

非定常降雨による斜面流の伝播時間

Time of Concentration of Overland Flow for Unsteady Rainfall

神戸大学工学部 正員 神田 徹
神戸大学大学院 学生員 前田 徹哉

1. まえがき

合理式における重要パラメータとして、また流出機構の表現のための有効な概念として、洪水到達時間が古くから用いられ、論じられていることは周知の通りである。特に、石原・高棹¹⁾、角屋・福島²⁾の研究は洪水到達時間に関する理論的基礎を与え、実証的展開に導く先駆的研究としてその意義は深い。その後、観測資料の蓄積とともに種々の特性が明らかにされつつあるが³⁾、それらをより統一的な知見とするためには、定義を含めて基本的な点においても検討の余地が残されていると思われる。例えば、本研究で取り扱う洪水到達時間(本論では洪水伝播時間と呼んだ)と降雨の非定常性(降雨強度の時間的变化)の関係についても、高棹、角屋らは詳細な検討の上である仮定(あるいは近似)を置いて論じているにもかかわらず、その結果が用いられた後の多くの報告ではその仮定(近似)についての十分な考慮のあとが見られない気がする。これは筆者の浅学の故であるかもしれないが、本研究を進めた1つの動機はここにある。

降雨強度変化がピーク流出特性にいかなる影響を及ぼすか、この点に関して、単一斜面において三角波形成降雨に対する雨水擾乱の伝播時間を定義し、その伝播時間と降雨変動および斜面パラメータとの関係の導いて定常降雨に対する伝播時間と比較するとともに、ピーク流出量の推算式についても基礎的な検討を加える。

2. 雨水擾乱の伝播に関する基本事項

2.1 洪水伝播時間

斜面流に対するkinematic waveモデルの基礎方程式は次式で表される。

$$\partial h / \partial t + \partial q / \partial x = r \quad (1) \quad h = k q^p \quad (2)$$

ここに、 h :水深、 q :単位幅流量、 $r = r(t)$:全斜面にわたり一様な有効降雨強度、 k 、 p :定数

$$\text{境界条件: } h(0, t) = q(0, t) = 0 \quad (3) \quad \text{初期条件: } h(x, 0) = q(x, 0) = 0 \quad (4)$$

(1)、(2)式に特性曲線法を適用し、斜面の最上流端($x=0$)から最下流端($x=b$)まで積分すれば

$$b = \frac{1}{p k^{1/p}} \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{t_1}^u r dt \right)^{(1-p)/p} du \quad (5)$$

ここに、 b :斜面長、 t_1 、 t_2 :特性曲線の最上流端での出発時刻、最下流端での到着時刻

最下流端($x=b$)での水深および流出量は、次式で与えられる。

$$h_{x=b} = \int_{t_1}^{t_2} r dt \quad (6) \quad q_{x=b} = \left(\frac{1}{k} \int_{t_1}^{t_2} r dt \right)^{1/p} \quad (7)$$

さて、最下流端での流出量が最大値をとるときの雨水擾乱の伝播時間、すなわち特性曲線の出発から到着までの時間を洪水伝播時間と定義する。

$$t_p \equiv t_{2p} - t_{1p} \quad (8)$$

ここに、 t_{1p} 、 t_{2p} はそれぞれ、 $x=0$ での特性曲線の出発時刻、 $x=b$ での到着時刻で、 $t_2 = t_{2p}$ において流出量は最大値(q_p)をとる。この t_{1p} 、 t_{2p} 、従って t_p は次のようにして求めることができる。

まず、(6)式を微分してゼロとおけば、流出量ピークの条件が次のように与えられる。

$$\left(\frac{d t_1}{d t_2} \right)_{t_2=t_{2p}} = \frac{r(t_{2p})}{r(t_{1p})} \quad (9)$$

(9)式の右辺は、 $r(t)$ が与えられれば t_{1p} 、 t_{2p} の関数である。

つぎに、(5)式および(5)式を t_2 で微分した式の各々について $t_1 = t_{1p}$, $t_2 = t_{2p}$ とおけば、これらの2式と(9)式から t_{1p} , t_{2p} および t_p が得られる。

2. 2 平均降雨強度、ピーク流出量

任意の特性曲線に対する出発時刻と到着時刻の間の平均降雨強度を r_m , 洪水伝播時間内の平均降雨強度を $r_{m,p}$ とする。すなわち、

$$r_m = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} r dt \quad (10) \quad r_{m,p} = \frac{1}{t_{2p} - t_{1p}} \int_{t_{1p}}^{t_{2p}} r dt = \frac{1}{t_{2p} - t_{1p}} \int_{t_{1p}}^{t_{2p}} r dt \quad (11)$$

ピーク流出量は次式で与えられる。

$$q_p = \left(\frac{1}{k} \int_{t_{1p}}^{t_{2p}} r dt \right)^{1/p} = \left(\frac{r_{m,p} t_p}{k} \right)^{1/p} \quad (12)$$

特に、次式の関係：

$$\int_0^b r dx = r_m b \quad (13)$$

が成り立つ場合には、(9)式の関係、洪水伝播時間、ピーク流出量はそれぞれ次のようになる。

$$\left(\frac{dt_1}{dt_2} \right)_{t_2=t_{2p}} = \frac{r(t_{2p})}{r(t_{1p})} = 1 \quad (14)$$

$$t_{p,0} = k b^p / r_{m,p}^{1-p} \quad (15)$$

$$q_{p,0} = r_{m,p} b \quad (16)$$

なお、(13)式が成り立つのは、定常降雨： $r = r_0 = \text{const}$ (p 値に無関係)と線形流出： $p = 1$ (降雨の定常、非定常に無関係)のいずれかの場合である。

3. 三角波形降雨に対する洪水伝播時間

降雨強度の時間変化が、図-1に示すような三角波形であるとする。すなわち、有効降雨継続時間が T_0 の対称な波形で、ピーク降雨強度が r_p である。この降雨に対して (5)式は次のように表わされる。

$$b = \frac{1}{p k^{1/p}} \left(\frac{r_p}{T_0} \right)^{(1-p)/p} \left\{ \int_{t_1}^{T_0/2} (t^2 - t_1^2)^{(1-p)/p} dt + \int_{T_0/2}^{t_2} (-t^2 + 2T_0 t - \frac{1}{2}T_0^2 - t_1^2)^{(1-p)/p} dt \right\} \quad (17)$$

ここに、 $t_1 \leq T_0/2$, $t_2 \geq T_0/2$

$r_{m,p}$ および q_p は、(11), (12)式からそれぞれ次のように与えられる。

$$r_{m,p} = \frac{r_p}{t_p T_0} (-t_{2p}^2 + 2T_0 t_{2p} - \frac{1}{2}T_0^2 - t_{1p}^2) = r_p \left(1 - \frac{T_1^2 + T_2^2}{t_p T_0} \right) \quad (18)$$

ここに、 $T_1 = T_0/2 - t_{1p}$ (19)

$$T_2 = t_{2p} - T_0/2 \quad (20) \quad (t_p = T_1 + T_2)$$

$$q_p = \left(\frac{r_p}{k T_0} \right)^{1/p} (-t_{2p}^2 + 2T_0 t_{2p} - \frac{1}{2}T_0^2 - t_{1p}^2)^{1/p} \quad (21)$$

(9)式は次のように与えられる。

$$\left(\frac{dt_1}{dt_2} \right)_{t_2=t_{2p}} = \left(\frac{T_0 - t_{2p}}{t_{1p}} \right) \quad (22)$$

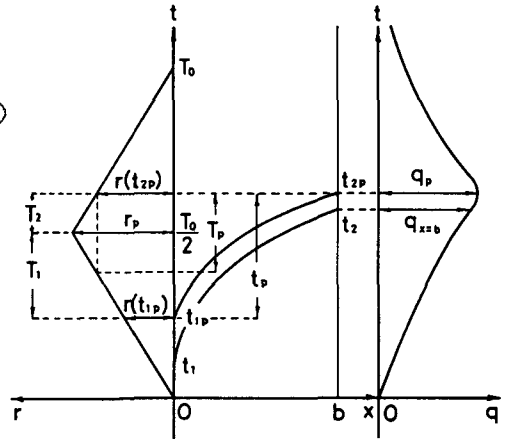


図-1 記号の説明

(i) $p=1$ の場合

上記の(17)~(22)式および, $dt_1/dt_2=1$ から, 以下の関係式が得られる.

$$t_2 - t_1 = kb \quad (23) \quad t_p = t_{2p} - t_{1p} = kb \quad (24)$$

$$t_{1p} = (T_0 - kb)/2 \quad (25) \quad t_{2p} = (T_0 + kb)/2 \quad (26)$$

$$T_1 = T_2 = kb/2 \quad (27) \quad t_p/T_p = 1.0 \quad (28) \quad \text{ここに, } T_p \equiv 2T_2 \quad (29)$$

$$r_{m,p} = r_p(1 - \frac{kb}{2T_0}) \quad (30) \quad q_p = r_{m,p}b = r_pb(1 - \frac{kb}{2T_0}) \quad (31)$$

(ii) $p=2/3$ の場合

(17)式の積分を行い, $t_1 \rightarrow t_{1p}$, $t_2 \rightarrow t_{2p}$ とし, (19), (20)式の T_1 と T_2 を用いれば次式を得る.

$$\begin{aligned} & (m-m^2)^{1/2} - \left(\frac{1}{2}-m\right)^2 \ln\left\{\left(\frac{1}{2}+\sqrt{m-m^2}\right)/\left(\frac{1}{2}-m\right)\right\} - \left(\frac{1}{2}-n\right)(m-m^2+n-n^2)^{1/2} \\ & - \left(\frac{1}{4}+m-m^2\right) \left[\sin^{-1}\left\{\left(\frac{1}{2}-n\right)/\left(\frac{1}{4}+m-m^2\right)^{1/2}\right\}\right. \\ & \left. - \sin^{-1}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)/\left(\frac{1}{4}+m-m^2\right)^{1/2}\right\}\right] - \frac{4k^{3/2}b}{3r_p^{1/2}T_0^{3/2}} = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

$$\text{ここに, } m = T_1/T_0 \quad (33) \quad n = T_2/T_0 \quad (34)$$

(17)式を t_2 で微分し, $t_1 \rightarrow t_{1p}$, $t_2 \rightarrow t_{2p}$, $dt_1/dt_2 \rightarrow (dt_1/dt_2)_{t_2=t_{2p}}$ とおき, (22)式を用いると次式を得る.

$$\begin{aligned} & (m-m^2+n-n^2)^{1/2} - \left(\frac{1}{2}-n\right) \left[\ln\left\{\left(\frac{1}{2}+\sqrt{m-m^2}\right)/\left(\frac{1}{2}-m\right)\right\}\right. \\ & \left. - \sin^{-1}\left\{\left(\frac{1}{2}-n\right)/\left(\frac{1}{4}+m-m^2\right)^{1/2}\right\} + \sin^{-1}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)/\left(\frac{1}{4}+m-m^2\right)^{1/2}\right\}\right] = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

(32), (35)式を解けば m , n が得られ, t_{1p} , t_{2p} , t_p が得られる.

また, $r_{m,p}$ および q_p はそれぞれ, (18), (21)式 ($p=2/3$) で与えられる.

(iii) $p=1/2$ の場合

(17)式の積分を行い, $t_1 \rightarrow t_{1p}$, $t_2 \rightarrow t_{2p}$ とおけば次式となる.

$$\frac{1}{12}T_0^3 - \frac{1}{2}T_0^2 t_{2p} + T_0 t_{2p}^2 + \frac{2}{3}t_{1p}^3 - t_{1p}^2 t_{2p} - \frac{1}{3}t_{2p}^3 - \frac{k^2 b T_0}{2r_p} = 0 \quad (36)$$

(17)式を t_2 で微分し(22)式を用い, (19), (20)式の T_1 と T_2 で書き直せば,

$$T_1^2 - 2T_1 T_2 - T_2^2 = 0 \quad (37) \quad \therefore T_1/T_2 = \sqrt{2}+1 \quad (38)$$

つまり, T_1/T_2 は k , b , r_p , T_0 に関係なく, 一定値 (≈ 2.414) をとる. 従って次式となる.

$$t_p = \sqrt{2}T_1 = (2+\sqrt{2})T_2 \quad (39)$$

$$t_p/T_p = t_p/(2T_2) = 1+\sqrt{2}/2 (\approx 1.707) \quad (40)$$

(36)式に(38)式の関係代入すれば, T_1 , T_2 および t_p に関する次式が得られる.

$$\frac{16(\sqrt{2}-1)}{3}m^3 - 2m^2 + \frac{k^2 b}{r_p T_0^2} = 0 \quad (41)$$

$$\frac{16(2\sqrt{2}+3)}{3}n^3 - 2(2\sqrt{2}+3)n^2 + \frac{k^2 b}{r_p T_0^2} = 0 \quad (42)$$

$$\frac{4(2-\sqrt{2})}{3}\left(\frac{t_p}{T_0}\right)^3 - \left(\frac{t_p}{T_0}\right)^2 + \frac{k^2 b}{r_p T_0^2} = 0 \quad (43)$$

$r_{m,p}$ は (18)式から

$$\begin{aligned} r_{m,p} &= r_p\{1 - (2-\sqrt{2})t_p/T_0\} = 2r_p(T_0 - t_{2p})/T_0 \\ &= r(t_{2p}) \end{aligned} \quad (44)$$

また, q_p は (21)式 ($p=1/2$) で与えられる.

(iv) $p=1/3$ の場合

$p=2/3$ の場合と同様にして、次式の関係が得られる。

$$\frac{8}{5}m^5 + (3n - \frac{5}{2})m^4 - (6n-1)m^3 + (2n^3 - 3n^2 + 3n)m^2 - (2n^3 - 3n^2)m + \frac{3}{5}n^5 - \frac{3}{2}n^4 + n^3 - \frac{k^3 b}{r_p^2 T_0^3} = 0 \quad (45)$$

$$3m^4 - 2(4n+1)m^3 - 6(n^2-n)m^2 + 6n^2m - n^4 + 2n^3 = 0 \quad (46)$$

(45), (46)式を解けば m, n が得られ、 t_{1p}, t_{2p}, t_p が得られる。

また、 $r_{m,p}$ および q_p はそれぞれ、(18), (21)式 ($p=1/3$) で与えられる。

4. 計算結果

4.1 $t_p/T_0, m, n, T_1/T_0$ と降雨・斜面パラメータとの関係

$p=1, 2/3, 1/2, 1/3$ に対して、

$$d = \frac{k b}{T_0} (p=1), \quad \frac{k^{3/2} b}{r_p^{1/2} T_0^{3/2}} (p=2/3), \quad \frac{k^2 b}{r_p T_0^2} (p=1/2), \quad \frac{k^3 b}{r_p^2 T_0^3} (p=1/3) \quad (47)$$

とおき、 $t_p/T_0, m (=T_1/T_0), n (=T_2/T_0), T_1/T_2$ と d の関係を上記の式から求めた結果が図-2である。 d の増加とともに m, n は増大するが、両者の比 T_1/T_2 は $p=1, 1/2$ に対しては一定値をとり、 $p=2/3, 1/3$ では d とともに、それぞれ減小、増大する。特に $p=2/3$ のとき、 $m \rightarrow 0.5, n \rightarrow 0.5$ となり $T_1/T_2 \rightarrow 1$ となる。すなわち、 m あるいは n が 0.5 に近い値をとるときには非線形効果が消失する。また、一般に p 値の減小とともに T_1/T_2 は 1 よりかなり大きい値をとり、Manning 式に対応する $p=0.6$ では数値計算によれば $T_1/T_2=1.6 \sim 1.9$ 程度の値である。⁴⁾

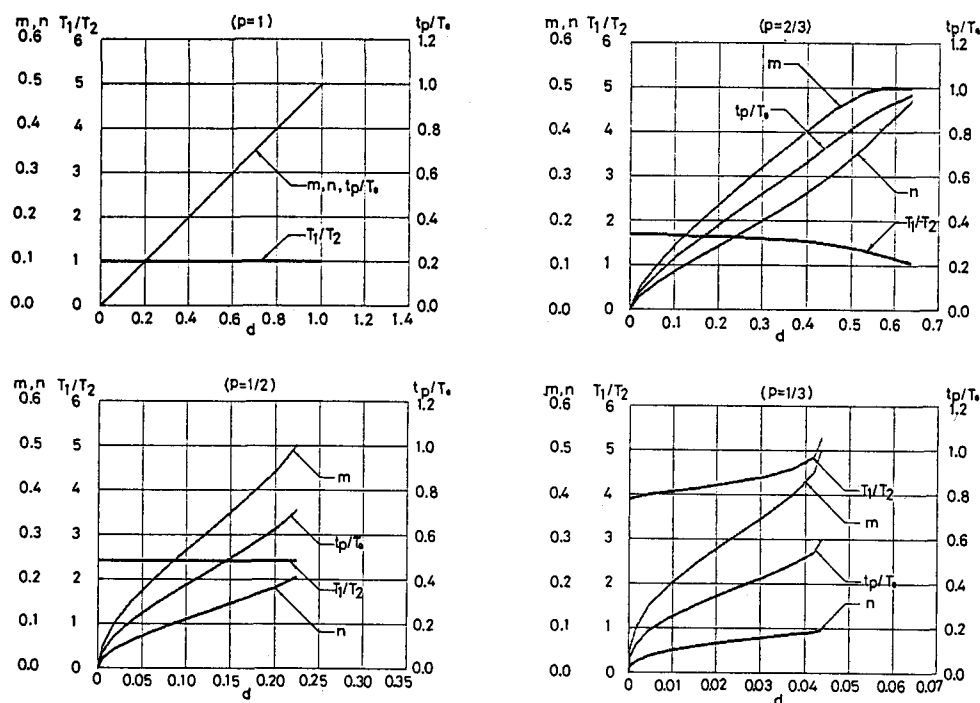


図-2 $t_p/T_0, m, n, T_1/T_2 \sim d$ の関係

4.2 t_p と r_p の関係

t_p と r_p の関係を T_0 , $k^{1/p}b$ をパラメータとして図-3に示す。 $k^{1/p}b$ の値を一定とすると、 p が1に近ければ(24)式から明らかに t_p は r_p , T_0 に関係しないが、 p が1より小さくなるとともに r_p の増大にともなう t_p の減小が強くなり、また r_p , T_0 のある値で包絡線からプロットがはずれて t_p が大きくなる。その包絡線は定常降雨の $t_{p,0}$ ((15)式)と同じく直線である。この直線からプロットがはずれる度合は、降雨強度の時間変化率、例えば r_p/T_0 によるのではなく、 m あるいは n に関係している。すなわち、 m あるいは n が大きくなるほど直線からはなれて大きい値をとる。これは、降雨継続時間に占める洪水伝播時間の割合が増加するほど、洪水伝播時間内の平均降雨強度が减小するためであろう。

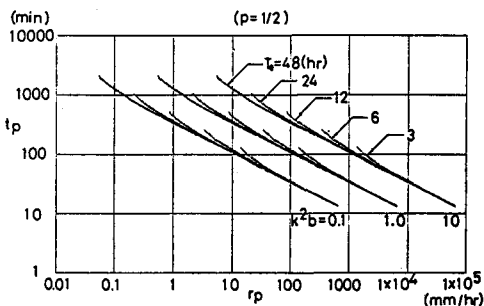


図-3 $t_p \sim r_p$ の関係

4.3 t_p と $r_{m,p}$ の関係

上述のような平均降雨強度の差異による影響を除くために、 t_p と $r_{m,p}$ の関係を調べると図-4のようである。一定の $k^{1/p}b$ に対してほぼ一直線に並ぶプロットが得られ、 T_0 の影響は極めて少ない。従って、降雨強度として $r_{m,p}$ を用いれば定常降雨に対する(15)式と類似の関係が成立つと考えられる。図中の直線は(15)式($r_{m,p}=r_0: \text{const}$)を示す。

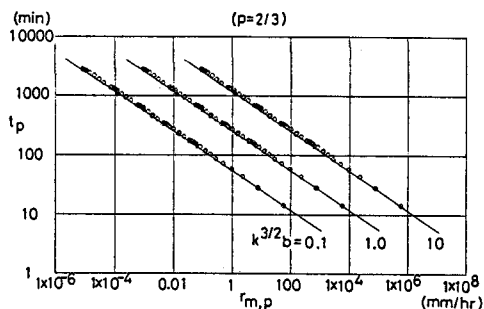


図-4 (1) $t_p \sim r_{m,p}$ の関係

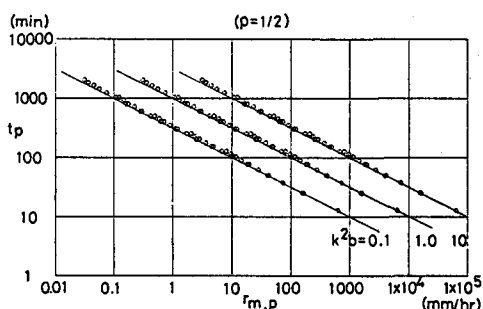


図-4 (2) $t_p \sim r_{m,p}$ の関係

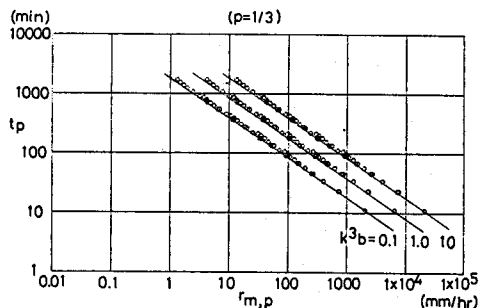


図-4 (3) $t_p \sim r_{m,p}$ の関係

(15)式に対する近似度を定量的に知るために、 t_p と $t_{p,0}$ の差：

$$e_t = (t_p - t_{p,0}) / t_{p,0} \quad (48)$$

を示したものが図-5である。 e_t は m あるいは n のみに関係し、 $p=2/3$ の場合を除いて m (または n)が増大するほど大きくなる。 $p=2/3$ の場合は図-2に示したように m が0.5に近い値をとるとき非線形性が弱くなるので、 e_t はピーク値をとった後に減小する。総体的には、 t_p は $t_{p,0}$ よりも最大15%程度大き

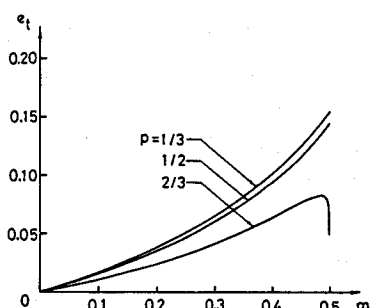


図-5 $e_t \sim m$ の関係

い値をとるが、 m が0.5よりかなり小さければその差は数パーセントであり、 t_p については(15)式の関係が近似的に成り立つ。

4. 4 ピーク流出量について

ピーク流出量は(12)式(または(21)式)で与えられるが、その値が(16)式の $q_{p,0}(=r_{m,p}b)$ によってどの程度近似できるかをしらべるために次の差をとる。

$$e_q = (q_p - q_{p,0}) / q_{p,0} \quad (49)$$

この e_q は(48)式を用いると

$$e_q = (t_p / t_{p,0})^{1/p} - 1 = (1 + e_t)^{1/p} - 1 \quad (50)$$

となる。従って、 e_t と同様に e_q は m の値に関係する。また、 p が1より小さい値をとるほど e_q が増大する傾向は、 e_t と p 値の関係に見られるよりも顕著である(図-6)。 m の値によっては $p=2/3$ でも e_q は10%を超える大きさとなるので、一般にピーク流出量は $q_{p,0}$ (いわゆる合理式)によっては高精度で近似されない。

$q_p > q_{p,0}$ となることを次の図で示そう。ハイドログラフの立ち上がりから逓減部までの各時刻における流出量 $q_{x=b}$ と $r_m b$ (ここに、 $q_{x=b}$ は(7)式の流出量、 r_m は(10)式の平均降雨強度)の関係をプロットしたものが図-7である。それらのプロットはループを描き、流出量の増加時は $q_{x=b} > r_m b$ で、ピークを過ぎた後に $q_{x=b} = r_m b$ となり、逓減部は $q_{x=b} < r_m b$ である。流出量ピークにおいて $q_p > q_{p,0}(=r_{m,p}b)$ であることは明らかで、これは前述したピーク流出量発生時の特性曲線の性質： $T_1 > T_2$ によるものである。

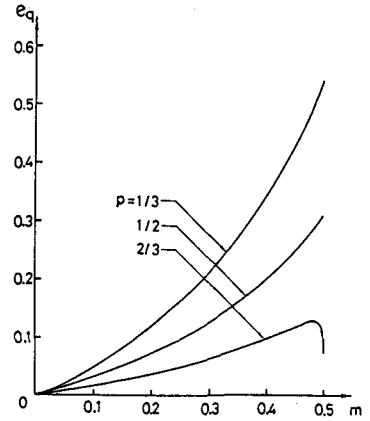


図-6 $e_q \sim m$ の関係

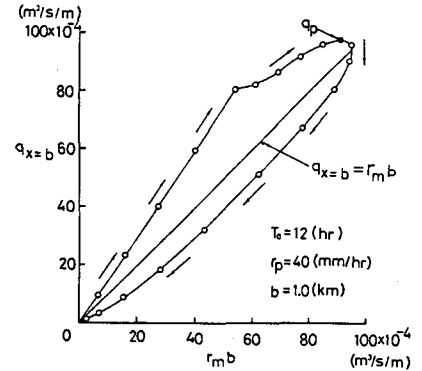


図-7 $q_{x=b} \sim r_m b$ の関係

5. 結 語

一様な幅の斜面を対象として、ピーク流出特性に及ぼす降雨強度変化の影響を検討した。ピーク流出量が発生する特性曲線について上・下流端間の雨水擾乱の伝播時間を洪水伝播時間と定義し、その値を降雨変動および斜面パラメータの関数として算定した。洪水伝播時間は降雨強度のピークを挟んで前より位置し、ピーク以前の時間と以後の時間の比は一般に一定ではない。洪水伝播時間の長さと平均降雨強度との関係は、それに等しい定常降雨強度との関係とほぼ変わらないが、降雨継続時間に占める伝播時間の割合の増加とともに両者の間に差が生ずる。また、洪水伝播時間と同様に、ピーク流出量は定常降雨に対するピーク流出量よりも大きい値をとり、非定常降雨についてはいわゆる合理式の関係は厳密には成立しない。以上のような降雨強度変化の影響は、流出過程の非線形性を規定する p の値が1より小さくなるほど強くなる。

終わりに、本研究の計算において御助力を頂いた神戸大学学生、元木沢知紀君に謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 石原藤次郎・高埴琢磨：単位図法とその適用に関する基礎的研究，土木学会論文集，60号別冊3-3, 1959.
- 2) 角屋 陸・福島 晟：中小河川の洪水到達時間，京大防災研年報，19号B-2, 1976.
- 3) 吉野文雄・吉谷純一・堀内輝亮：都市流出モデルのパラメータ標準化と評価，水理講演会論文集, 1985.
- 4) 神田 徹・前田徹哉・大坂祐造：洪水到達時間に関する一考察，土木学会関西支部年講, 1985.