従来、差分法や有限要素法が用いられている。この内、有限要素法は任意の境界形状を簡単に取り込めるという利点がある反面、3次元地形を対象にした場合、定式化がかなり煩雑になるということと、またメモリも多く必要とし要素数を多く取れないという難点が存在する。これに対して差分法は、基礎方程式をそのまま差分近似により離散化することで定式化が容易に行え取り扱いが簡単なのでよく用いられるが、一般に直交格子を用いるために複雑な斜面形状を十分に表現できず、そのため数値計算上における境界条件の与え方に問題が残る。また複雑な境界形状を直交格子で表現するためには、格子分割を細かくしなければならず計算を効率的に行えない。しかしながら差分法においても、物理面上で複雑な境界形状を持つ対象領域に対してその形状に合った曲線座標系を導入し、その曲線座標系に沿って座標変換すれば物理面上では複雑な形状が変換面上では矩形となり、もとの物理面上では正確に与えることが困難であった境界条件も変換面上では容易に与えることができるようになる。また、座標変換を行うために基礎方程式がやや複雑になるが、差分法による単純な数値計算を行うので特に支障は生じないし、計算も容易に行うことができる。

そこで本研究では、境界形状に沿った曲線座標系を導入した差分法による任意境界形状斜面に対する3次元飽和—不飽和浸透流の数値解析手法を開発することにより、上述の有限要素法や差分法の長所を共に取り込んだ型の数値モデルを構成することを試みた。

2. Grid Generation 法による曲線座標系の設定

任意境界形状を数値モデル内に素直に取り込むため、任意形状物体周りの流れの数値シミュレーションを対象として開発されたThompson⁴⁾の方法(図-1)にならい、対象とする領域に対して曲線座標系を以下に示すように導入する。

まず、物理空間〔(x, y) 平面〕上に導入する曲線座標系(ξ, η)として、境界形状に沿いつ式(1)を満足させるものを選ぶ。そのためには式(1)を与えられた境界条件の下で解くことが必要となるが、これを直接物理空間上で解くことは境界形状の複雑さのために困難である。しかしながらここにおいて、(x, y) 平面上での対象領域に対応する(ξ, η) 平面での対象領域は上述のように矩形となることから変換面上では比較的容易に式(1)の解を求めることができる。すなわち変換

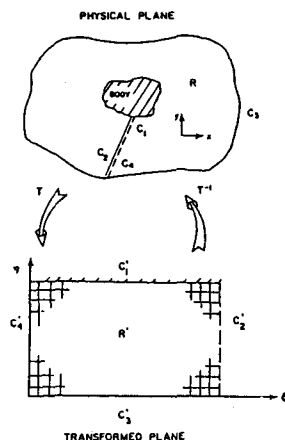


FIG. 1. Field transformation—single body.
(From Thompson et al. 1974)

面上で式(2)を満足する $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ の値を (ξ, η) 直交格子上で差分計算により求め、その値を物理空間上に戻せば、物理空間上で式(1)を満足する ξ と η の各コンターの (x, y) 座標が得られたことになる。ただし、式(2)に対しての境界条件は、変換面上の境界が各々対応する物理空間上での境界の (x, y) 座標を与えるものとする。実際の数値計算においては、物理面での境界線上で任意に選択した点の (x, y) 座標の値を変換面上の境界の格子点上での変数 $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ に対し既知として与えるという方法をとる。ここで、物理面の境界での格子点の与え方によっては内部の格子がゆがむことがあるが、これは問題ではない。このゆがみは、式(1)または式(2)の右辺に対し適当な値を与えることによって適宜更正することができる。

なお、土壌が何層かの土壌特性の異なる層から成る場合にはそれらの境界領域ごとに別々に式(2)を解いて曲線座標系を求めればよい。

この方法による曲線座標系の設定例を図-2に示す。

$$\begin{cases} \Delta \cdot \xi = 0 \\ \Delta \cdot \eta = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} = 0 \\ \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\alpha = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2, \beta = x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta}, \\ \gamma = x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2$$

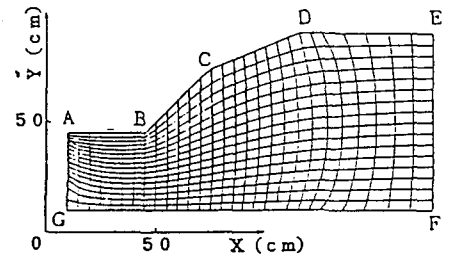


図-2 曲線座標系の設定例

3. 飽和-不飽和浸透流の数値計算

1) 計算方法

図-2に示した対象領域に対する浸透流計算を次のように行う。

基礎方程式としては、等方性を仮定した場合のRichardsの飽和-不飽和浸透式〔式(3-a)〕を用い、土壌の物理特性は一つの層内では場所によらず一様であるとする。これを曲線座標系で解くために、式(3-a)に対して座標変換を行って得たのが式(3-b)である。この式(3-b)は変換面上の直交格子に通常の差分法を用いることで容易に解くことができる。

$$C \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial \phi}{\partial y} \right), \phi = \psi + y \quad (3-a)$$

ここに ψ : 圧力ポテンシャル, ϕ : 全水理ポテンシャル, C : 比水分容量, K : 透水係数

$$C \frac{\partial \psi}{\partial t} = K \left\{ \frac{1}{J^2} (\alpha \psi_{\xi\xi} - 2\beta \psi_{\xi\eta} + \gamma \psi_{\eta\eta}) + (\Delta \xi) \psi_{\xi} + (\Delta \eta) \psi_{\eta} \right\} \\ + \frac{1}{J^2} \left\{ \alpha K_{\xi} \psi_{\xi} - \beta (K_{\xi} \psi_{\eta} + K_{\eta} \psi_{\xi}) + \gamma K_{\eta} \psi_{\eta} \right\} + \frac{1}{J} (-x_{\eta} K_{\xi} + x_{\xi} K_{\eta}) \quad (3-b)$$

$$J = x_{\xi} y_{\eta} - x_{\eta} y_{\xi}$$

各境界に対する物理面上での境界条件は次の通りである。図-2の境界EFGA上で不透水壁の条件、すなわち式(4-a)に示すように全水理ポテンシャルの壁面の法線方向微分が0という条件を与えた。境界AB上ではそこで水面となるように圧力ポテンシャルを0〔式(5)〕とおいた。また境界BCDE上では、表面が不飽和の場合は式(6-a)に示すようにフラックス一定の条件を与え、飽和時には表面が水面となるような条件、すなわち圧力ポテンシャルが0となるような条件を与えた。また、式(4-b)・式(6-b)はそれぞれ物理面上での境界条件を変換面上での数値計算に取り入れるために式(4-a)・式(6-a)を座標変換したもので

あり、実際の数値計算上では式(4-b)・式(8-b)を満足するような境界上の格子点の圧力ポテンシャルを求めることで物理面上の境界条件を満たすようにすることができる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on EFCA} \quad (4-a)$$

$$\begin{cases} \beta \psi_{\xi} - \gamma \psi_{\eta} - x_{\xi}^J = 0 & (\text{on FG}) \\ \alpha \psi_{\xi} - \beta \psi_{\eta} - x_{\eta}^J = 0 & (\text{on EF, GA}) \end{cases} \quad (4-b)$$

$$\psi = 0 \quad \text{on AB} \quad (5)$$

$$Rdx = qds, \quad q = K \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad \text{on BCDE} \quad (8-a)$$

$$\gamma \psi_{\eta} - J x_{\xi} \left(\frac{n}{K} - 1 \right) - \beta \psi_{\xi} = 0 \quad (8-b)$$

$$\psi = 0 \text{ (saturated)}$$

基礎式(3-b)の数値解法には、空間的には2次のオーダーで差分近似し、時間的にはCrank-Nicolson型で表したものを、SOR法で解く方法を用いた。

また、土壌物理特性 $C(\psi), K(\psi), \theta(\psi)$ は谷⁵⁾の式〔式(7),(8),(9)〕で与え、各パラメータの値は表-1に示すものを用いた。

表-1 土壌物理パラメータの値

$$K = K_s (S/\beta), \quad S = (\psi/\psi_0 + 1) \cdot \exp(-\psi/\psi_0) \quad (7)$$

$$C = -(\theta_s - \theta_r) \cdot \psi / (\psi_0^2) \cdot \exp(-\psi/\psi_0) \quad (8)$$

$$\theta = (\theta_s - \theta_r) \cdot (\psi/\psi_0 + 1) \cdot \exp(-\psi/\psi_0) + \theta_r \quad (9)$$

Ks (cm/min)	β	ψ_0 (cmH ₂ O)	θ_s	θ_r
0.05	2	-20	0.8	0.3

2) 計算結果

上述の方法による浸透流の数値計算を2例 (Run1, Run2) 行った。Run1は初期条件として静止平衡状態を選び、雨量強度 15mm/hrの降雨を境界DE上にのみ5時間与えた時の現象を降雨開始から5分きざみで10時間にわたり計算したものである。Run2は、Run1と同じ初期条件と雨量強度に対して降雨を境界BCDE上全体に1時間与えた時の現象を降雨開始から1分きざみで2時間にわたり計算したものである。Run1の結果を図-3、図-4に、Run2の結果を図-5、図-6に示す。図-3、図-5はそれぞれRun1、Run2の各時間における全水理ポテンシャルのコンターと水面位置を示しており、また図-4、図-6は同様に各格子点での流速ベクトルを表している。

Run1の結果をみると、降雨初期においては右上方部の飽和度が低かった部分で雨水がトラップされ、そのため雨水は地中深くまで浸透せず、従って水面はまだ上昇していないことがわかる。そして、3~4時間後には水分が領域全体で移動するようになり、まず浸透水がいち早く到達した右側境界付近において水面の上昇が起こっていることがわかる。これは、Freeze²⁾の結果と定性的によく一致した結果となっている。

また、Run2の結果からは次のようなことがわかる。降雨初期においては右上方部でRun1と同様に雨水がト

ラップされる現象が起こっているが、元々飽和に近かった斜面下部では早くから水面が上昇している。そのために水平方向にポテンシャル差が生じて流れが起き、その結果としてRun1に比べ早い時期から流出を開始している。これはGilham⁶⁾らの主張するcapillary fringe効果による流出の発生を示すものである。

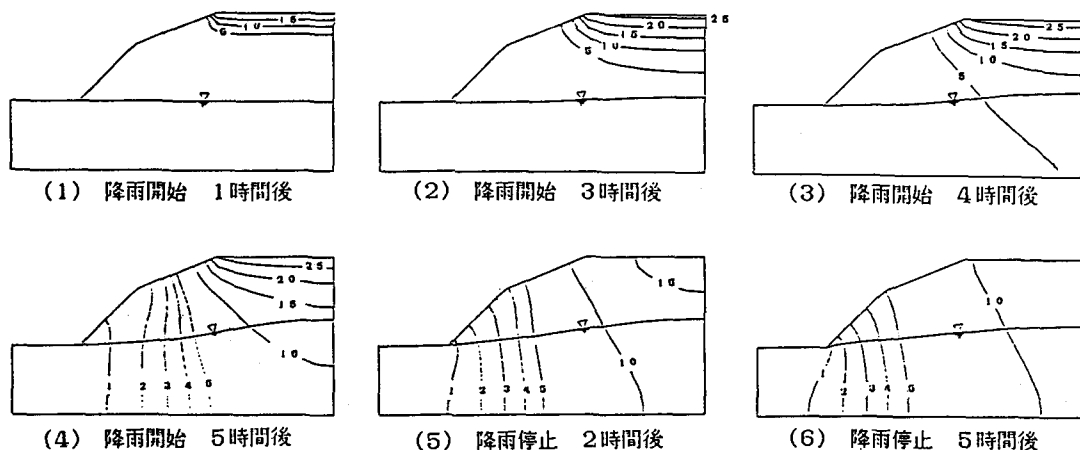


図-3 全水理ポテンシャル (ϕ : cmHg) のコンターと水面位置 (Run1)

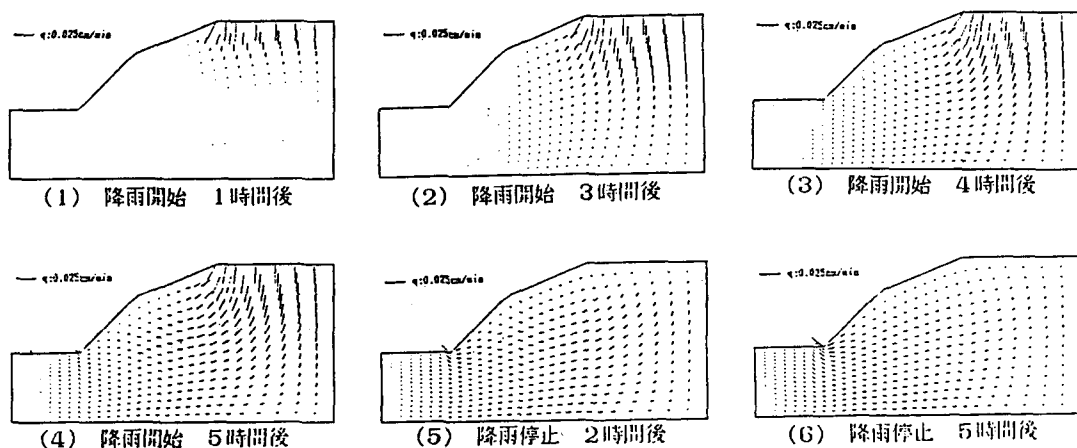


図-4 各格子点での流速ベクトル (Run1)

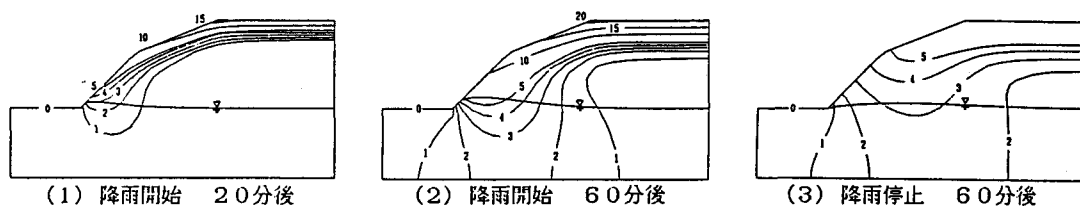


図-5 全水理ポテンシャル (ϕ : cmHg) のコンターと水面位置 (Run2)

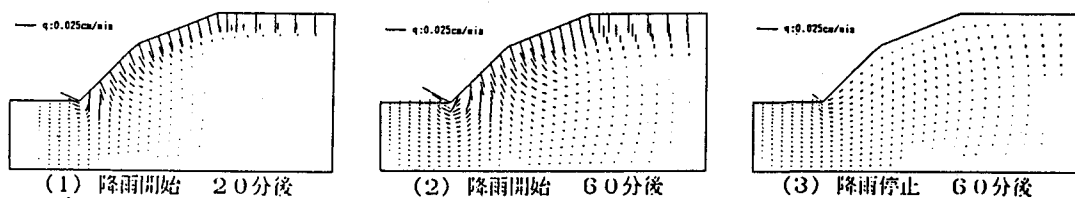


図-6 各格子点での流速ベクトル (Run2)

4. おわりに

以上の結果より、本研究で開発した不飽和浸透流の数値モデルが雨水の浸透・流出の現象をよくシミュレートしていることがわかる。

従って、本研究で示した曲線座標系を導入する方法による任意境界形状を持つ山腹斜面の飽和-不飽和浸透流の数値モデルの有効性が確かめられた。また対象とする斜面が何層かの土壌特性の異なる層からなる場合や3次元地形である場合について同様な方法で飽和-不飽和浸透流の計算を行うことを目下試みている。

謝辞) 本研究は、文部省科学研究費特定研究(1)「比較河川学の研究」(研究代表者 北大 岸 力)の補助を受けている。ここに付記して感謝の意を表します。

参考文献)

- 1) Freeze Water Res. Res. 7(2), 1971a
- 2) Freeze Water Res. Res. 8(3), 1972a
- 3) Freeze Water Res. Res. 8(5), 1972b
- 4) Thompson J. Comp. Phys. 15, 1974
- 5) 谷 誠 日林誌 64, 1982
- 6) Gilham J. Hydrology 67, 1984