

カルマンフィルターによる揚水試験のオンライン解法の特性について

On-line Analysis of Pumping Test by Kalman Filters

九州大学 工学部 神野健二 上田年比古
九州産業大学 工学部 細川土佐男
国際協力事業団 安田裕
清水建設(株)技術研究所 三宅紀治 平野文昭

1. はじめに

観測井内の水位低下を経時観測して地盤の貯留係数や透水量係数を求めるいわゆる非平衡揚水試験で例えば、Theisの方法の場合には井戸関数をプロットしたグラフ上に、水位低下量 s と r^2/t (r は揚水井からの距離、 t は継続時間) の実測値のグラフを重ねて算定する図式解法が用いられる。この解法では求められたパラメータは、解析者の個人的判断や経験に左右されたり、グラフを作る際のプロットの誤差や水位の観測誤差の混入などが問題となることが多い。また、作業も簡単ではない。このような問題に対し最近、Chander, S. et al. (1981)¹⁾ や Sen, Z. (1984)²⁾ らは貯留係数や透水量係数のオンライン推定をフィルタ-理論を用いて解析する方法を提示している。彼らの方法は前出の問題に十分に対処できる方法として注目されている。本論文ではこれらの方法の概要を示すとともに種々の現場データに適用し、算定過程の特性や算定結果について検討を加えるものである。

2. オンライン解法

(2.1) オンライン解法について

よく知られているように、Theisの非平衡井戸公式は次式で与えられている。

$$s(t) = (Q/4\pi T) \cdot W[r^2 S/4Tt] \quad (1)$$

ここに、 S :貯留係数、 T :透水量係数、 r :揚水井からの距離、 s :水位低下量、 t :時間、 Q :揚水量
また、 $W[r^2 S/4Tt]$ は井戸関数で、 $u=r^2 S/4Tt$ とくと、

$$W[u] = -0.5772 - \ln(u) + u - u^2/(2 \cdot 2!) + u^3/(3 \cdot 3!) - u^4/(4 \cdot 4!) + \dots \quad (2)$$

である。ここでは一定の揚水量で揚水を開始し、揚水井から r だけ離れた地点にある観測井で時々刻々地下水位の低下量 s を測定しながら、式(1)を用いて貯留係数と透水量係数を逐次推定してゆく解法をオンライン解法ということにする。この解法では観測時に水位に観測雑音が混入した場合、このための誤差を除きつつ、最小2乗法の意味で最適な S や T を求めることができ、TheisやJacobの図式解法のように解析者の個人的な主観やデータのプロットミスに左右されることがないといえよう。また、観測井に自記水位計が設置されていて、計器からアナログあるいはデジタル信号を直接パソコンに入力することができれば、揚水試験中に貯留係数や透水量係数が逐次求められ、揚水試験の進行状況も現場で把握することができる。この解法はこれまでの揚水試験の実用的改良手段と考えられる。

オンライン推定にはフィルタ-理論が適用されていて、これに関する文献、出版物も多く見られる。ここでは、現場技術者にフィルタ-理論があまり馴染みがない場合も考慮して、Chander, S. らのオンライン解法を例にとってフィルタ-理論の基本的な考え方を説明する。

(2.2) Chander, S. らのオンライン解法¹⁾

TheisあるいはJacobの図式解法は式(1)で計算される地下水位低下量が実測の地下水位に、なるべく合うような S や T を求める方法である。オンライン解法では、ある S 及び T の下で式(1)により計算した水位低下曲線が、実測した水位低下曲線に最小2乗法の意味で合うようにしたいとき、 S や T をデータが入ってくるたびに逐次修正して求めてゆくものである。計算の過程は、まず① $S(t)$ や $T(t)$ に初期値を仮定する。地質ボーリングから地盤の S や T がどの程度の数値であるか大まかに推定できる場合には、これらを初期値とすれば収束も速いであろう。次に、②式(1)および式(2)に揚水井から観測井までの距離 r 、水位観測時間 t 、揚水量 Q の他に①で仮定した S および T を代入し、水位低下量の推定値 $\langle s(t) \rangle$ を計算する。③実際に観

測した水位低下量 $s(t)$ と $\langle s(t) \rangle$ との差(イノベーションということにする)

$$v(t) = s(t) - \langle s(t) \rangle \quad (3)$$

を計算する。④イノベーションにある定数(ゲイン行列)を掛けて、SやTを修正する。

$$\begin{bmatrix} \langle S(t+1) \rangle \\ \langle T(t+1) \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle S(t) \rangle \\ \langle T(t) \rangle \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{ゲイン行列} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{イノベーション} \end{bmatrix} \quad (4)$$

なお、ゲイン行列やこれを計算するために必要なSやTの推定誤差の共分散行列は時間ステップ毎に別途計算しておく。⑤再び②にもどる。このような計算を地下水位低下量が入手されるたびに繰り返して計算していくうちに、観測雑音のない水位低下曲線すなわち真の水位低下曲線に最もよく合う合理的な推定曲線が描ける。また、SやTの最適推定値も求めることができる。

式(1)からも判るように、同定したい貯留係数や透水量係数は水位低下量 $s(t)$ に対して非線形関数である。式(1)はフィルタ-理論を構成するのに必要な2つの式、すなわち「状態方程式」と「観測方程式」のうちの観測方程式に該当する。式(1)が非線形であることから「非線形観測方程式」である。このようなときには非線形フィルタ-理論を適用することが必要である。

Chander, S. らは式(2)の井戸関数 $W[u]$ の最初の4つの項を用いて、

$$\begin{aligned} s(t) &= (Q/4\pi T) [-0.5772 - \ln(r^2 S/4Tt) + (r^2 S/4Tt) - (1/4)(r^2 S/4Tt)^2] + w(t) \\ &= h(S, T; t) + w(t) \end{aligned} \quad (6)$$

とされている。ここに $w(t)$ は井戸関数 $W[u]$ の第5項以降を省略したことに対する近似誤差と、水位の観測に観測誤差が混入することを考慮して付加された雑音項である。通常はその度数分布が正規分布をすること、時間軸上では無相関であると仮定する。Chander, S. らは式(6)が非線形観測方程式であるため、拡張カルマンフィルタ-を適用している。

(2.3) Sen, Z. のオンライン解法²⁾

Chander, S. らの解法では式(6)に示すように、井戸関数の最初の4つの項を使用している。また、式(6)の[]に掛かる係数および[]内にはS、Tが非線形形で含まれている。このために彼らは非線形観測方程式をTaylor展開し、一次の項まで採用した拡張カルマンフィルタ-を用いている。従って、井戸関数の打ち切りの効果と、Taylor展開の高次項の省略の効果とがパラメータ推定に影響を及ぼすことが考えられる。これらの問題点を避けるために Sen, Z. は式(1)の対数を取り、

$$\log s(t) = -\log T(t) + \log W[u] + \log(Q/4\pi) \quad (7)$$

また、 $u = r^2 S/4Tt$ の両辺の対数を取り、

$$\log t = -\log T(t) + \log S(t) - \log u + \log(r^2/4) \quad (8)$$

と変形した。ここでSとTの対数変換値を状態変数 $X(t)$ とし、次のようにおく。

$$X(t) = [\log T(t), \log S(t)]' = [X_1(t), X_2(t)]' \quad (9)$$

したがって、式(7)、(8)は

$$\log s(t) = -X_1(t) + \log W[u] + \log(Q/4\pi) \rightarrow \log s(t) - \log W[u] - \log(Q/4\pi) = -X_1(t) + w_1(t) \quad (10)$$

$$\log t = -X_1(t) + X_2(t) - \log u + \log(r^2/4) \rightarrow \log t + \log u - \log(r^2/4) = -X_1(t) + X_2(t) + w_2(t) \quad (11)$$

ここで、アンダーラインの部分を変えて

$$Z_1(t) = \log s(t) - \log W[u] - \log(Q/4\pi), \quad Z_2(t) = \log t + \log u - \log(r^2/4), \quad Z(t) = [Z_1(t), Z_2(t)]' \quad (12)$$

$$\text{とおくと、式(10)、(11)から} \quad Z(t) = H(t)X(t) + w(t) \quad (13)$$

ここに、 $w(t)$ は成分 $w_1(t)$ 、 $w_2(t)$ を持つ観測雑音、Hは観測行列で

$$H = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

である。次に、式(9)の $X(t)$ の状態方程式は、SとTが一定値であることから、

$$X(t+1) = X(t) + v(t) \quad (\text{ここに } v(t) \text{ はシステム雑音で不要のときはゼロとする}) \quad (15)$$

以下に計算に必要な式と記号の意味を示す。観測データが入手される直前の最適推定値を $\langle X(t+1|t) \rangle$ とする。通常はシステム雑音を平均値0の正規性白色雑音と仮定するので、式(15)から最適推定値は

$$\langle X(t+1|t) \rangle = \langle X(t|t) \rangle \quad (16)$$

で計算される。このとき、時刻(t+1)での真値 $X(t+1)$ とは推定誤差が生じる。推定誤差の共分散行列を $P(t+1|t)$ とする。

$$P(t+1|t) = E[\{X(t+1) - \langle X(t+1|t) \rangle\} \{X(t+1) - \langle X(t+1|t) \rangle\}'] \quad (17)$$

水位が観測されて状態量 $\langle X(t+1|t) \rangle$ が修正され、新たに $\langle X(t+1|t+1) \rangle$ が求められると、これと真値 $X(t+1)$ との間の推定誤差の共分散行列 $P(t+1|t+1)$ は

$$P(t+1|t+1) = E[\{X(t+1) - \langle X(t+1|t+1) \rangle\} \{X(t+1) - \langle X(t+1|t+1) \rangle\}'] \quad (18)$$

ゲイン行列 $K(t)$ は、

$$K(t) = P(t|t-1)H'[HP(t|t-1)H' + R(t)]^{-1} \quad (19)$$

ここに、 $R(t)$ は式(13)の中に含まれている観測雑音の共分散行列である。

共分散行列 $P(t+1|t)$ と $P(t|t)$ との間には次の関係式がある。

$$P(t|t-1) = P(t-1|t-1) + V(t) \quad (20) \quad P(t|t) = [I - K(t)H]P(t|t-1) \quad (21)$$

ここに $V(t)$ は式(15)の中のシステム雑音 $v(t)$ の共分散行列である。イノベーション ν は、

$$\nu(t+1) = Z(t+1) - H \cdot \langle X(t+1|t) \rangle \quad (22)$$

したがって、 $\langle X(t+1|t) \rangle$ の修正値 $\langle X(t+1|t+1) \rangle$ は式(19)のゲイン行列 $K(t)$ とイノベーション $\nu(t)$ を用いて、

$$\langle X(t+1|t+1) \rangle = \langle X(t+1|t) \rangle + K(t) \cdot \nu(t+1) \quad (23)$$

なお、 $Z_1(t)$ および $Z_2(t)$ の中には $u = r^2 S / 4Tt$ が含まれ、従って、同定すべきパラメータ $S(t)$ 、 $T(t)$ を含んでいて、厳密には既知量ではない。実際には前の時間ステップでの最適推定値である $\langle S(t-1) \rangle$ と $\langle T(t-1) \rangle$ を用いて u を計算し、さらに $W[u]$ を計算してゆけばよい。参考文献2)にはゲイン行列、共分散行列などの各成分が示してあるので、パソコンで行列演算を行わない場合には、これらの成分毎に計算を実行すればよいであろう。ただし、これらの行列のディメンジョンは、ただだか 2×2 であるのでマトリックスの成分毎で計算するのが煩雑であれば、行列計算を行っても計算容量上は問題は無い。

以上が、Sen, Z. の解法であるが、このようにすれば非線形フィルターの取り扱いが必要でないこと、さらに井戸関数 $W[u]$ で高次の項を切り捨てなくてよく、計算精度および推定過程の安定性も確保できる。以上のような理由で本報ではSen, Z. のオンライン解法を用いることにする。なお、図-1には計算のフローチャートを示している。

3. 解析結果

(3.1) 解析例(1)

ここでは、参考文献3)に掲載してある揚水試験データにSen, Z. のオンライン解法を適用してみよう。表-1は同文献のデータにTheisおよびJacobの図式解法を適用した結果とオンライン解法を適用した結果とを示している。また、図-2にはNo.2の井戸へのTheisの図式解法の適用状況を示している。この方法では図中の合致点を解析者が定めて $W[u] \sim u$ の関係から S と T を求めてゆくが、 r^2/t が大きい区間、すなわち t が小さい期間と大きい期間の、どちらを使うべきか判断に迷うところである。

ここでは、図中の合致点を採用して、図中に示

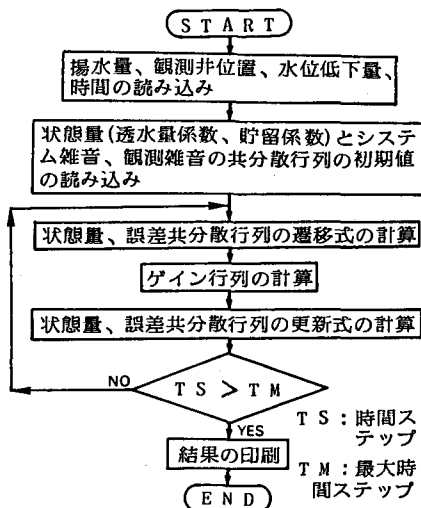


図-1 計算のフローチャート

表-1 適用結果(1)

〔不圧帯水層 揚水量 $Q=113 \text{ l/min}$ 〕

井戸 番号	観測井 位置(m)	Theisの方法		Jacobの方法(1)		Jacobの方法(2)		Kalman filter	
		T(m^2/s)	S	T	S	T	S	T	S
1	3.9	8.31E-2	8.18E-2	7.66E-2	1.47E-2	2.08E-1	2.26E-3	9.22E-2	1.34E-1
2	6.0	8.14E-2	4.89E-2	7.96E-2	6.47E-2	1.04E-1	1.04E-1	8.33E-2	1.28E-1
3*	9.8	7.27E-2	1.45E-1	8.30E-2	1.08E-1	6.24E-1	5.39E-5	9.23E-2	1.34E-1
4	17.7	6.61E-2	5.47E-1	9.85E-2	2.26E-1	7.30E-2	3.69E-1	1.02E-1	2.43E-1

* 井戸3のTheisの図式解法は参考文献3)による。

初期条件: $T=7.0\text{E-1}(\text{m}^2/\text{sec})$, $S=1.0$, 状態量の共分散行列の対角成分=100, 非対角成分=0.001

システム雑音、観測雑音の共分散行列の対角成分=0.01, 非対角成分=1.0E-6

した u と $W[u]$ の値から S と T を求めた。

表-1のJacobの方法(1)の結果は時間の1対数サイクル間の水位低下量を利用して S と T を求めた結果、(2)は水位低下曲線上の二つの観測時刻での水位の低下量から S 、 T を求めた結果である。これらの解法では、曲線のどの部分を利用するかによっての異なった値が得られる恐れがある。

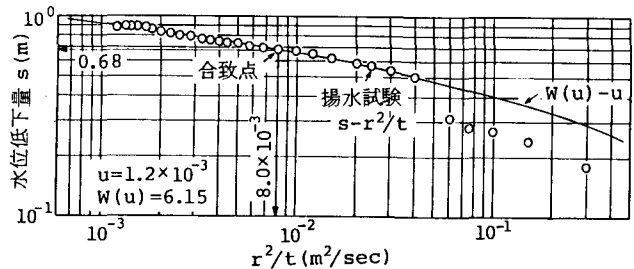


図-2 No.2の井戸のTheisの図式解法

次に、図-3および図-4は井戸3、4についてのフィルタ-理論による算定過程を示している。井戸4は井戸3に比べて揚水井から遠いため、水位低下が小さくて遅い。そのためか、 S 、 T の収束状況も井戸3に比べて遅いようである。これらの図の水位低下量～時間の曲線を見ると、フィルタ-理論では2. で述べたように最小2乗法によって理論曲線が推定されている様子が判る。なお、図中には S と T の推定誤差分散の時間変化を示している。したがって、 S 、 T の推定曲線及び分散の曲線を利用すると、どの程度の時間でパラメータの収束値が得られるかが判る。井戸3ではおよそ5ステップ、時間にして10分足らずで収束値が得られている。また、井戸4の推定結果は、この井戸が揚水井からの距離が遠いためか他の井戸に比べて推定状況があまり良くないようで、およそ15ステップ、時間にして2時間程度で収束値が得られている。以上の解析結果では、観測井の位置の設定が推定精度および推定値を得るまでの時間に影響を及ぼすようである。

(3.2)解析例(2)

表-2は都市域の沖積平野で行われた揚水試験データにTheisの図式解法とフィルタ-理論によるオンライン解法を適用したものである。対象の帯水層は被圧帯水層である。

表-2 適用結果(2)

ケース	対象地質	不圧or被圧	観測井番号	観測井位置(m)	揚水量(l/min)	孔径(mm)	Theisの方法		Kalman filter		初期値	
							T(m^2/min)	S	T	S	T(0)	S(0)
1	レキ混り砂層	被圧	No.1	31.2	963	600	3.26E-1	0.99E-2	3.26E-1	1.13E-2	1.0E-1	5.0E-3
			2	128.0	"	"	3.33E-1	2.91E-2	4.05E-1	2.26E-2	1.0E-1	4.0E-1
2	砂層	被圧	No.1	26.8	74	306	8.70E-3	2.12E-4	8.52E-3	1.74E-4	1.0E-1	1.0E-1
			(2回目)		52	"	7.16E-3	2.20E-4	7.19E-3	1.33E-4	"	"
3	砂層	被圧	No.1	55.0	1391	550	3.26E-1	4.84E-2	4.67E-1	2.23E-2	1.0E-1	5.0E-3
			2	94.1	"	"	3.38E-1	3.46E-2	6.46E-1	1.19E-2	"	2.0E-3
			3	109.6	"	"	2.71E-1	2.63E-2	5.71E-1	0.80E-2	"	1.5E-5
4	砂層	被圧	No.1	57.2	462	550	1.71E-1	2.63E-2	1.71E-1	2.85E-2	"	3.0E-2
			2	110.0	"	"	1.33E-1	3.13E-2	1.15E-1	2.64E-2	"	5.0E-2

この結果をみると、オンライン推定値は Theis の図式解法による解析結果とよく一致している。また、揚水量が大きくしかも揚水井からの距離が近い方が、そうでない場合に比べて推定状況が良いようである。図-5、6にはケース1のNo.1およびケース3のNo.1井戸の推定状況を示している。図-6は図-5に比べて観測井が揚水井から離れているためか収束があまりよくないようである。しかし、さらに揚水試験を続けるといずれは収束するものと考えられる。

(3.3)解析例(3)

前出の解析例ではある都市の沖積平野を対象としたが、ここでは、種々の地盤(上から、長崎県、広島県、佐賀県、および沖縄県での実績データ)についてオンライン解法を適用した。解析結果をみると、前出の解析結果と同様な特性が得られていて、揚水井から観測井までの距離が離れている場合あるいは、特殊な状況がなければ、オンライン解法で合理的なパラメータの推定が可能である。

4. 結び

以上の適用例をみて、本報で述べたオンライン解法は客観的にしかも水位低下の観測とともに時々刻々パラメータの推定が可能である。従って、この方法が揚水試験で活用されれば、揚水試験の期間の短縮、ひいては経費の節減に大きく寄与するものと考えられる。今後は、井戸公式が適用困難な状況に対して、どのようなフィルタリングを行えばよいか検討を加えたい。

参考文献

- 1) Subhash Chander, Prakash N. Kapoor, and Sushil K. Goyal: Aquifer Parameter Estimation Using Kalman Filters, ASCE, IR1, pp.25-33, March 1981
- 2) Zekai Sen: Adaptive Pumping Test Analysis, Jour. of Hydrology, 74, pp.259-270, 1984.
- 3) 山村和也、鈴木音彦: 土と水の諸問題、鹿島出版会、pp.44-46、昭和52年

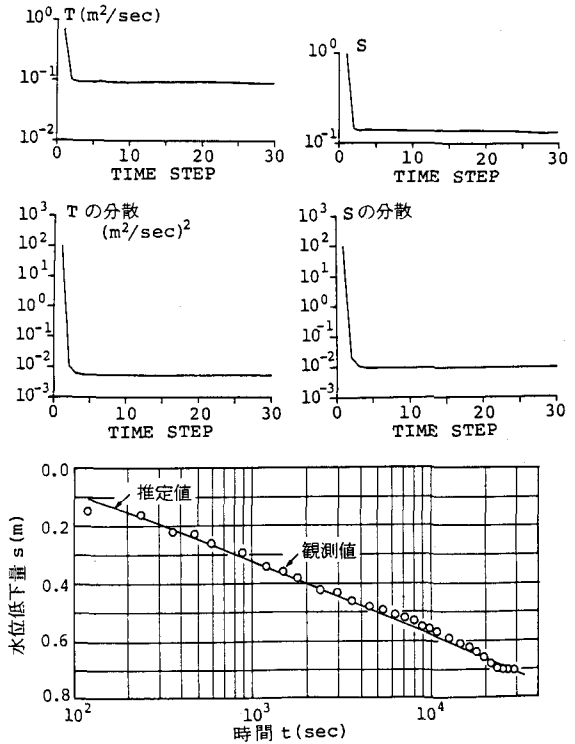


図-3 No. 3井戸の推定状況

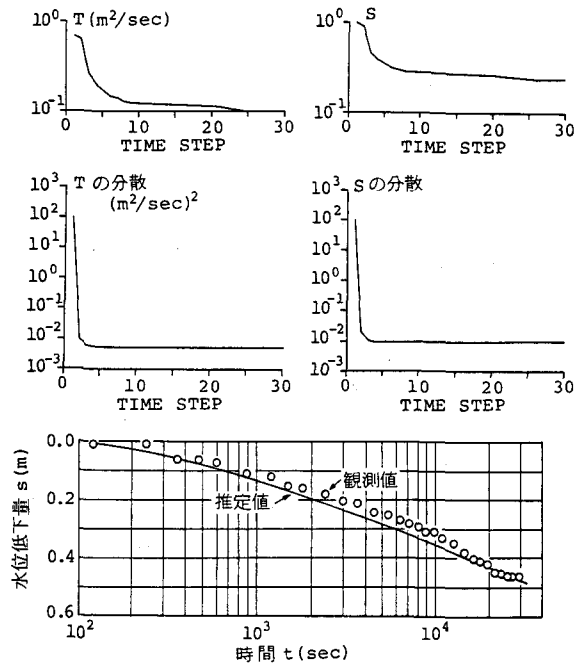


図-4 No. 4井戸の推定状況

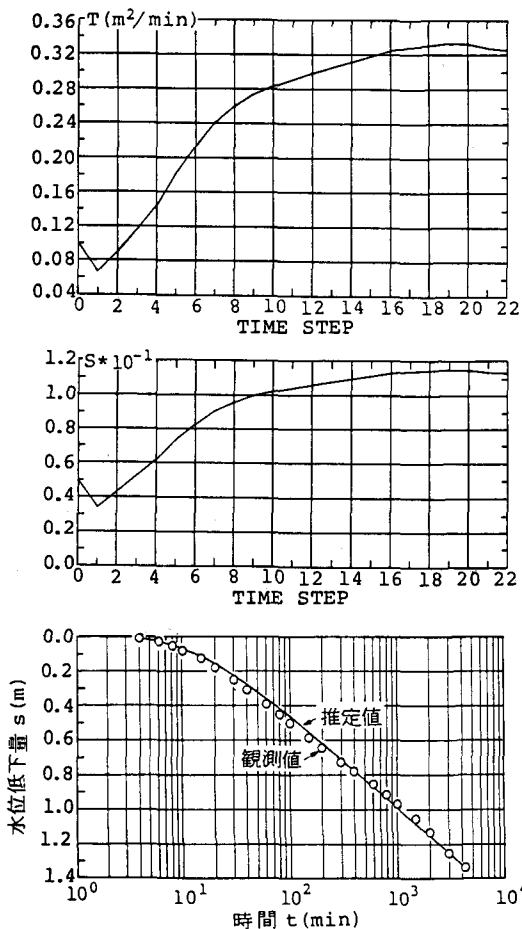


図-5 ケース1-No.1井戸の推定状況

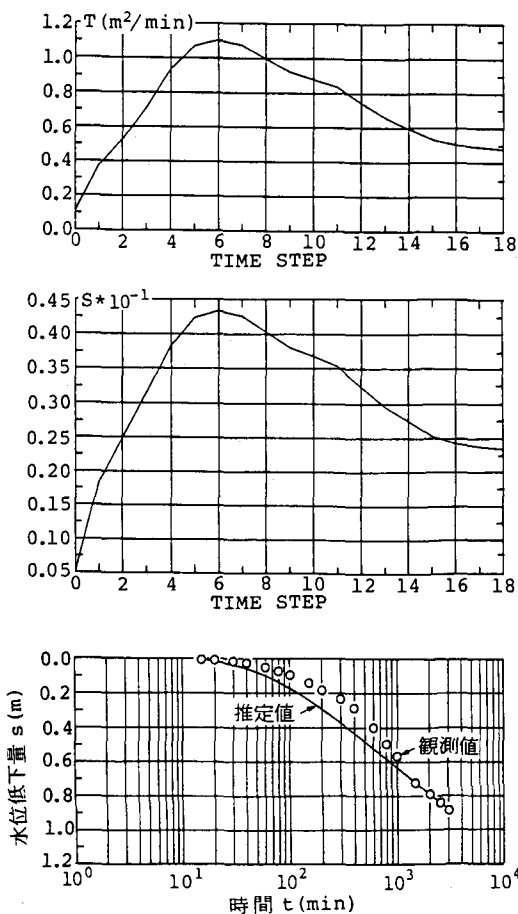


図-6 ケース3-No.1井戸の推定状況

表-3 適用結果(3)

対象地質 不圧 / 被圧	観測井 位置(m)	揚水量 (ℓ/min)	孔径 (mm)	Theisの方法		Jacobの方法		Kalman filter	
				$T(\text{m}^2/\text{sec})$	S	T	S	T	S
砂質頁岩、被圧 離島扇状地 キレン多	2.0	60	150	$2.7\text{E-}4$	$5.6\text{E-}3$	$4.6\text{E-}4$	$1.4\text{E-}3$	$4.2\text{E-}4$	$1.8\text{E-}3$
玉石混り砂レキ 不圧、内陸部扇状地	2.0	94	75	$2.4\text{E-}3$	$2.5\text{E-}3$	$2.1\text{E-}3$	$3.8\text{E-}3$	$2.5\text{E-}3$	$2.3\text{E-}3$
風化花崗岩、不圧 沖積平野	10.0	39	116	$5.2\text{E-}4$	$7.7\text{E-}3$	$6.6\text{E-}4$	$6.6\text{E-}3$	$1.0\text{E-}3$	$1.8\text{E-}3$
レキ混りシルト、 不圧、離島扇状地	3.0	13	200	$5.4\text{E-}5$	$3.6\text{E-}3$	$5.4\text{E-}5$	$3.2\text{E-}3$	$1.0\text{E-}4$	$0.2\text{E-}3$

謝辞

本論文を書くにあたり、日頃共に地下水問題について勉強会をしている、八千代エンジニアリング(株)九州支店および(株)建設技術研究所福岡支社の方々に御助言、御協力をいただきました。ここに記して心より感謝いたします。