

透水量係数の空間分布および2次元確率微分方程式の自己回帰係数の推定

Estimation of Spatial Distribution of Transmissivity and Autoregressive Parameters of Two-dimensional Stochastic Differential Equation

九州大学工学部 正員 神野健二

九州大学工学部 正員 上田年比古

鹿児島県庁 正員 鶴田明寛

清水建設技術研究所 正員 平野文昭

1. はじめに

透水量係数や貯留係数などの水文地質パラメータは空間的にランダムに分布する確率変数として取り扱うほうが現実的であると同時に、揚水試験等による観測値にもかなりの観測誤差が混入していることも考慮されるべきであろう。したがって従来のように観測値をそのまま用いたり、あるいはブロック毎に観測値を代表させて地下水流動を解析する場合には、期待値としての地下水位は算定されても、計算結果にどの程度の推定誤差が含まれているのか不明である。また、広領域の地下水流動は本来時・空間確率過程として捉えたほうが合理的であると考えられる。以上の観点から著者らは地下水流動の解析に有限要素法とカルマンフィルター理論を適用することを試みているが¹⁾、実際にこの方法を適用するためには透水量係数等の空間分布の構造、統計的特性、観測誤差特性が明らかにされていることが必要である。本研究では透水量係数の観測値をもとに上述の点について検討を加えるとともに、従来より透水量係数の空間分布式として用いられている楕円型確率微分方程式の係数推定法を考察したものである。

2. Fourier級数による透水量係数の空間分布の表現

図-1に本報の対象領域の地質分布と観測地点を示す。また、表-1には観測値を示している。透水量係数の観測値は $10^{-5} \sim 10^{-2}$ (m²/sec)の範囲にある。従って直接これらの数値を取り扱うよりも、対数変換して統計的性質を調べるほうがよいと考えられる。また、原田らによる濃尾平野北東部の調査例²⁾でも透水量係数が対数正規分布をすることが報告されていることから、ここでも透水量係数の対数変換値を考えることにする。21個の観測値から次に示すtrendを求めた：

$$\text{trend}; \langle \ln T(x, y) \rangle = -0.873 + 0.477 \cdot x + 0.494 \cdot y - 0.065 \cdot x^2 - 0.020 \cdot y^2, \quad (x, y \text{ は km 単位}) \quad (1)$$

$$Y(x, y) = \ln T(x, y) - \langle \ln T(x, y) \rangle \quad (2)$$

ここに $\ln T(x, y)$ は透水量係数 $T(x, y)$ の対数変換値である。

次に、式(2)の $Y(x, y)$ をFourier級数に展開する：

$$Y(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [a_{mn} \sin f(x, y) + b_{mn} \cos f(x, y)] \quad (3-1)$$

$$f(x, y) = (2\pi m x / l_x + 2\pi n y / l_y) \quad (3-2)$$

ここに、 l_x, l_y はそれぞれ x, y 方向の基本波長である。

2.1 赤池の情報量基準(AIC)によるFourier係数の最適項数の決定

無数に存在する未知のFourier係数を有限個の観測値から推定することが必要であるが、観測点の空間配置上の制約から全ての係数を求めることは不可能である。しかしながら、一般に高波数成分は低波数

alluvium diluvium
tertiary biotite-granite

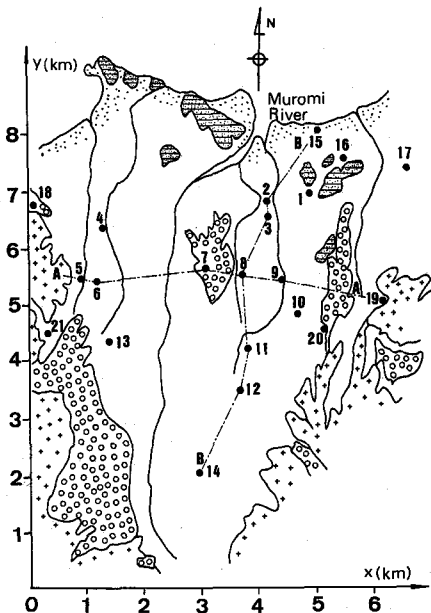


図-1 地質概要と観測点

成分に比べてレベルが低いと考えられることから低波数成分から順次 Fourier係数を求めればよいと考えられる。ここではFourier係数の項数の決定に、赤池の情報量基準(AIC)を用いる³⁾： $AIC=K \cdot \ln(\sigma^2)+2\theta$ (4)

ここに、K:データ数、 θ :パラメータ数 $=2(M+1)(N+1)-2$ 、M、N:mおよびnの項数、 $\sigma^2:Y(x,y)$ の推定誤差の分散である。最小2乗法ではパラメータ数はデータ数よりも少なくなければならぬから、 $\theta < K$ を満たすFourier係数の項数の全ての組合せに対してそれぞれAICを計算する。なお、 θ の計算式で定数2を引いたのはtrendの値を既に差し引いていて、したがってこれに対応する a_{00} 、 b_{00} は算定する必要がないためである。

2.2 現地への適用結果および考察

表-2に推定残差の分散及びAICの算定結果を示す。この場合、式(3)に含まれる基本波長 l_x 、 l_y をいずれも7.0kmとしている。これは、図-1に示す観測点がほぼ、7.0km四方の領域に含まれていることから仮定したものである。表-2によれば、 $(M,N)=(3,1)$ のときにAICは最小値6.91となり、この場合の最適項数となっている。なお、 $l_x=l_y=4.0$ kmとした場合、AICの最小値は8.3、 $l_x=l_y=15.0$ kmとした場合にはAICの最小値は12.1で、いずれも $(M,N)=(3,1)$ であった。したがって、これらの3ケースのうちでは $l_x=l_y=7.0$ kmのときにAICは最小となり、一応以下の検討でもこの l_x 、 l_y の値を基本波長として用いた。このように基本波長の値によって最適項数は変らないが、AICおよび残差分散の値が変わることが判り、 l_x 、 l_y をも含めた非線形の最適化によってこれらも推定することがより良いと考えられるが、ここでは簡単な線形の最小2乗法による Fourier係数推定を行った。

次に、式(3)において $m=0 \sim M(=3)$ 、 $n=0 \sim N(=1)$ までとして求めた Fourier係数を用いて $Y(x,y)$ を次式のように表す：

$$\hat{Y}(x,y) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N [a_{mn} \sin f(x,y) + b_{mn} \cos f(x,y)] \quad (5)$$

図-2には図-1に示すA-Aline(ほぼx軸方向)、及びB-Bline(ほぼy軸方向)上の観測点の $Y(x,y)$ の値と式(5)による $\hat{Y}(x,y)$ の推定曲線を示している。A-Aline上では $Y(x,y)$ の変動が大きい。現地の揚水試験データによれば、観測点7は洪積層の中にあつて

透水量係数が小さい。また、観測点9でもかなりの粘土が含まれていてここでも透水量係数が小さい。一方、観測点8ではそれほど小さくなく、従って、この付近では比較的狭い範囲で透水量係数が大きく変化している。また、観測点7の西側近傍で大きな負値が推定されている。観測点6と7の間は沖積層になっていてこの区間の透水量係数は観測点5及び6の値と同程度であると推定されるが、事前にこれらの地質情報

表-1 透水量係数の観測値

NO.	x (km)	y (km)	transmissivity T(m ² /sec)	residual from trend:Y	estimated values:Y	residual ΔY
1	4.875	6.850	5.412×10^{-3}	0.300	0.235	0.065
2	4.125	6.700	3.166×10^{-3}	-0.286	-0.220	-0.066
3	4.150	6.425	5.516×10^{-3}	0.333	-0.323	0.656
4	1.300	6.300	9.482×10^{-3}	1.248	1.309	-0.061
5	0.900	5.475	4.140×10^{-3}	0.764	0.960	-0.196
6	1.175	5.350	1.084×10^{-3}	1.667	1.830	-0.163
7	3.075	5.600	2.000×10^{-3}	-2.288	-2.717	-0.055
8	3.700	5.475	4.120×10^{-3}	0.266	0.201	0.065
9	4.375	5.375	3.344×10^{-3}	-2.185	-0.501	-1.684
10	4.625	4.775	5.391×10^{-3}	0.798	-0.715	1.513
11	3.800	4.150	5.774×10^{-3}	1.001	1.095	-0.094
12	3.650	3.450	3.387×10^{-3}	0.704	0.582	0.122
13	1.425	4.325	8.194×10^{-3}	1.616	1.395	0.221
14	2.925	2.050	8.054×10^{-3}	-0.163	-0.002	-0.161
15	5.050	7.950	4.385×10^{-3}	-0.094	0.509	-0.603
16	5.500	7.475	2.973×10^{-3}	-0.300	-0.816	0.516
17	6.600	7.325	1.660×10^{-3}	-0.508	0.060	-0.568
18	0.100	6.675	5.002×10^{-3}	0.985	0.355	0.630
19	6.125	5.000	1.243×10^{-3}	1.905	1.886	0.019
20	5.100	4.500	6.860×10^{-3}	-1.104	-0.670	-0.434
21	0.325	4.525	1.800×10^{-3}	-4.169	-3.979	-0.190

$$Y(x,y) = \ln T - (\ln T),$$

$$(\ln T) = \text{trend} = -8.73 + 0.477 \cdot x + 0.494 \cdot y - 0.065 \cdot x^2 - 0.020 \cdot y^2$$

表-2 推定残差分散とAIC

		(l _x =l _y =7.0km)					
N	M	0	1	2	3	4	
0	σ^2	2.30	2.25	2.09	1.86	1.33	
	AIC	17.5	21.1	23.5	18.6	22.0	
1	σ^2	2.30	2.06	1.34	0.36	0.28	
	AIC	21.5	27.2	26.2	6.9	8.1	
2	σ^2	2.22	1.73	1.11			
	AIC	24.7	31.5	34.4			
3	σ^2	2.22	1.24				
	AIC	28.7	32.6				
4	σ^2	2.04	0.77				
	AIC	31.0	30.7				

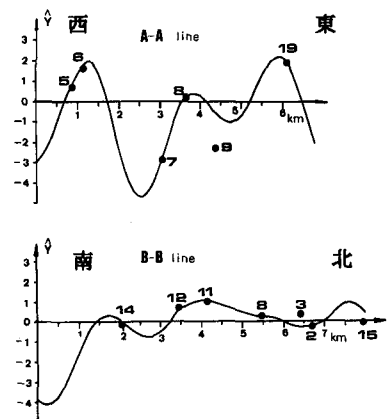


図-2 推定曲線

を考慮して $Y(x,y)$ を推定するにしても観測個数の追加が必要であろう。なお、A-Aline上で観測点5、6のグループ～観測点7、8、9のグループ～及び観測点19がほぼ6kmを半波長として変化しているとみなし、また、B-Bline上で観測点14～観測点11、12のグループ～観測点8、3、2のグループが半波長5km程度で変化しているとみなして、 $l_x=12\text{km}$ 、 $l_y=10\text{km}$ として同様の解析を行った場合にも観測点9における推定残差の改良はみられず、現存の観測点の配置および個数では、基本波長 l_x 、 l_y の仮定上の問題があるものの、観測点9近傍の推定精度を上げることは困難のようである。次に、図-3にx方向の2点間距離を ξ 、y方向の2点間距離を η としたときの $\hat{Y}(x,y)$ に対応する自己相関係数 $R(\xi, \eta)$ を示している：

$$R(\xi, \eta) = \left[\frac{1}{2} \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N (\hat{a}_{mn}^2 + \hat{b}_{mn}^2) \cos f(\xi, \eta) \right] \div \left[\frac{1}{2} \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N (\hat{a}_{mn}^2 + \hat{b}_{mn}^2) \right] \quad (6)$$

図-3中にはxおよびy方向の相関の代表スケールとして、ここでは相関係数が ξ 軸、 η 軸と最初に交わる長さ $L_x (=800\text{m})$ 、 $L_y (=2000\text{m})$ を示している。この領域では東西方向の方が南北方向よりも相関が小さいことが推定される。

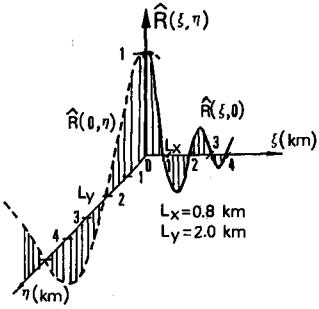


図-3 推定した自己相関係数

3. 確率偏微分方程式の解としての $Y(x,y)$

(3.1) 2次元確率偏微分方程式

最近、解析領域を差分メッシュでブロック化し、透水量係数の対数変換値 $Y(x,y)$ が離散的確率差分方程式を満足するとして、これに含まれる自己回帰係数を種々与え、ランダムな確率場を発生させ、場の統計的性質を調べる研究がある。本来透水量係数は連続量であること、また確率差分方程式ではこれに含まれるいわゆるシステム雑音レベルと離散化に伴う空間スケールの近似度との関係が不明であることなどの問題点があることを考慮すると離散型の確率差分方程式よりも連続量を取り扱える確率偏微分方程式の方が合理的であると考えられる。また、 $Y(x,y)$ の空間構造を規定する自己回帰係数の値は事前に与えられているものとして場を発生させているが、実際にこの手法をフィールドに適用するためには係数の評価法を明らかにすることが必要であろう。以上の点を考慮し、ここでは $Y(x,y)$ を連続量として取り扱え、またシステム雑音との関連が検討出来るような確率偏微分方程式を考えることにする：

$$A_x \partial^2 Y(x,y) / \partial x^2 + A_y \partial^2 Y(x,y) / \partial y^2 + \varepsilon(x,y) = 0 \quad (7)$$

ここに、 A_x, A_y ：自己回帰係数(km単位)、 $\varepsilon(x,y)$ ：正規性白色雑音(1/km単位)である。ここで、式(7)はその差分式が従来の離散型自己回帰モデルに一致するという理由で採用したものであって、もう少し次数を増やすべきなのか、あるいは座標を回転すれば A_x, A_y のみならず非対角成分までもを考える必要があることなどの問題点が残っている。ここでは $Y(x,y)$ が式(7)の解であると言うことを仮定して解析を行うものである。 $\varepsilon(x,y)$ をFourier級数に展開する：

$$\varepsilon(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [A_{mn} \sin f(x,y) + B_{mn} \cos f(x,y)] \quad (8)$$

$\varepsilon(x,y)$ の自己相関関数は

$$R_\varepsilon(\xi, \eta) = (1/2) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (A_{mn}^2 + B_{mn}^2) \cos f(\xi, \eta) \quad (9)$$

いま、 $\varepsilon(x,y)$ がx方向に $1/(2\phi_x)$ 、y方向に $1/(2\phi_y)$ 離れると相関が無いと考えると、 $\varepsilon(x,y)$ の相関関数およびスペクトルは図-4および図-5に示ようになる。スペクトルは

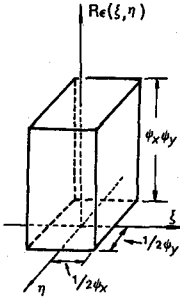


図-4 白色雑音の相関係数

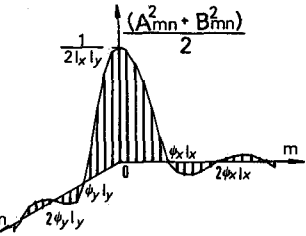


図-5 白色雑音のスペクトル

$$(A_{mn}^2 + B_{mn}^2) / 2 = (1/2 * lx * ly) * \sin(m\pi / \phi * lx) * \sin(n\pi / \phi * ly) / \{ (m\pi / \phi * lx) * (n\pi / \phi * ly) \} \quad (10)$$

となる。さて、 $Y(x,y)$ は $\varepsilon(x,y)$ を入力としたときの出力である。 $Y(x,y)$ のスペクトルを求めるために式(3)、(8)を式(7)に代入すると、次の関係式を得る。

$$A_{mn} = \{Ax(2\pi m/lx)^2 + Ay(2\pi n/ly)^2\} * a_{mn} \quad (11), \quad B_{mn} = \{Ax(2\pi n/lx)^2 + Ay(2\pi m/ly)^2\} * b_{mn} \quad (12)$$

したがって、自己回帰係数 Ax 、 Ay が与えられているときの $Y(x,y)$ のスペクトルは、式(10)～(12)から
 $(1/2)(a_{mn}^2 + b_{mn}^2) = (1/2 * lx * ly) * \sin(m\pi / \phi * lx) * \sin(n\pi / \phi * ly) /$

$$[(m\pi / \phi * lx) * (n\pi / \phi * ly) * \{Ax(2\pi m/lx)^2 + Ay(2\pi n/ly)^2\}^2] \quad (13)$$

したがって、 Ax 、 Ay が既知であれば $Y(x,y)$ のスペクトルを求めることができる。

3.2 $Y(x,y)$ の観測値から自己回帰係数 Ax, Ay を推定する方法

$Y(x,y)$ の観測値から前述のAIC及び最小2乗法によりFourier係数を求め、さらにスペクトル：

$(1/2) * (\hat{a}_{mn}^2 + \hat{b}_{mn}^2)$ を計算する。ここで、スペクトルが自由度2のカイ2乗分布をすること、すなわち推定されるスペクトルの標準偏差がスペクトルそのものに等しいことを考慮して⁴⁾、ここでは次のような重み付き最小2乗法によって Ax 、 Ay を推定する。即ち、次の評価基準を用いる：

$$J = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N [(1/2) * (\hat{a}_{mn}^2 + \hat{b}_{mn}^2) - \text{式(13)のスペクトル}] / [\text{式(13)のスペクトル}]^2 \rightarrow \text{最小値} \quad (14)$$

3.3 場の発生と Ax 、 Ay の推定手順

この推定法の妥当性を調べるために予め Ax, Ay を与えてランダムな場を発生させ、この場について検討を加えよう。以下に手順を要約する。

(3.3.1) 場の発生法

①級数展開における項数($M_{\max}$ 、 $N_{\max}$)を設定する(本例では x 方向、 y 方向ともそれぞれ9を与えた)。② Ax 、 Ay 、 ϕx 、 ϕy 、 lx 、 ly を与えて波数(m, n)に対する式(13)の右辺を計算する。この値は正規性確率変数 a_{mn} 、 b_{mn} の分散に等しい。③平均値を0、分散として②で求めた分散を持つような正規乱数を2個発生させ、これらを a_{mn} 、 b_{mn} とする。④解析対象領域の任意点(x, y)において③の値を用いて式(3-2)の $f(x, y)$ を計算する。⑤(m, n)が($M_{\max}, N_{\max}$)になるまで②～④を繰り返す。⑥別の点(x, y)で同様の計算を行う。

(3.3.2) Ax 、 Ay の推定手順

①観測値に対してAIC及び最小2乗法によりFourier係数を推定する。②推定した $\hat{a}_{mn}$ 、 $\hat{b}_{mn}$ に対するスペクトル $(\hat{a}_{mn}^2 + \hat{b}_{mn}^2) / 2$ を計算する。③式(14)の基準によって Ax 、 Ay を求める。

4. 発生した場への適用例

4.1 観測点が20点の場合

表-3は20回のシミュレーション結果である。Jの欄は式(14)の値である。Jを Ax 、 Ay について最小にする場合、 Ax あるいは Ay に関する4次の代数方程式を得るが、解として① $Ax > 0$ 、 $Ay > 0$ の組、

② $Ax > 0$ 、 $Ay < 0$ の組、③ $Ax < 0$ 、 $Ay < 0$ の組、④ $Ax < 0$ 、 $Ay > 0$ の組が可能である。①と③の組および②と④の組はその符合の組合せが異なるだけで、式(7)からも明かなように実質的には同じ場を表す方程式となる。したがって、Jを最小にする解として Ax および Ay が同符合である場合と異符合である場合とを検討することにする。表の各Runの上段は $Ax > 0$ 、 $Ay > 0$ の組、下段は $Ax > 0$ 、 $Ay < 0$ の組を示したものである。黒丸印は前者の組のときにJが最小値になったものである。場の発生条件では $Ax = 0.100\text{km}$ 、 $Ay = 0.180\text{km}$ としているにも関わらず、Jを最小にする解が後者のように算定されているものが20回中7回あるが、これ

表-3 観測点が20ヶ所の場合のシミュレーション結果

generating conditions: Ax=0.100km, Ay=0.180km, $\phi x = \phi y = 10.0/\text{km}$, lx=ly=7.0km									
number of measurement points: K=20									
Run	(M,N)	Ax(km)	Ay(km)	J	Run	(M,N)	Ax(km)	Ay(km)	J
1	(2,2)	0.051	0.106	• 0.46	11	(2,2)	0.213	0.145	• 0.23
		0.049	-0.123	0.54			0.224	-0.169	0.36
2	(2,2)	0.086	0.121	• 0.49	12	(2,2)	0.119	0.173	0.45
		0.086	-0.112	0.62			0.121	-0.317	0.44
3	(2,2)	0.033	0.208	• 0.48	13	(1,0)	no solution		
		0.030	-0.222	0.57			no solution		
4	(2,2)	0.063	0.185	0.43	14	(2,2)	0.058	0.089	0.78
		0.068	-0.278	0.35			0.415	-0.550	0.44
5	(2,2)	0.133	0.149	• 0.31	15	(2,2)	no solution		
		0.128	-0.139	0.51			0.088	-0.190	0.44
6	(2,2)	0.116	0.226	• 0.42	16	(2,2)	0.100	0.157	• 0.40
		0.119	-0.301	0.43			0.102	-0.191	0.50
7	(2,2)	0.063	0.194	• 0.33	17	(2,2)	0.120	0.151	• 0.20
		0.063	-0.275	0.34			0.133	-0.182	0.41
8	(2,2)	0.030	0.189	• 0.38	18	(2,2)	0.028	0.159	• 0.41
		0.030	-0.220	0.40			0.026	-0.166	0.47
9	(2,2)	0.079	0.144	0.61	19	(2,2)	0.107	0.132	• 0.31
		0.081	-0.289	0.49			0.096	-0.138	0.57
10	(1,2)	0.141	0.225	0.38	20	(2,2)	0.118	0.133	• 0.44
		0.192	-0.387	0.25			0.121	-0.124	0.61

は発生した場が $A_x > 0$ 、 $A_y > 0$ の組(楕円型)の場よりもむしろ $A_x > 0$ 、 $A_y < 0$ の組(双曲型)の場に近かったためと考えられる。

図-6、図-7は表-4のRun4、Run5で発生された場(実線)及び2で示した方法による推定曲線である。図-6はy方向に長く、図-7はx、y方向に同程度のスケールで変化している場が発生されている。推定された A_x および A_y の値を比べると、Run4では A_y が A_x に比べて3倍程度大きく、またRun5では A_x と A_y の値はほぼ等しく推定されている。したがって、観測点が20点程度であっても大まかな分布の推定と、これに対応するモデルである式(7)の自己回帰係数の推定は十分可能ではないかと考えられる。

4.2 観測点が室見川流域と同じ配置の場合

表-4は4.1と同様の方法で発生した場に対し、図-1に示す室見川流域の観測点の個数および配置で場を推定し、さらに自己回帰係数を求めたものである。観測点の配置の違いにより4.1の場合と比べて $A_x > 0$ 、 $A_y > 0$ の値が推定された回数が非常に少なく、式(7)のモデルが適用出来るとしてもJを最小にする A_x 、 A_y の値がともに正の値として推定される可能性は非常に低いものと考えられる。これより実際のフィールドのデータに対し式(7)のモデルを適用した場合、観測点の配置、個数などの影響を受けて必ずしも $A_x > 0$ 、 $A_y > 0$ の推定値が得られないことがあることを意味するものと考えられる。

4.3 室見川流域への適用

現地のデータに式(7)のモデルを適用し、自己回帰係数の推定を行った。この場合の $Y(x,y)$ の場は図-6とほぼ同じようにx方向には短い波長で、またy方向には長い波長で変化する等高面を有しているが(図-2参照)、 $A_x > 0$ 、 $A_y > 0$ の値は得られず、 $A_x = 0.029\text{km}$ 、 $A_y = -0.189\text{km}$ が推定された。これは4.2の考察からも判るように、式(7)のモデルを適用しても現地の観測点配置では A_x 、 A_y がともに正の値として求められる可能性が低いことに対応すると考えられる。

5. 結び

本研究で得られた結果を要約すると、①透水量係数の対数変換値 $Y(x,y)$ の空間分布をFourier級数に展開する場合赤池の情報量基準(AIC)によって、与えられた観測点数、配置に見合った最適な項数が決定出来る。またこのように $Y(x,y)$ の分布を式で表しておけば、任意断面での $Y(x,y)$ の分布を見る場合にも都合が良い。② $Y(x,y)$ をFourier級数に展開することにより、 $Y(x,y)$ の相関係数、スペクトルが容易に計算出来る。③この方法を用いて実際の現地の $Y(x,y)$

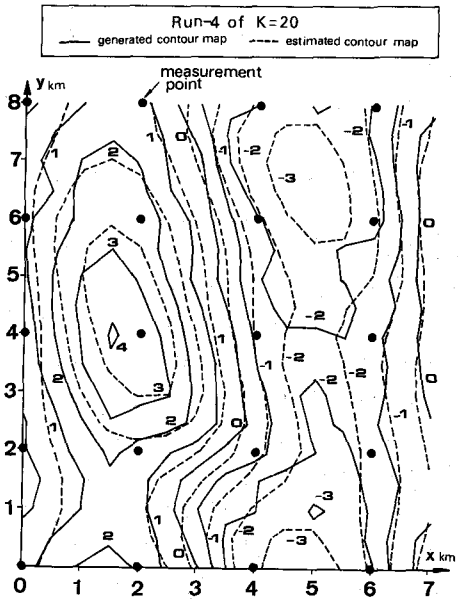


図-6 Run-4の場合

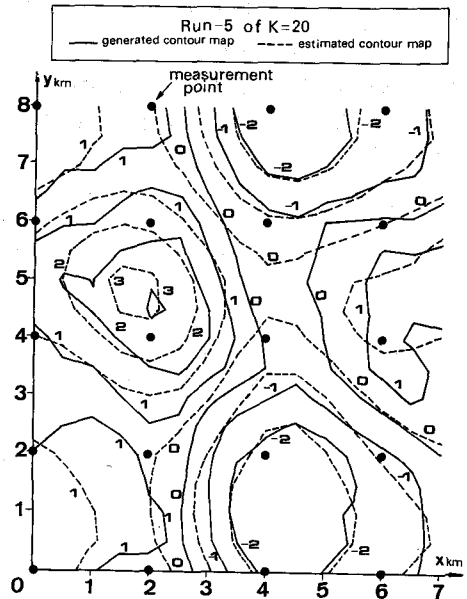


図-7 Run-5の場合

の空間分布の相関係数を計算すると、南北方向が東西方向よりも長い波長で変化していることが推察された。これは現地の地質構造にも矛盾しない結果と考えられる。④ $Y(x,y)$ が式(7)を満たすと仮定したときに、システムノイズ $\varepsilon(x,y)$ と $Y(x,y)$ の関係を求め、自己回帰係数が与えられたときに $Y(x,y)$ のランダムな場を発生させる方法を示した。⑤ $Y(x,y)$ の分布が与えられたとき、式(7)の自己回帰係数の推定法を示し、発生させたランダムな場に適用した。この結果、観測点の個数が20個程度でも規則的な配置であれば自己回帰係数の推定は可能であるが、本研究での現地の観測点配置では難しいことが判った。⑥現地の観測値に対して式(7)のモデルを適用したが、自己回帰係数が二つとも正の値には推定されなかった。

表-4 観測点が室見川流域と同じ場合の
シミュレーション結果

generating conditions: $Ax=0.100\text{km}$, $Ay=0.180\text{km}$, $\phi_x=\phi_y=10.0/\text{km}$, $1x=1y=7.0\text{km}$
 measurement points : same as measurement points in the Muromi River Basin

Run	(N,N)	Ax(km)	Ay(km)	J	Run	(N,N)	Ax(km)	Ay(km)	J
1	(8,0)	no solution			11	(4,1)	0.018	0.340	0.50
		no solution					0.060	-0.355	0.44
		0.056	0.012	0.39			0.026	0.001	0.59
2	(1,4)	0.064	-0.018	0.42	12	(1,4)	0.047	-0.008	0.42
		0.082	0.455	0.18			no solution		
3	(3,1)	0.079	-0.572	0.41	13	(0,7)	no solution		
		no solution					0.114	0.060	0.54
4	(0,9)	no solution			14	(2,2)	0.122	-0.293	0.50
		0.068	0.043	0.44			0.045	0.256	0.53
		0.076	-0.042	0.49	15	(4,1)	0.085	-0.402	0.46
5	(2,2)	0.028	0.092	0.41			0.152	0.014	0.54
		0.044	-0.108	0.34	16	(2,2)	0.141	-0.242	0.52
6	(4,1)	no solution					0.065	0.131	0.39
		0.058	-0.685	0.44	17	(2,2)	0.111	-0.184	0.34
7	(4,1)	0.008	0.145	0.67			0.029	0.063	0.75
		0.020	-0.159	0.59	18	(2,2)	0.175	-0.116	0.45
8	(4,1)	0.017	0.062	0.62			0.043	0.223	0.50
		0.124	-0.059	0.45	19	(4,1)	0.060	-0.339	0.43
9	(2,2)	0.072	0.121	0.40			0.023	0.054	0.69
		0.073	-0.685	0.41	20	(4,1)	0.034	-0.353	0.53
10	(4,1)								

参考文献

- 1) 上田、神野、平野: 室見川流域の透水量係数と非定常地下水位の推定、第28回水理講演会論文集、pp.601-608、1984年2月
- 2) 原田、内田、高木: 地下水流動モデルのパラメータ評価に関する一考察、第39回土木学会年次講演会概要集、pp.5-6、1984年10月
- 3) 石黒真木夫: 情報量基準、BASIC数学別冊、現代数学社、pp.84-89、1979年12月
- 4) 森下、小畑: 信号処理、計測自動制御学会、pp.107-112、1982年7月