

溪流を模擬した開水路流れの水面形遷移と抵抗則に関する研究

Studies on the Transition of Subcritical Flow, Supercritical Flow,
Chutes & Pools and the Resistance Law

防衛大学校 土木工学教室 正員 池内 正幸
防衛大学校 土木工学教室 正員 山田 正
防衛大学校 村上 良宏

1. 研究の目的

河床波を伴う移動床上の流れにおいては常流、射流時に現われる河床形態のほかに部分的に跳水を伴ういわゆる chutes and pools (C & P) あるいは河床形態が存在することが知られている(1)。これに対して本研究は一般的な水路床形状を有する開水路流れに発生する常流、射流、C & Pの遷移境界と抵抗則を明らかにすることを目的としたものである

2. 水面形に関する理論解析

本研究で対象とする流れの概要と記号は図.1に示されている。ここに、 $S(x)$ は河床の平均河床面からのずれ、 $h(x)$ はその点での水深、 h_0 , v_0 はそれぞれ上流一様水深部での水面の変位および平均流速、 $\zeta(x)$, $v(x)$ はそれぞれ x 点での水面変位および平均流速を示す。このとき、流れの基本式としては、(1)式で与えられる連続式と、水面に対して適用した Bernoulliの定理式(2)である。次に(1),(2)式により v を消去すると(3)式を得る。

(a) 微小振幅波の場合：ここでいう微小振幅波とは、水深に比べて河床の変位が小さい $|\zeta - S|/h_0 < 1$ …(4)の場合である。このとき(3)式は簡単になり、(5)、

(6)式となる。ここにフルード数 Fr は、(6)式のように上流側一様水深部の水理量で定義されている。

(5)式からわかるように、微小振幅河床波の場合には、 $(h_0 + \zeta - s)/h_0 = h/h_0 = y$, $s/h_0 = \eta$ …(7)常流と射流の2水面形のみが存在することがわかる。

(b) 有限振幅河床波に場合：(i) エネルギー損失を無視した場合：この場合には(3)式そのものを扱わなければならない。ここでは(3)式を V_0 で割り、次に(7)式に示す無次元量を用いると、無次元水深 y に関して3次式(8)式を得る。このとき $f(y)$ は一般に図.2に示す形状をしている。 $\eta=0$ の平坦河床の場合には $f(y)=0$ を満たす図中の A, B2点が必要存在し、これらが射流と常流の水深に対応している。しかし、上流側のフルード数 Fr_0 が同じでも η がある値より大きくなっていくと A, B2点は存在しなくなる。この場合が本研究で主張する C & Pに相当している。図.3は(8)式の代数方程式の2実根を求め河床波高 η をパラメータとして描いた $y-Fr$ のグラフである。この図より同一の η でもあるフルード数の範囲には水面(y)が存在しない

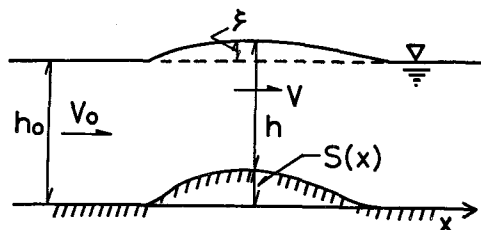


図.1 流れの概要と記号の定義

$$V_0 h_0 = V(h_0 + \zeta - s) \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$1/2g \cdot V_0^2 = 1/2g \cdot V^2 + \zeta \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$V_0^2 \left[1 + (\zeta - s)/h_0 \right]^{-2} + 2g\zeta = V_0^2 \quad \dots\dots (3)$$

$$\zeta = s(x) / (1 - Fr_0^{-2}) \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$Fr_0 = V_0 / \sqrt{gh_0} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$f(y) = y^3 - (1 + 1/2 Fr_0^2 - \eta) y^2 + 1/2 Fr_0^2 = 0 \quad \dots\dots (8)$$

い領域があることがわかる。あるいは同様の図であるが 図.4はフルード数をパラメータとして描いた $y-\eta$ の図である。この図より同一のフルード数でも η がある値より大きくなると対応する水深が存在しなくなることがわかる。このように水面形が存在しなくなる限界波高がC & Pの発生限界になっている。これは (8)式の3次代数方程式の2根(A,B) が存在しなくなる場合であることから、この条件を導くことは容易にできる。まず、(8)式は一般に $y^3+ay^2+c=0$ の形に書けるが、 $x=y+a/3$ の変数変換により、

$$x_1=u+v, x_2=\omega u+\omega^2 v, x_3=\omega^3 u+\omega v \dots (9)$$

となる。ここで (9)式の3根を(x_1, x_2, x_3)のすると3次式に関するカルダノ公式(9)より

$$x^3+a_1x+b_1=0 \dots (10)$$

と表わせる。ここに

$$a=-(1+1/2 \cdot Fr^2 \cdot \eta), c=1/2 \cdot Fro^2, a_1=-1/3 \cdot a^2, b_1=2/27 \cdot a^3+c$$

$$\omega=\exp(2\pi i/3), u=\sqrt[3]{-b_1/2+\sqrt{R}}, v=\sqrt[3]{-b_1/2-\sqrt{R}}, R=b_1^2/4+a_1^3/27 \dots (11)$$

である。ここで (9)式が3実根をもつ必要十分条件は、(11)式であるが、これは(12)式と同じであり、(13)式となる。よって、(14)式より、(15)式を得る。(15)式が3実根を有する条件となる。上述のように (8)式が3実根を有する条件は、常流と射流の水面形が存在する条件であることから(16)式 (で等号を用いた) で表わされる曲線がC & Pへの遷移限界を示す (一つの) 曲線である。この場合はエネルギー損失を無視しているので射流からC & Pへの遷移限界を与える式とみなせよう。(ii)エネルギー損失を考慮した場合：このときは (2)式のかわりに(17)式を用いる。ここに Δh は損失水頭を表わす。この場合も上記と同様の解析を行なうと、(16)式に代わって(18)式を得る。この場合にはエネルギー損失を考えていることより、(18)式はC & Pから射流の水面形への遷移限界を表わしていると言える。なお(16)式あるいは(18)式 (と等価な式) は芦田(5)により段落ち部の水理現象において、段落ち部直上において限界水深を生じる条件 (等号の場合) として与え

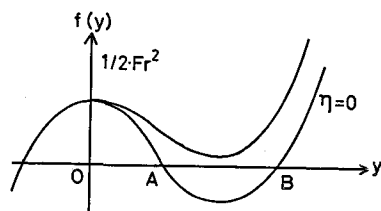


図.2 $f(y)$ の一般的な形状

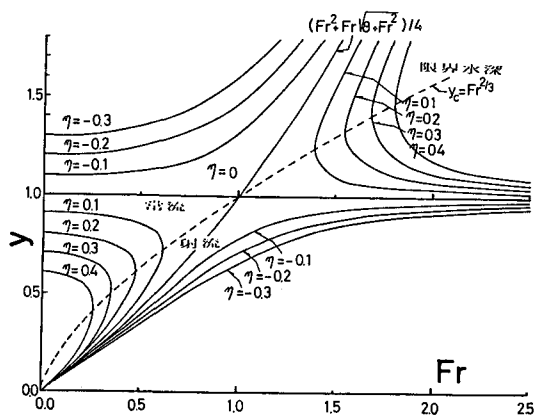


図.3 η をパラメータとした y - Fr の関係

$$R < 0 \dots (12) \quad a^3 < -27/4 \cdot c \dots (13)$$

$$(1+1/2 \cdot Fr^2 \cdot \eta)^3 > 27/8 \cdot Fro^2 \dots (14)$$

$$\eta < 1+1/2 \cdot Fro^2 \dots (15)$$

$$\eta < 1+1/2 \cdot Fro^2 - 3/2 \cdot Fro^2/3 \dots (16)$$

$$1/2g \cdot Vo^2 = 1/2g \cdot V^2 + \zeta + \Delta h \dots (17)$$

$$\eta < 1+1/2 \cdot Fro^2 - h/h_0 \dots (18)$$

$$\Delta h = (h_1 - h_0)^3 / (4h_1 h_0) \dots (19)$$

$$\Delta h/h_0 = \frac{(\sqrt{1+8Fro^2}-3)^3}{16(\sqrt{1+8Fro^2}-1)} \dots (20)$$

$$\eta < 1+1/2 \cdot Fro^2 - 3/2 \cdot Fro^2/3 - \frac{(\sqrt{1+8Fro^2}-3)^3}{16(\sqrt{1+8Fro^2}-1)} \dots (21)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 2(1+1/2 \cdot Fro^2 - \eta) = 0 \dots (22)$$

$$y_c = 2/3 \cdot (1+Fro^2 - \eta) \dots (23)$$

$$\eta = 1/2 (\sqrt{1+8Fro^2} - 1) \dots (24)$$

られている。本研究のように言わば連続した段落ちがある場合には、波形底部を過ぎたあたりに限界水深があるときでも波頂に登るときに射流水深から限界水深を再び切るために跳水が発生し射流が続くことはない。よって(16)式あるいは(18)式は芦田の扱った場合の一般化として射流の水面形からC & P、あるいはC & Pから射流の水面形への遷移限界を与える式として解釈される。

ところで(18)式では Δh を評価して与えなければならない。ここでは跳水によるエネルギー損失のみを考えてみた。一般に跳水前後の水深を h_0 , h_1 、エネルギー損失を Δh とすると、よく知られているように Δh は(19)式で与えられる。この両辺を h_0 で割り、上流側のフルード数で表わすと、(20)式を得る。この式で与えられる $\Delta h/h_0$ を(18)式に代入して、(21)式を得る。なお損失を考えていないとき、限界水深 h_c は(8)式を用いると(22)式で与えられ、結局(23)式となり、これは周知の公式に等しい。以上の結果を図示したのが図.5である。図中の曲線(a)は(16)式、(b)は(21)式、(c)は(15)式を意味する。(15)式は(8)式が根を持つ必要条件より、(15)式を満たさない場合には根がない一水面が存在しない(実際には堰上げ背水となる)。(d)は上流が射流で下流で跳水があったときに跳水後の水深が河床波の波高と等しくなる条件で導いた(24)式で与えられる。

3. シュート&プールの抵抗則

ここでは波長 λ の正弦波のような周期的な水路床を有する固定床開水路で生じるC & Pの水面形が発生しているときの抵抗則を検討した。まず水平床上に単一の障害物が存在し、これにより跳水が発生しているときの状況を考える(図.6)。

このとき h_1 と h_2 には跳水の関係が成立し、

$$h_2/h_1 = -1/2 + 1/2 \cdot \sqrt{1 + 8Fr_0^2} \quad \dots (25)$$

を得る。一方頂上では限界水深が生じているので、上記の解析結果(23)式より

$$h_c = 2/3 (1 + 1/2 \cdot Fr_0^2 - \eta) h_1 \quad \dots (26)$$

である。ここに $Fr_2 = V_2/\sqrt{gh_2}$ である。一方 I-III間でのエネルギー損失 Δh を求めると

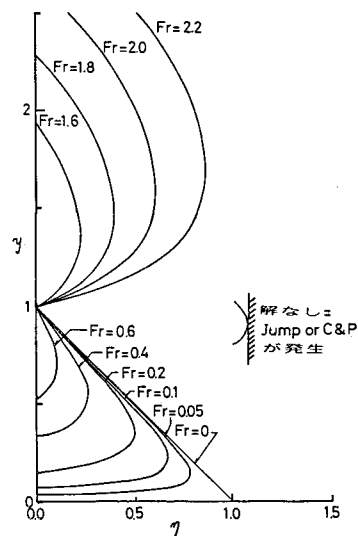


図.4 上流のフルード数をパラメータとした γ - γ 関係

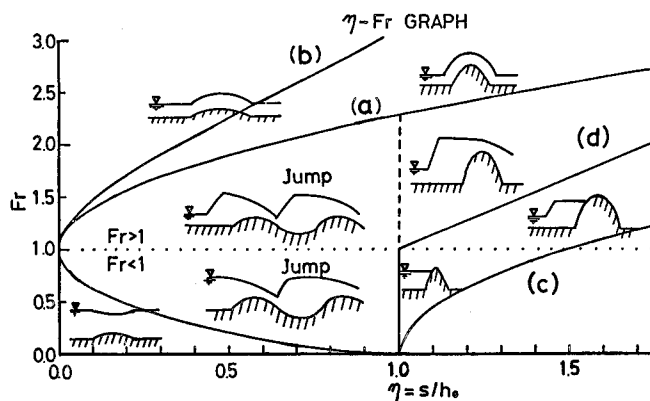


図.5 各種水面形の出現領域図

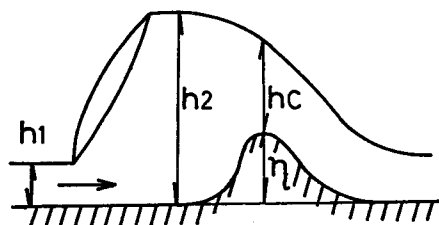


図.6 突起により生じる水面形

$$\Delta E = (h_1 + V_1^2 / (2g)) \dots (27)$$

$$- (nh_1 + h_c + V_1^2 / (2g))$$

であるが、これに上記(26)式の関係代入すると、若干の計算の後、

$$\Delta E = 1/2 \cdot h_1 Fr_1^2 \times$$

$$\{1 - 1/2(\sqrt{1 + Fr_1^2} - 1)^{-3}\} \dots (28)$$

を得る。これを波長 l 間でのエネルギー損失とみなし、摩擦損失係数 f' の形で評価すると、

$$\Delta E = f' (l/h_1) V_1^2 / (2g) \dots (29)$$

より

$$f' = \{1 - 1/2 \cdot (\sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 1)^{-3}\} h_1 / l \dots (30)$$

を得る。(30)式より Fr が十分に大きいときには $f' \rightarrow h_1/l$ に漸近していることがわかる。

4. 実験および理論との比較

本研究で用いた実験水路は幅50cm、長さ14mであり、ここに波長53cm、片振幅2.5cmの正弦形状をしたアクリル製水路床を設置している。このとき発生する水面形や、水面形遷移に関しては著者らの文献(2)に詳述されているのでここでは省略し、その結果のみを示し、本理論との比較検討を行なう。図.7は、射流→C&Pへの遷移限界を示す(16)式とC&Pから射流の水面形への遷移限界を表す(21)式と上記実験結果を示している。図中の Δ 、 $\circ$ はそれぞれの水面形の遷移時のものであり、 $\square$ 、 $\blacksquare$ はC&Pの水面形が安定に存在しているときのものである(図中には著者らの移動床実験

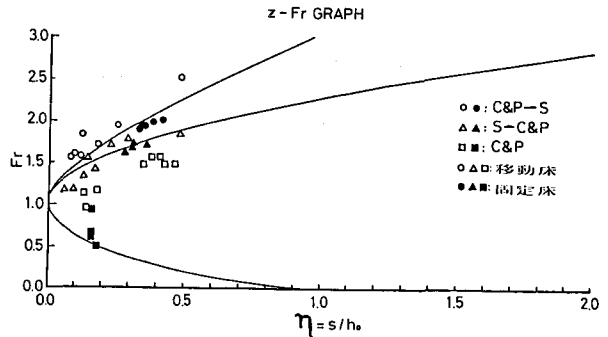


図.7 $Fr - \eta$ に関する実験と理論解の比較

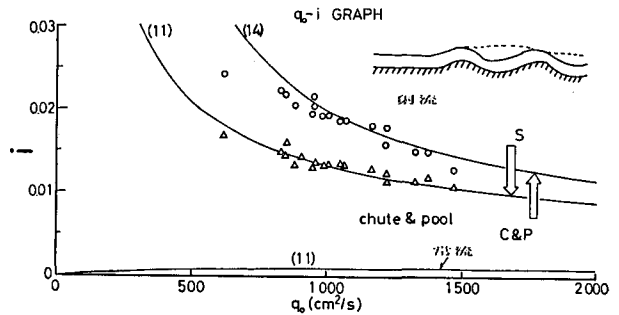


図.8 流量-勾配関係で表示したC&P出現領域と実験値の比較

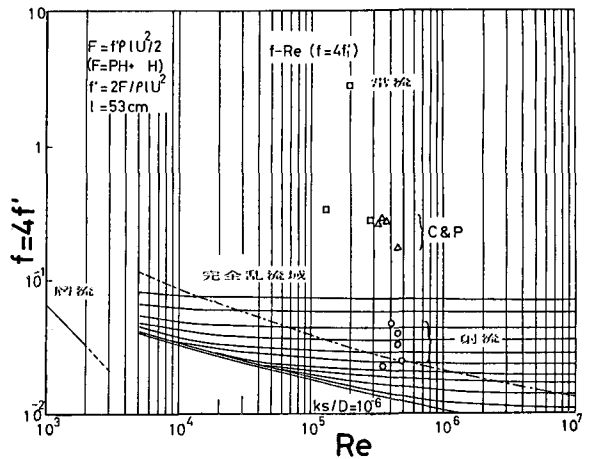


図.9 抵抗係数-レイノルズ数関係

の結果も併記している)。この図より、本研究の理論結果はおおむね実験の傾向を表わしていると言えよう。さらに、上流一様水深部の平均流速は、平均水深 h_0 、水路勾配 i_0 、摩擦損失係数 f' を用いて $V_0 = 2g/f' h_0 i_0$ とかける。上流側フルード数は $Fr_0 = V_0/\sqrt{gh_0} = \sqrt{2g/f'} \sqrt{h_0 i_0} / \sqrt{gh_0} = \sqrt{2/f'} \sqrt{i_0}$ と表わせることから

$$i_0 = Fr_0^2 f' / 2 \quad \dots\dots\dots (31)$$

一方単位幅流量 q_0 は $q_0 = v_0 h_0 = \sqrt{2g/f'} \sqrt{h_0 i_0} \cdot h_0$ と表わせることより、

$$q_0 = V_0 h_0 = \sqrt{gh_0^3} Fr_0 \quad \dots\dots\dots (32)$$

が成立する。図.8は、図.7と同一の内容を(31),(32) 式の関係を用いて表示したものである。図中の実験値は、射流→C & P、C & P→射流の水面形遷移時のものを示しているが、この図より i_0 - q_0 表示においても本理論は水面形遷移とその履歴現象を正しく表わしていることがわかる。図.8より、水面形遷移においては勾配が一定のとき、同一の流量において遷移するのではなく、2倍弱程度異なった流量において遷移が始まることがわかる。さらに図.8より、底面に凹凸をもつ水路では常流が現われるためには、水路の平均勾配は相当小さくしなければならないことがわかる。本実験の水路では、装置の関係上、完全な上流の水面形を得ることはできなかった。(b) 抵抗について：ここでは、既述の実験装置において、底面のアクリル板に直径1mm の孔を31個あけ、このときのピエゾ水頭を傾斜マノメータにより測定し、位置水頭を除いて圧力水頭を測定した。一方せん断応力に関しては、外径1mm の注射針を曲げてプレストン管とし、このときの総圧と上記の静圧との差からせん断応力を評価した。本研究において問題としているのは局所的な抵抗則ではなく、一波長間の平均的な抵抗特性である。よってここでは以下の式で定義される抵抗係数を用いて、常流、射流、C & P時の抵抗則を検討した。

$$F = f' \rho l U^2 / 2 \quad \dots\dots\dots (33)$$

ここに、 l :正弦波の一波長(本実験では53cm)、 v :常流一様水深部の水深、 F :一波長にわたる底面せん断応力と圧力の流れ方向成分の積分値、 f' :一波長平均の抵抗係数である。(33)式中の F を求めるに当たっては、 p と τ の流れ方向成分を求め、これを積分の台形公式に基づき一波長区間の流れ方向の力、 F をもとめている。図.9はこのとき得られた流れのレイノルズ数($Re = 4q/\nu$: q は単位幅流量)と抵抗係数 f' の関係を示している。この図より常流とC & Pの f' は射流時のものに比べ25倍程大きい値をとっていることがわかる。なお、跳水を伴わない常流とC & Pの f' が同程度の値をとることにに関して、常流では剥離に起因した抵抗の増大が跳水に起因するエネルギー損失と同程度になっていることによるのであろう。図.10 は上記の実験で求めた f' と既述の理論解(30)式をマンニングの粗度係数に換算し、比較したものである。この図より、マンニングの粗度係数にしても射流C & Pでは約5倍の値の差が生じており、かつ、(30)式はC & Pの抵抗特性を概ね表わしていることがわかる。

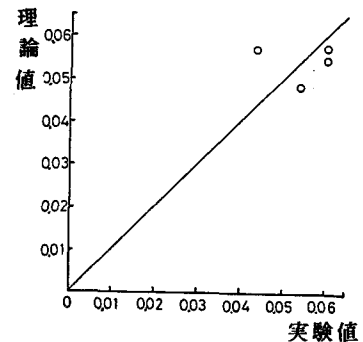


図.10 マンニングの粗度係数の理論解と実験値の比較

6. 結 論

本研究で得られた結論は以下のようである。

- (1) 常流、射流、C & Pの遷移限界を定める理論解析の結果は実験とよく一致する。
- (2) 射流とC & Pの遷移に存在する履歴現象は、跳水によるエネルギー損失を考慮することによって説明づけられる。
- (3) 射流とC & Pの遷移限界では同一勾配において2倍程度流量に違いがある。
- (4) C & P時のマンニングの抵抗係数は射流時に比べて5倍大きい。
- (5) C & P時の抵抗、エネルギー損失は射流の抵抗に跳水による損失を加えることによって実験値を概ね説明し得る。

おわりに 本研究は文部省科学研究費試験研究（代表：吉川 秀夫教授、早稲田大学）の補助を受けて行われたものである。ここに記して謝意を表わす。

参考文献

- (1) Simons, D.B. and Sentiirk, F.: Sediment Transport Technology, Water Resources Pvb1., Fort Collins, Colo., U.S.A., 1977.
- (2) 山田正, 池内正幸, 堀江良徳: 不規則底面をもつ開水路流れに関する研究, 第28回土木学会水理講演会論文集, pp.149-155, 1984.
- (3) 山田正, 池内正幸, 堀江良徳: 固定床不規則底面をもつ開水路流れに関する研究, 第38回年次学会学術講演会講演概要集第2部, pp.605-606, 1984.
- (4) Jaeger, C.: Engineering Fluid Mechanics, Blackie & Son, pp.157-171, 1956.
- (5) 芦田和男: 開水路断面急拡部の水理に関する研究(2) - 段落ち部の水理, 建設省土木研究所報告, 第105号, pp.133-156, 1960.
- (6) Robill, L. and Kennedy, J.F.: Some Experimental Observations on Free Surface Shear Flow over Awary Boundary, Proc. 12th Congress of IAHR, Fort Collins, 1967.
- (7) Iwasa, Y. and Kennedy, J.F.: Free Surface Shear Flow Over Awary Bed, Proc. ASCE, HY2, 1968.
- (8) 石原藤次郎, 志方俊之: 開水路急拡部の水理学的性状に関する研究, 土木学会論文集, 第128号, pp.12-28, 1966.
- (9) 例えば、応用数学便覧, p.14, 丸善.