

実時間観測データによる定係数2次元移流分散方程式のパラメータ同定と濃度予測

Parameter Identification of Two-dimensional Convective-dispersion Equation and Prediction of Concentration Distribution based on On-line Observations

九州大学 工学部 神野健二 上田年比古 国際協力事業団 安田裕

1. 序論

従来より地下水流動場で移流分散現象を考える場合、解析解や数値解を適用するときには初期及び境界条件は、予め既知情報として取り扱われてきた。しかし、自然の系は確率過程と考える方がより一般的で、従って初期条件や境界条件も未知として取り扱われるべきであろう。また、移流分散方程式の中に含まれるパラメータについても、多くの場合確定論的に取り扱えるものではないであろう。ところで、移流分散過程の濃度の現地観測データについて考えると、空間的に任意に設置された観測井で汚染物質濃度の経時観測が行われているが、得られた観測情報は適当に設定された初期・境界条件及びパラメータの下で解かれた解析解、数値解の精度の吟味に使われる程度で、十分に活用されているとは言い難い。以上のような現実の問題に対しては、従来の解析解、数値解を求めてゆくような確定論的アプローチでは十分に対応できないことが多い。本報では、このような問題の解決への第一歩として、空間的に一定のパラメータを持つ移流分散方程式にランダムな変動が加わる輸送過程を考える。このとき、初期および境界条件は不明であるとし、2次元平面上にはある程度の観測井戸が設置されていて、時々刻々濃度情報が入手できることの条件の下で、パラメータの逐次同定と、濃度予測問題のアルゴリズムについて検討を加えるものである。

2. Fourier級数展開による基礎方程式の常微分方程式化

基礎式として式(1)を考える。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D_{xx} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + (D_{xy} + D_{yx}) \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} + D_{yy} \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - \gamma_0 C + f_a \varepsilon(x, y, t) \quad (1)$$

ここに、 $C(x, y, t)$:濃度、 u, v :流速、 $D_{xx}, D_{xy}=D_{yx}, D_{yy}$:分散係数、 γ_0 :一次反応係数、 f_a :システム雑音強度、 $\varepsilon(x, y, t)$:時・空間的にランダムな正規性白色雑音である。差分法や有限要素法によって式(1)を数値計算する場合に、境界および初期条件が明確に設定できない場合には、解析者の主観によってこれらの条件が設定されるのであいまいさが残る。また、移流項の離散化誤差は計算精度に大きく影響するが、特に差分法では空間的な高周波成分をも微分してしまうことになり、不確定性はさらに増大することが予想される。ここでは、以上の問題点を避けるために式(1)をFourier級数に展開し、ある任意の波数のFourier係数について解析を行う。式(1)中の雑音項をFourier級数に展開する:

$$\varepsilon(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [A_{mn}(t) \sin f(x, y; m, n) + B_{mn}(t) \cos f(x, y; m, n)] \quad (2)$$

$$f(x, y; m, n) = 2\pi m x / l_x + 2\pi n y / l_y$$

ここに、 l_x, l_y は基本波長である。点 (x, y) と点 $(x+\xi, y+\eta)$ の間の $\varepsilon(x, y, t)$ の空間相関関数は

$$R_{\varepsilon}(\xi, \eta) = E[\varepsilon(x, y, t) \varepsilon(x+\xi, y+\eta, t)] \\ = (1/2) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} E[A_{mn}^2 + B_{mn}^2] \cos f(\xi, \eta; m, n) \quad (3)$$

$$f(\xi, \eta; m, n) = 2\pi m \xi / l_x + 2\pi n \eta / l_y \quad ; E[\] \text{は期待値演算子}$$

となるが、ここでは $\varepsilon(x, y, t)$ が空間的に白色であると仮定しているので、そのスペクトルを

$$(1/2) E[A_{mn}^2 + B_{mn}^2] = E[A_{mn}^2] = E[B_{mn}^2] \\ = \frac{1}{2 l_x l_y} \frac{\sin(m\pi/\psi_x l_x)}{(m\pi/\psi_x l_x)} \frac{\sin(n\pi/\psi_y l_y)}{(n\pi/\psi_y l_y)} \quad (4)$$

のようにモデル化する。ここに、 ϕ_x 、 ϕ_y は $\varepsilon(x, y, t)$ がそれぞれ x 、 y 方向に $1/(2\phi_x)$ 、 $1/(2\phi_y)$ より遠く離れると相関が無いと考える時のパラメータである。この ϕ_x 、 ϕ_y の値を大きくすると、式(4)のスペクトルは波数に対して一定値となる。 $\varepsilon(x, y, t)$ と同様に濃度 $C(x, y, t)$ をFourier級数に展開する。

$$C(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [C_{mn}(t) \sin f(x, y; m, n) + D_{mn}(t) \cos f(x, y; m, n)] \quad (5)$$

式(2)及び(5)を式(1)に代入し、波数 (m, n) のFourier係数に関する常微分方程式を求めると、

$$\begin{bmatrix} dC_{mn}/dt \\ dD_{mn}/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F & G \\ -G & -F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{mn}(t) \\ D_{mn}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_a A_{mn}(t) \\ f_a B_{mn}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{for } m, n=0, 1, 2, \dots) \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} F(D_{xx}, D_{xy}, D_{yy}, \gamma_0) &= (2\pi m/l_x)^2 D_{xx} + (8\pi^2 mn/l_x l_y) D_{xy} + (2\pi n/l_y)^2 D_{yy} + \gamma_0 \\ G(u, v) &= 2\pi mu/l_x + 2\pi nv/l_y \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} f_a A_{mn}(t) &= \dots \\ f_a B_{mn}(t) &= \dots \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

3. フィルタリング手法を適用するシステムダイナミックスの誘導

式(1)中のパラメータである流速及び分散係数などが未知の場合には、次の式を加える。

$$\begin{aligned} du(t)/dt &= 0, & dv(t)/dt &= 0, & dD_{xx}(t)/dt &= 0 \\ dD_{xy}(t)/dt &= 0, & dD_{yy}(t)/dt &= 0, & d\gamma_0(t)/dt &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

ここではパラメータも同定することを考えているので、式(6)は非線形方程式である。非線形フィルタリング手法には拡張カルマンフィルタ、2次フィルタあるいは統計的線形化、統計的2次フィルタなど種々開発されている¹⁾²⁾。ここでは、拡張カルマンフィルタ及び2次フィルタ³⁾を採用する場合を示す。観測データが各時間ステップ毎に入手出来る場合を想定して(そうでない場合に拡張することは容易)、式(6)及び(9)を時間に関して時間刻み Δt で差分化すると、

$$\begin{bmatrix} C_{mn}(t+\Delta t) \\ D_{mn}(t+\Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\Delta t \cdot F) & \Delta t \cdot G \\ -\Delta t \cdot G & (1-\Delta t \cdot F) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{mn}(t) \\ D_{mn}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta t \cdot f_a \cdot A_{mn}(t) \\ \Delta t \cdot f_a \cdot B_{mn}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{for } m, n=0, 1, 2, \dots) \quad (10)$$

$$u(t+\Delta t) = u(t) \quad (11), \quad v(t+\Delta t) = v(t) \quad (12)$$

$$D_{xx}(t+\Delta t) = D_{xx}(t) \quad (13), \quad D_{xy}(t+\Delta t) = D_{xy}(t) \quad (14)$$

$$D_{yy}(t+\Delta t) = D_{yy}(t) \quad (15), \quad \gamma_0(t+\Delta t) = \gamma_0(t) \quad (16)$$

いま、各状態量を推定値($\langle \rangle$ 記号)とそれらの推定誤差との和で表そう。

$$u(t) = \langle u(t) \rangle + \Delta u(t) = \bar{u}_1(t) + X_1(t) \quad (17), \quad v(t) = \langle v(t) \rangle + \Delta v(t) = \bar{u}_2(t) + X_2(t) \quad (18)$$

$$D_{xx}(t) = \langle D_{xx}(t) \rangle + \Delta D_{xx}(t) = \bar{u}_3(t) + X_3(t) \quad (19), \quad D_{xy}(t) = \langle D_{xy}(t) \rangle + \Delta D_{xy}(t) = \bar{u}_4(t) + X_4(t) \quad (20)$$

$$D_{yy}(t) = \langle D_{yy}(t) \rangle + \Delta D_{yy}(t) = \bar{u}_5(t) + X_5(t) \quad (21), \quad \gamma_0(t) = \langle \gamma_0(t) \rangle + \Delta \gamma_0(t) = \bar{u}_6(t) + X_6(t) \quad (22)$$

$$C_{mn}(t) = \langle C_{mn}(t) \rangle + \Delta C_{mn}(t) = \bar{u}_p(t) + X_p(t) \quad (23), \quad D_{mn}(t) = \langle D_{mn}(t) \rangle + \Delta D_{mn}(t) = \bar{u}_{p+1}(t) + X_{p+1}(t) \quad (24)$$

ここで、式(23)、(24)の添字 p は $p=7, 9, 11, \dots$ の値をとるようにしてプログラミングする。すなわち、 $p=7$ のときには式(23)では波数 $(0, 1)$ のFourier係数 $C_{01}(t)$ が対応し、式(24)では $D_{01}(t)$ が対応するように通し番号を付けておく。さて、システム方程式(10)~(16)に式(17)~(24)を代入すると、波数 (m, n) の

Fourier係数 $C_{mn}(t)$ に関して次式を得る。

$$\begin{aligned} \langle C_{mn}(t+1) \rangle + \Delta C_{mn}(t+1) = & [1 - \Delta t \langle F \rangle + \Delta F] \cdot [\langle C_{mn}(t) \rangle + \Delta C_{mn}(t)] \\ & + \Delta t \langle G \rangle + \Delta G \cdot [\langle D_{mn}(t) \rangle + \Delta D_{mn}(t)] + \Delta t \cdot fa \cdot A_{mn}(t) \end{aligned} \quad (25)$$

ここで、簡単のため時間を時間ステップ t で表している。また、

$$\begin{aligned} \Delta F = & \langle \partial F / \partial D_{xx} \rangle \cdot \Delta D_{xx}(t) + \langle \partial F / \partial D_{xy} \rangle \cdot \Delta D_{xy}(t) + \langle \partial F / \partial D_{yy} \rangle \cdot \Delta D_{yy}(t) + \langle \partial F / \partial \gamma_0 \rangle \cdot \Delta \gamma_0(t) \\ \Delta G = & \langle \partial G / \partial u \rangle \cdot \Delta u(t) + \langle \partial G / \partial v \rangle \cdot \Delta v(t) \end{aligned} \quad (26)$$

なお、式(7)、(8)より F や G のパラメータによる2次以上の偏微分係数はすべてゼロである。また、式(26)の推定値 $\langle \rangle$ は波数および基本波長 l_x, l_y にのみ依存する定数である。式(25)を展開すると、

$$\begin{aligned} \langle C_{mn}(t+1) \rangle + \Delta C_{mn}(t) = & [1 - \Delta t \langle F \rangle] \cdot \langle C_{mn}(t) \rangle + \Delta t \langle G \rangle \cdot \langle D_{mn}(t) \rangle - \Delta t \langle C_{mn}(t) \rangle \Delta F \\ & + \Delta t \langle D_{mn}(t) \rangle \Delta G + [1 - \Delta t \langle F \rangle] \cdot \Delta C_{mn}(t) + \Delta t \langle G \rangle \cdot \Delta D_{mn}(t) \\ & - \Delta t \cdot \Delta F \cdot \Delta C_{mn}(t) + \Delta t \cdot \Delta G \cdot \Delta D_{mn}(t) + \Delta t \cdot fa \cdot A_{mn}(t) \end{aligned} \quad (27)$$

アンダーラインの部分は推定誤差項の積になっていることを示している(以下同じ)。Athans, M.ら³⁾の2次フィルタ-誘導と同様に、推定誤差の期待値にバイアスがないようにするために補正関数 $\Phi_{mn}(t)$ を用いて、

$$\langle C_{mn}(t+1) \rangle = [1 - \Delta t \langle F \rangle] \cdot \langle C_{mn}(t) \rangle + \Delta t \cdot \langle G \rangle \cdot \langle D_{mn}(t) \rangle + \Phi_{mn}(t) \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \Delta C_{mn}(t+1) = & \Delta t \cdot \Gamma_1' \cdot \Delta + [1 - \Delta t \langle F \rangle] \cdot \Delta C_{mn}(t) + \Delta t \cdot \langle G \rangle \cdot \Delta D_{mn}(t) + \Delta t \cdot fa \cdot A_{mn}(t) \\ & + \phi_1(m, n, t) - \Phi_{mn}(t) \end{aligned} \quad (29)$$

ここに、「 Γ 」は転置記号である。

$$\begin{aligned} \Gamma_1 = & [\langle \partial G / \partial u \rangle \langle D_{mn}(t) \rangle, \langle \partial G / \partial v \rangle \langle D_{mn}(t) \rangle, -\langle \partial F / \partial D_{xx} \rangle \langle C_{mn}(t) \rangle, \\ & -\langle \partial F / \partial D_{xy} \rangle \langle C_{mn}(t) \rangle, -\langle \partial F / \partial D_{yy} \rangle \langle C_{mn}(t) \rangle, -\langle \partial F / \partial \gamma_0 \rangle \langle C_{mn}(t) \rangle] \end{aligned} \quad (30)$$

$$\Delta = [\Delta u(t), \Delta v(t), \Delta D_{xx}(t), \Delta D_{xy}(t), \Delta D_{yy}(t), \Delta \gamma_0(t)]' \quad (31)$$

$$\phi_1 = -\Delta t \cdot \Delta F \cdot \Delta C_{mn}(t) + \Delta t \cdot \Delta G \cdot \Delta D_{mn}(t) \quad (32)$$

である。同様に、 $D_{mn}(t+1)$ についても補正関数 $\Psi_{mn}(t)$ を用いて、

$$\langle D_{mn}(t+1) \rangle = -\Delta t \cdot \langle G \rangle \cdot \langle C_{mn}(t) \rangle + [1 - \Delta t \langle F \rangle] \cdot \langle D_{mn}(t) \rangle + \Psi_{mn}(t) \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \Delta D_{mn}(t+1) = & -\Delta t \cdot \Gamma_2' \cdot \Delta - \Delta t \cdot \langle G \rangle \cdot \Delta C_{mn}(t) + [1 - \Delta t \langle F \rangle] \cdot \Delta D_{mn}(t) + \Delta t \cdot fa \cdot B_{mn}(t) \\ & + \phi_2(m, n, t) - \Psi_{mn}(t) \end{aligned} \quad (34)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \Gamma_2 = & [\langle \partial G / \partial u \rangle \langle C_{mn}(t) \rangle, \langle \partial G / \partial v \rangle \langle C_{mn}(t) \rangle, \langle \partial F / \partial D_{xx} \rangle \langle D_{mn}(t) \rangle, \\ & \langle \partial F / \partial D_{xy} \rangle \langle D_{mn}(t) \rangle, \langle \partial F / \partial D_{yy} \rangle \langle D_{mn}(t) \rangle, \langle \partial F / \partial \gamma_0 \rangle \langle D_{mn}(t) \rangle] \end{aligned} \quad (35)$$

$$\phi_2(m, n, t) = -\Delta t \cdot \Delta G \cdot \Delta C_{mn}(t) - \Delta t \cdot \Delta F \cdot \Delta D_{mn}(t) \quad (36)$$

である。式(29)、(34)の両辺の期待値をとって $\Phi_{mn}(t)$ 及び $\Psi_{mn}(t)$ を求めると、

$$\begin{aligned} \Phi_{mn}(t) = & -\Delta t \langle \Delta F \cdot \Delta C_{mn}(t) \rangle + \Delta t \langle \Delta G \cdot \Delta D_{mn}(t) \rangle \\ = & -\Delta t [(2\pi m/l_x)^2 P(3, p) + (8\pi^2 mn/l_x l_y) P(4, p) + (2\pi n/l_y)^2 P(5, p) + P(6, p)] \\ & + \Delta t [(2\pi m/l_x) P(1, p+1) + (2\pi n/l_y) P(2, p+1)] \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{mn}(t) = & -\Delta t \langle \Delta G \cdot \Delta C_{mn}(t) \rangle - \Delta t \langle \Delta F \cdot \Delta D_{mn}(t) \rangle \\ = & -\Delta t [(2\pi m/l_x) P(1, p) + (2\pi n/l_y) P(2, p)] \\ & - \Delta t [(2\pi m/l_x)^2 P(3, p+1) + (8\pi^2 mn/l_x l_y) P(4, p+1) + (2\pi n/l_y)^2 P(5, p+1) + P(6, p+1)] \end{aligned} \quad (38)$$

ここに、 $P(i, j)$ は推定誤差の共分散行列 P の (i, j) 成分で、例えば

$$\begin{aligned} P(3, p) = & \langle \Delta D_{xx}(t) \cdot \Delta C_{mn}(t) \rangle = \langle X_3(t) \cdot X_p(t) \rangle, \\ P(2, p+1) = & \langle \Delta v(t) \cdot \Delta D_{mn}(t) \rangle = \langle X_2(k) \cdot X_{p+1}(t) \rangle \end{aligned} \quad (39)$$

などである。

4. 観測方程式について

ここでは、パラメータについて観測値がなく、濃度 $C(x, y, t)$ については平面上に任意に配置された井戸

から観測される場合を想定する。いま観測点の番号をKとしよう。このとき、

$$C(x_K, y_K, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [\sin f(x_K, y_K; m, n) C_{mn}(t) + \cos f(x_K, y_K; t) D_{mn}(t)] + w(t, K) \quad (40)$$

ここに、 $w(t, K)$ は観測雑音である。したがって、各々の観測点で式(40)を書き下して、行列表示すれば線形のベクトル観測方程式が得られる。ところで、実際に計算機によって推定を行ってゆくためには無限個のFourier係数を取り扱うわけにはいかないので、ここではある波数(M, N)で級数展開を打ち切ることにして、これに関する赤池の情報量基準を用いることにする。これは、観測値が観測雑音によって乱されている場合に、分布の内挿関数の次数を合理的に定める基準であり、これを式(40)にあてはめれば与えられた観測点の数、配置および観測雑音のレベルに応じて最適な項数が決定できる。具体的には赤池の情報量基準は

$$AIC = (\text{観測点の数}) \ln [\text{式(40)による推定残差の分散}] + 2 \times [\text{パラメータ数} = 2(M+1)(N+1)] \quad (41)$$

である。観測データは時々刻々入って来るが、項数の目安として第ゼロステップでの濃度観測値を用いて最適項数を決定すればよいであろう。項数の打ち切りによる内挿誤差が観測雑音 $w(t, K)$ のレベルに比べて大きい場合には、内挿誤差が必ずしも白色雑音にならないことがあるが、この点については本報では検討していない。

5. フィルタリング計算のアルゴリズム

フィルタリング計算を行うためには、推定誤差共分散行列および状態量の初期推定値が必要であるが、このうちFourier係数については、第ゼロステップにおいて既に赤池の情報量基準を計算する際に求められているのでこれを与えることができる。他の変数については特に設定基準は無い。次に、共分散行列の漸化式およびゲイン行列の計算式についてはAthans, M.らの文献あるいは通常のカルマンフィルターのアルゴリズムを用いればよい。計算手順を簡単に述べると、まず①:共分散行列の値から式(37)および(38)の補正関数 $\Phi_{mn}(t)$ 、 $\Psi_{mn}(t)$ を計算する。②:式(28)および(33)によってFourier係数の推定値を計算する。③:得られたFourier係数の推定値を式(40)のFourier係数に代入し、次の時間ステップの観測濃度を予測する。このとき、観測雑音の項は不必要である。また打ち切り項数はAIC基準で定められたものを採用する。④:観測値と観測値の予測値との予測誤差(Innovation)を計算する。⑤:別途求めておいたゲイン行列に予測誤差を掛けて、②で求めておいたFourier係数の推定値と式(11)～(16)のパラメータを修正する。⑥:ゲイン行列と共分散行列を計算し、再び①に戻る。

6. その他の関係式

式(6)の $C_{mn}(t)$ と $D_{mn}(t)$ の2つの常微分方程式から波数(m, n)の位相 $\theta(m, n, t)$ 、スペクトル $Sp(m, n, t)$ の時間変化を表す方程式を得ることが出来る。ここに、

$$\tan[\theta(m, n, t)] = C_{mn}(t)/D_{mn}(t) \quad (42)$$

$$d\theta(m, n, t)/dt = (2\pi m/lx)u + (2\pi n/ly)v + \{fa/2Sp(m, n, t)\} \cdot [D_{mn} \cdot A_{mn} - C_{mn} \cdot B_{mn}] \quad (43)$$

$$Sp(m, n, t) = (1/2)[C_{mn}^2(t) + D_{mn}^2(t)] \quad (44)$$

$$d[\log\{Sp(m, n, t)\}]/dt = -2[(2\pi m/lx)^2 D_{xx} + (8\pi^2 mn/lxly) D_{xy} + (2\pi n/ly)^2 D_{yy} + \gamma_0] + \{fa/Sp(m, n, t)\} \cdot [C_{mn} \cdot A_{mn} + D_{mn} \cdot B_{mn}] \quad (45)$$

$A_{mn}(t)$ あるいは $B_{mn}(t)$ が $C_{mn}(t)$ 、 $D_{mn}(t)$ と独立であるから式(44)および(45)の期待値をとると、式中に示したアンダーラインの部分は消え、位相速度の期待値が速度と、またスペクトルの対数の変化率の期待値が分散係数とそれぞれ線形関係にあることがわかる。

6. 簡単な計算例によるフィルター特性の検討

ここでは、時刻 $T=T_0$ で上流の点 (x_0, y_0) に汚染物質が瞬間注入され、暫く時間が経過して解析対象地区に汚染物質が輸送されて来る場合を想定する。簡単のため、瞬間注入の解析解:

$$C(x,y,t) = \frac{C_0}{4\pi(\sqrt{D_L D_T})} \exp \left[-\frac{(x-x_0-ut)^2}{4D_L t} - \frac{(y-y_0)^2}{4D_T t} \right] \quad (46)$$

に観測雑音を加えて観測値とした。ここでは、 $u=10.0$ m/day、 $v=0$ m/day、 $D_L=D_{xx}=16.34$ m²/day、 $D_T=D_{yy}=0.09$ m²/day、 $C_0=1.5 \times 10^5$ μ g/lを真値として与えた。図-1(a)には観測点配置を示している。表-1は計算条件と結果を示している。パラメータの初期値は、表中の「初期値」の欄の倍率を真値(解析解に用いた値)に乗じて与えた。共分散行列の初期値には、「初期分散」の欄の数値を状態量の初期値に掛け、これを2乗した値を与えた。なお、同表の「次数」の欄は3、で示した補正関数 $\phi_{mn}(t)$ 、 $\Psi_{mn}(t)$ を考慮しない場合を1次フィルタ、考える場合を2次フィルタとしたものである。

(1)基本波長の効果:基本波長を種々変えて計算を行った。実際の問題を考えると、汚染濃度がどの程度の空間的拡がりをもって輸送されるのかは不明である。ここでの計算例では、第ゼロステップの濃度観測値の平面的拡がり具合と、更に時間の経過とともに汚染領域が拡がることを考慮して $1x$ 、 $1y$ を与えた。この点については、例えば、 $1x$ 、 $1y$ をも未知数とした最尤推定法などで回避することも考えられる。AICの値はRun-12を除けば基本波長に依らず大差ないようである。最適項数は全ての場合に対して $(M,N)=(5,2)$ であった。なお、Run-4では $(M,N)=(8,1)$ と記しているが、AICの値そのものは $(M,N)=(5,2)$ と同じであった。参考の

ために計算したが、他の計算結果とあまり変わらなかった。

(2)観測雑音の影響:観測雑音レベルの大きいRun-7の推定値は他のRunに比べて悪い。

(3)初期値の倍率の影響:初期値が真値から離れるRun-6、9の推定結果が他の例に比べて悪い。

(4)次数の効果:表-2に共分散行列の例を示す。これによると、式(37)、(38)の補正関数から判るように、共分散行列の成分に掛かる係数が低波数程小さいので、本例ではあまり効果が見られないようである。次に推定結果については、流速の推定値はどの計算例でも悪い。分散係数の推定値は概ね良好である。濃度分布については、図-1(b)と(c)と比べると比較的良く合っている。次にパラメータの推定過程を図-2に示す。

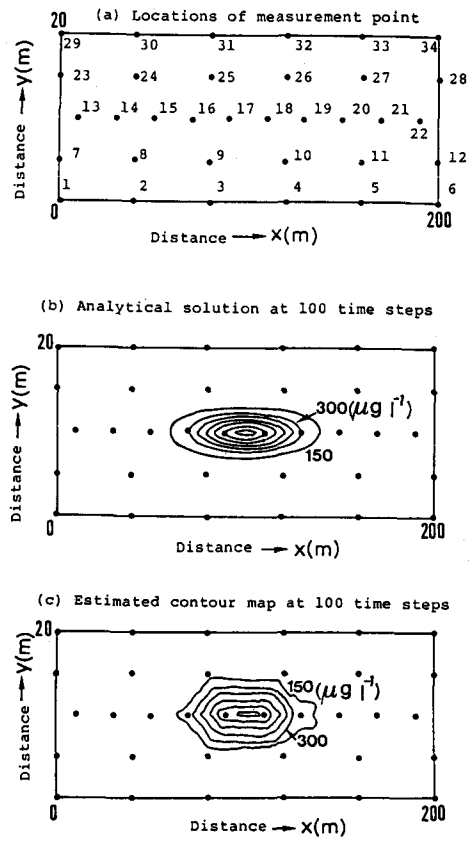


図-1 観測点配置と濃度推定状況

表-1 計算条件と計算結果

Run no.	基本波長(m)	ノイズ(μg/l)	AIC	(M,N)	初期値(倍率)	初期分散	次数	推定値
	$1x$	$1y$						u^* , D_{xx}^* , D_{yy}^*
*1	150	15	4.0	470.3 (5,2)	1.2	0.9	1	2.6 17.11 0.11**
2	210	21	1.0	" (")	0.6	0.5	"	-2.7 14.35 0.28
3	"	"	"	" (")	"	"	2	-2.4 12.76 0.31
4	240	24	"	" (8,1)	0.9	0.1	"	-0.4 6.57 0.10
5	250	25	"	" (")	"	"	"	発散
6	300	30	"	" (5,2)	1.5	1.0	"	発散
7	"	"	10.0	406.9 (")	"	0.1	"	-1.9 0.47 0.03
8	"	"	1.0	407.3 (")	0.9	"	"	-2.7 10.32 0.03
9	"	"	"	" (")	1.5	"	"	-1.8 0.03 0.13
10	"	"	"	" (")	0.6	"	"	-2.8 14.20 0.09
11	"	"	"	" (")	"	"	1	-3.0 16.06 0.10
#12	350	35	"	384.7 (")	0.9	"	2	0.8 15.13 0.45
13	"	"	"	407.3 (")	"	"	"	-3.8 14.36 0.09

時間刻み $\Delta t=0.05$ day、注入原点の位置 $x_0=-20.0$ m、注入時点 $T_0=8.0$ day
 *印 : 注入原点の位置 $x_0=10.0$ m、 $\Delta t=0.01$ day、**印 : 100step後、他は160step後の値
 #印 : 注入原点の位置 $x_0=-40.0$ m、注入時点 $T_0=16.0$ day、単位: ^{*} m/day、^{**} m²/day

表-2 共分散行列の計算例(Run -8, time step=160)

j	7	8	19	20	27	28	39	40	
係数	C_{01}	D_{01}	C_{21}	D_{21}	C_{31}	D_{31}	C_{32}	D_{32}	
*i	1	0.0	0.0	-0.10E3	-0.45E2	0.38E2	-0.42E2	0.23E3	-0.23E2
	3	0.0	0.0	-0.72E1	0.16E2	-0.10E2	-0.78E1	0.93E1	-0.82E2
	5	-0.81E-2	0.50E-1	-0.58E-2	0.13E-1	-0.14E-1	-0.11E-1	-0.48E-2	-0.47E-1

(*印: 1 ~ u, 3 ~ Dxx, 5 ~ Dyy)

(*印: 1 -- u , 3 -- D_{xx} , 5 -- D_{yy})

この例に示すように分散係数が収束しない場合もあり得るようである。次に、図-3には各観測点での濃度の予測誤差の時系列の例を示している。濃度そのものの値に比べると誤差は小さいが、濃度が高い地点では予測誤差に系統的なバイアスが見られる(観測雑音が大きくなるとバイアスは埋もれてしまう)。この様なバイアスは4.で述べたように、Fourier展開の項数の不足のために生じたものと考えられる。これは級数展開の基本波長の設定とも係わりを持つので今後の検討課題である。次に、パラメータの推定の状況を見るために表-3にゲイン行列及び各観測点の濃度予測誤差を示している。各観測点での予測誤差がパラメータ修正に及ぼす重みは、観測点の配置には無関係にどこでもほぼ同じである。一方、予測誤差は濃度の高い所で大きい。結果的には本計算例ではゲインと予測誤差に基づいた流速の推定はうまくいかなかった。これは、図-1からも判るように実際に濃度が感知されている観測点の個数が、34ヶの観測点のうち数ヶ所であって、フィルタリングによって流速を修正するための情報量が必ずしも十分でなかったことも考えられる。

7. 結び

本報ではパラメータのオンライン同定と濃度予測のアルゴリズムを中心に検討を行い、フィルタリングの特性を種々調べた。計算例では濃度の予測および分散係数の同定は概ね妥当であったが、流速の同定には問題が残った。この点については、よりロバストな推定法を確立したい。

参考文献:1)Gelb,A.(1974): *Applied optimal estimation*. The MIT Press

2)高橋琢馬、椎葉充晴、富澤直樹(昭和59年4月):統計的二次近似理論を適用した流出予測システムの構成、京大防災研究所年報第27号B-2,pp.255-273

3)Athans,M. Wishner,R.P. & Bertolini,A.(1968):Suboptimal state estimation for continuous-time nonlinear system from discrete noisy measurement. IEEE Trans. on AUTOMATIC CONTROL,AG-13 (5), pp.504-514

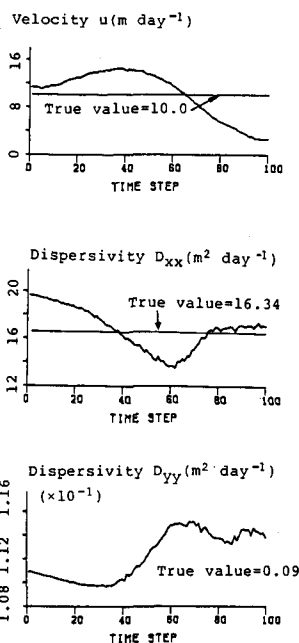


図-2 パラメータの推定状況(Run-1)

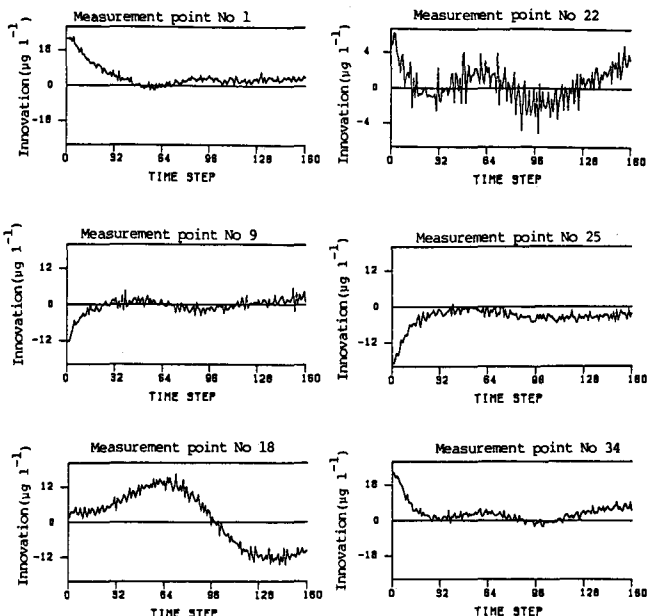


図-3 各観測点における予測誤差の例(Run-11)

表-3 ゲインおよび予測誤差の例(Run-2, time step = 60)

観測点番号 j		1	2	--	15	16	17	18	--	33	34
ゲイン	1	-0.18E-2	0.17E-3	--	0.19E-2	-0.33E-2	0.29E-2	-0.49E-2	--	0.14E-2	0.12E-2
	*1 3	0.11E-2	0.20E-1	--	0.31E-1	-0.46E-1	-0.11E-1	0.34E-2	--	0.55E-2	-0.26E-1
	5	0.45E-4	0.62E-4	--	0.85E-4	-0.91E-4	-0.11E-3	0.65E-4	--	0.42E-4	0.30E-4
予測誤差		0.22E1	0.70E0	--	-0.72E1	-0.15E2	-0.23E1	0.12E2	--	0.36E1	0.30E1

(*印: 1 -- u, 3 -- Dxx, 5 -- Dyy)