

流況を考慮した開水路の底面せん断力の推定の一般化

Generalized Theory on Bed Shear Stress in Various Types of Open Channel Flow

東洋大学 工学部 正 員 福井 吉孝
 早稲田大学 理工学部 正 員 吉川 秀夫
 東洋大学 工学部 学生員 根本 顕
 早稲田大学 理工学部 学生員 村重 宏

1. はじめに

自然の、或は人工の開水路において、底面（壁面）に働くせん断力を適切に見積り、算定することは固定床・移動床に拘らず、水路の計画・設計・維持の上に大変重要なことである。従って、古くより、多くの研究者が、そのせん断力の測定・算定に関心を持って検討を加えてきている。しかし、開水路において流況の変化が顕著な所では、その流れの変化の度合に応じて、流下方向及び横断方向での底面せん断力の値が変化するので、測定・算定も容易でなく、適切な算定法は見当らなかった。

我々は、その底面せん断力を比較的簡単に、適切に算定する方法について考えた。^{1), 2), 3), 4)}その方法は底面近傍の流れに有効な基礎式としてカルマンの運動量方程式を採用し、適切な境界条件を用いて数値計算を行うものであり、流況の変化する流れのうち、段落流・狭さく流れ・自由跳水・潜り跳水を例としてとりあげた。各ケースに対して、実測値に合致する底面せん断力を算定することができたが、それぞれの流れが特有の機構を有する面もあり、一括して汎用的に取り扱うという点では、未だ、充分とはいえない面もあった。そこで、ここでは、今迄行ってきた上記の段落流れ等の開水路急変流の底面せん断力の算定手法を概括するとともに、更に吟味を加えて、統一的な取り扱いの可能性に向けて検討を加えてみた。

2. 境界層方程式及びカルマンの運動量方程式

プラントルは、流れを、固体壁面に近い粘性の影響を強く受ける領域と、影響を受けない主流部に分け、前者の境界層に対して①ナビエ・ストークスの方程式のオーダー比較、②境界層内では壁面に垂直な方向では圧力変化を無視すること、によって2次元の境界層方程式のx, y方向成分を

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{----- (1)}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad \text{----- (2)}$$

と表わした。

定常流れとし、主流の速度 U を用い、 $\tau = \mu (\partial u / \partial y)$ で書き換えると、(1)式は

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad \text{----- (3)}$$

となり、連続の式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{----- (4)}$$

を用いて、壁面 $y=0$ から境界層の外側 $y=\delta$ まで積分すると、

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta u (U - u) dy + \frac{dU}{dx} \int_0^\delta (U - u) dy = \frac{\tau_0}{\rho} \quad \text{----- (5)}$$

となる。(5)は排除厚 δ^* 、運動量厚 θ を用いると、次のカルマンの運動量方程式（或は境界層の運動

量方程式) が求まる。

$$\frac{d}{dx} (\theta U^2) + \delta^* U \frac{dU}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho} \quad \text{----- (6)}$$

3. 境界層方程式の開水路急変流への応用

(6) 式は、元々気体の流れに対するものであったが、開水路の流れへの適用も試みられてきた。Bauer⁵⁾やIwasa⁶⁾はダムの余水吐などの急勾配水路での空気の混入に焦点をあて、それを支配する境界層の発達を調べた。松下⁷⁾は実験室での開水路実験の助走距離を決めるために境界層の式を用いた。また、斎藤⁸⁾は(6)式の壁面噴流への適用の可否について検討している。しかし、我々が主目的としている急変流下での底面せん断力の算定に、この式を用いている例は余りない。それは(6)式を導く際に用いた仮定が直接実際の急変流へあてはまるわけでないことに起因している。しかし、仮定(1)(2)について以下のように考えることで本研究の解析法に妥当性を与える。

1) 今扱っている流れは、仮定(1)のオーダー比較の結果をそのまま適用することはできない流れであるが、仮定(1)に見合う流れ(図1の③)を想定することによって(6)式を使用することができる。図1は、段落流の場合を対象にした流れの場の説明図であるが、③は底面近傍では実際の流れ①と同一の流速分布形状をもたせる。

2) 重力の場では、ピエソ水頭を $(p/\gamma) = (p/\gamma) + y$ とすると $(1/\rho)(\partial p/\partial y) = -(1/\rho)(\partial p/\partial y) + gy$ であり $(\partial p/\partial y) = 0$ が $(\partial p/\partial y) = 0$ と等価であるということである。そして、 $\partial p/\partial y = 0$ の条件は

本研究で例としてとりあげた急変流の場合でも、底面の近傍ではほぼ満足している。

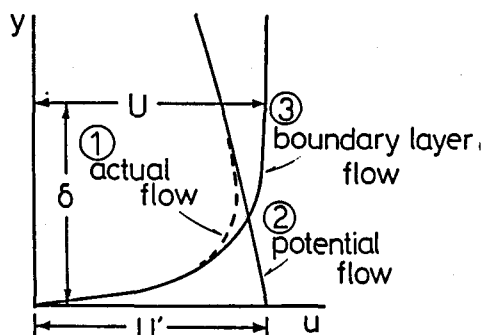
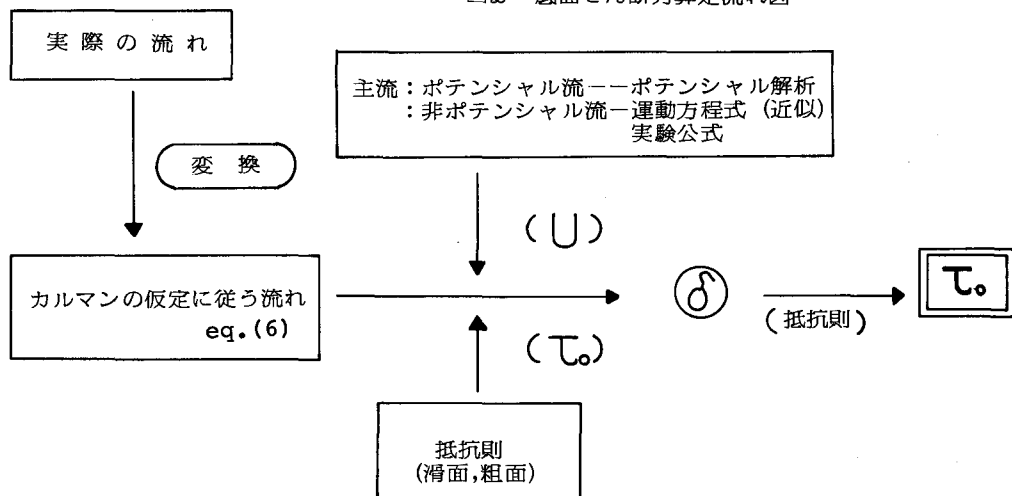


図1 流れの場の説明図

4. 解析手法について

図2 底面せん断力算定流れ図



本研究は(5)、或は、(6)式を用いて抵抗則と連立させて、急変流の底面せん断力 τ_0 を求めることを主目的としている。その為には、例えば、図2に示す様な流れ図に沿った計算を行う。つまり、①境界層内流速 u 、②抵抗則、③主流速 U を現象に相応する形で与えておき、 δ を求め、それから τ_0 を求めるものである。主流速 U の求め方が主流の状況によって異なってくるので流れを大きく、1. 主流がポテンシャル流れとみなせる場合、2. 非ポテンシャル流れである場合に分けて解析手法を記す。

4・1 主流がポテンシャル流れとみなせる場合

まず δ を求める為に必要な①境界層内流速、②抵抗則、③主流速 U について整理しておく。

① 境界層内流速： u

u は対数則に対応する $1/7$ 乗則、即ち

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} \quad \text{-----(7)}$$

で表わせる。実際、急変流といえども、本解析に利用した流れでは対数分布をしている。(5)式は(7)式を使うことによって積分が容易になる。

$$\frac{7}{72} U^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} + \frac{23}{72} U \delta \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\tau_0}{\rho} \quad \text{-----(8)}$$

② 抵抗則

抵抗則

$$\tau_0 = \frac{\rho}{8} f u_m^2 \quad \text{-----(9)}$$

は f 及び流速分布形によって種々の形式が提唱されている。ブラジウスの実験公式

$$f = 0.3164 \text{Re}^{-1/4} \quad \text{-----(10)}$$

と $1/7$ 乗則からは

$$\frac{\tau_0}{\rho} = 0.0225 U^2 \left(\frac{\nu}{U \delta}\right)^{1/4} \quad \text{-----(11)}$$

となる。また、 f としてマニング・ストリクラの公式

$$f = 0.216 \left(\frac{ks}{2\delta}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{-----(12)}$$

やムーディ図表から読みとるといった具合に、滑面・粗面に対して多くの式があるが、どの抵抗則を用いても結果として得られるせん断力の値に大差はなかった。

③ 主流速： U

流れの形状が与えられたなら、リラクゼーションや境界要素法等を用いてポテンシャル解析を行うことができ、流れの場全体にわたっての流速を算出できる。また、流れの形状が未知の場合でも、接近流が射流ならマークランドの方法を用いてポテンシャル解析を行うことができる。算出した底面での流速 $\bar{U}$ を U として計算に用いる。(図1)

④ 境界条件

式(8)を数値計算する際、境界条件即ち、計算始点での $U(0)$ 、 $\delta(0)$ の値が必要である。段落流の様な場合、上流から来た流れは十分に境界層が発達しきっているので、計算始点の水深 h を $\delta(0)$ とすることに疑義はなく、 $U(0)$ もその点での最大流速を用いる。

段落流を例として行った実験及び計算結果が、図4に流速分布図5に境界層厚 δ そして図6に底面せ

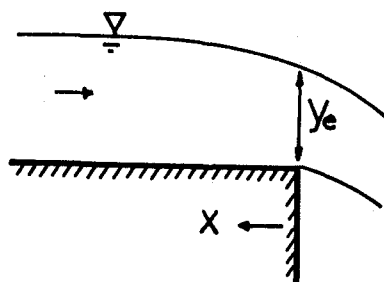


図3 段落流

ん断力について描かれてある。なお底面せん断力の実験値はプレストンの方法を用いて求めた値である。

4・2 主流速が非ポテン

シャルの場合

主流の非ポテンシャル流れの場合には、採用する主流速 U の値を改めて検討する必要がある。本研究では、運動方程式での近似、或は次元解析に基いた実験公式より U を算出した。同時に圧力勾配 dp/dx や抵抗則も現象に見合う様に補正する必要がある。次に例として自由跳水と落り跳水について、(5式)の適用を考える。

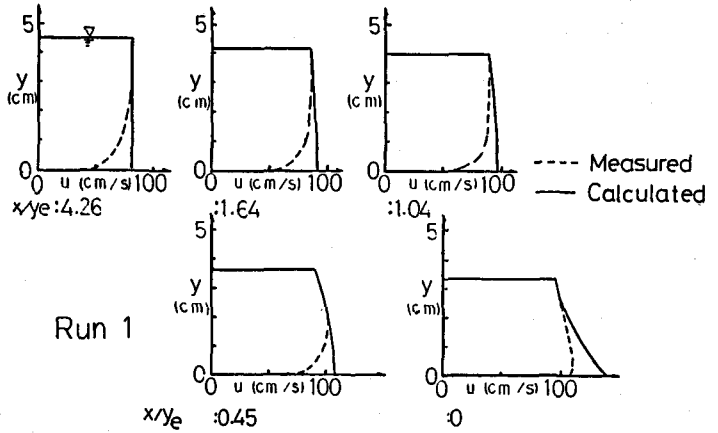


図4 段落流流速分布図

4・2・1 自由跳水 (図7. / a)

① 境界層内流速: u

跳水内の流速は、底面近傍では $1/7$ 乗のべき乗則で表わすことができる。

② 抵抗則

(/0)式或は (/)式を用いる。

③ 主流速: U

主流部はポテンシャル流でないの
で、ポテンシャル解析を行えない。
そこで、近似的ではあるが、静水圧分
布を仮定することにより、

$$-g \frac{\partial h}{\partial x} = U \frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{--- (/ 3)}$$

の運動方程式を導き、水面形状を既知とすることによって、境界層内の流れを規定する U を求めることができる。

④ 境界条件

ゲート下流直後、境界層が発達しない段階で生起する場合と、相当流下し、充分に境界層が発達してから生起する場合とでは跳水の流況は異なるが、計算始点での最大流速を $U(0)$ 、そこでの δ を $\delta(0)$ として計算を行う。

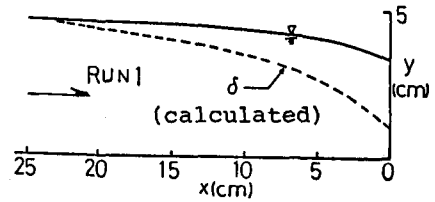


図5 段落流の境界層厚

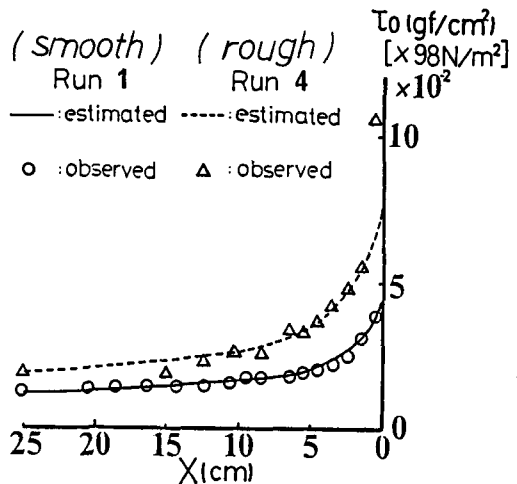


図6 底面せん断力実測及び計算値

自由跳水の計算結果を図8、9、/0に示す。底面せん断力が非常に良い一致をみていることが判る。

4・2・2 潜り跳水 (図7・b)

① u 及び $\partial p / \partial x$

潜り跳水で全体水深の変化が小さい場合、 $(\partial p / \partial x) = 0$ とみなせ、従って境界層方程式も $(\partial p / \partial x) = 0$ を条件とする式に変える必要が生じる。(5)式の積分の結果は

$$\frac{7}{72} U^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} - \frac{49}{72} U \delta \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\tau_0}{\rho} \quad \text{-----(/4)}$$

となる。(/ 4)式で、 u は / 7 乗則に従うものとみなしている。壁面噴流では $n = 1/2 \sim 1/4$ と報告されているが、本解析においては $n = 7$ を用いても $n = 1/2$ を用いても、(/ 4)式で解析する上では差異は生ぜず、精度の良い結果を得られた。

② U

次元解析及び Sigalla¹⁰⁾、Rajaratnam¹¹⁾ の実験結果より

$$x/y_1 < 14 \quad \frac{U}{U_1} = 0.96 \left(\frac{x}{y_1} \right)^{-\frac{1}{36}} \quad \text{-----(/5)}$$

$$x/y_1 > 14 \quad \frac{U}{U_1} = 3.45 \left(\frac{x}{y_1} \right)^{-0.5} \quad \text{-----(/6)}$$

但し、 y_1 : 流出口高、 U_1 : 流出流速

を導いて、 U を求めた。

③ 抵抗則

f として (/ 0)、(/ 2)等を用いて計算した結果、差異はない。また、壁面噴流に対する、Sigalla¹⁰⁾による

$$\tau_0 = 0.0283 U^2 \left(\frac{\nu}{U \delta} \right)^{1/4} \quad \text{-----(/7)}$$

を用いての計算も、(/ 7)式での結果とほぼ同一の値を得た。

④ 境界条件

流出口よりほぼ一様に流出しており、計算始点での $\delta(0)$ 、 $U(0)$ はそれぞれ、 $U(0) = U_1$ 、 $\delta(0) = 0.1 \cdot y_1$ が適切とみなせる。

以上の諸項を考慮して求めた底面せん断力の値は、図 / /、/ 2、/ 3 に示されている。なお、図 / 3 は粗面 ($k_s = 1.21$ cm の栈粗度) に対する結果である。

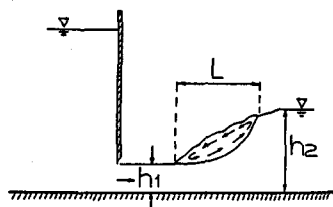


図7・(a) 自由跳水

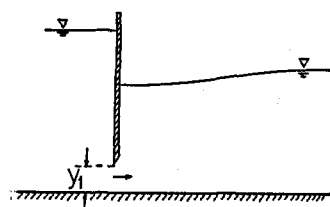


図7・(b) 潜り跳水

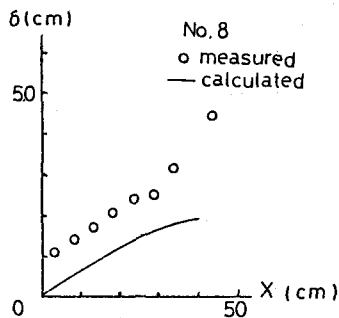


図8 自由跳水 境界層厚

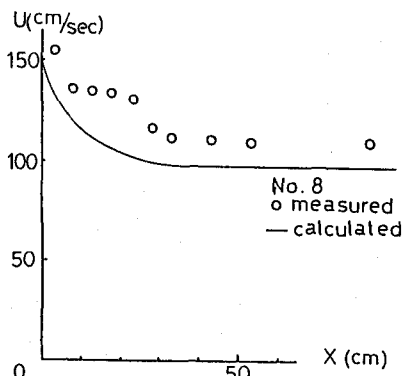


図9 自由跳水 主流速

$\tau_0 \times 10^{-1}$
(gf/cm^2) No.8

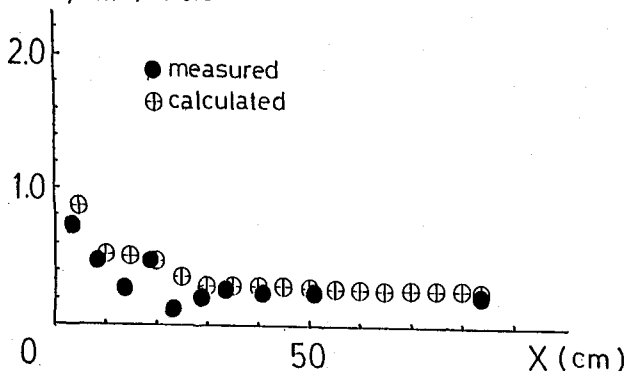


図 / 0 自由跳水 底面せん断力

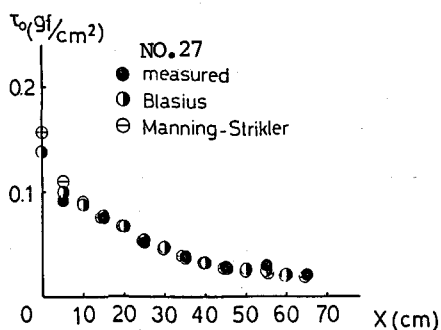


図 / 1 潜り跳水 底面せん断力
(抵抗則の比較)

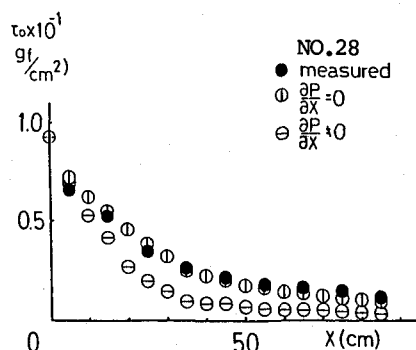


図 / 2 潜り跳水 底面せん断力
(圧力勾配あり、なし)

5. 応用

3、4では、2次元、固定床流れを対象として解析方法及び結果を記したが、実際、自然の場においては移動床である場合も多く、3次元的な流れでもある場合が多い。そういった場合に対して本手法を適用した所、移動床流れ、3次元流れの底面せん断力の解析にも有効であることが判った。
1),3)

6. まとめ

結果をまとめると、表 / となり、種々の急変流の底面せん断力の値も実測値と良く合致し、簡便な手法によって底面せん断力の値を得ようという目的を達せた。なお、境界層厚の算定結果と実測の値とで隔りが見られるが、これは、流量の連続性が実際の流れと解析式との間で一致を見ていないことに原因があると思われる。排除厚等を考慮に入れることによって、精度が向上し、ある程度解決できるが、手続きは煩雑になる。今後如何にして、そういった点まで考慮に入れるかが、研究を続けていく上での検討課題である。本論文作製にあたり遠藤 睦夫君(東洋大学)に色々お手伝って頂いた、記して謝します。

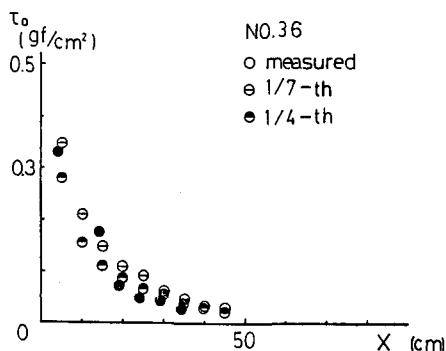


図 / 3 潜り跳水 底面せん断力 (粗面)

主 流		u	抵 抗 則 (滑・粗)	境 界 条 件		適 用 し た 流 れ
流 れ	U			δ (0)	U (0)	
ポテンシャル 流 れ	ポテンシャル 解 析	/ / 7 乗則	ブラジウスの式より マニング・ ストリクラの式より	始点のδ	始点の 最大流速	段落流 狭さく流れ
非ポテンシャ ル 流 れ	運動方程式 (近似) 実験公式	〃	〃	〃	〃	自由跳水 潜り跳水

参考文献

表 / 解析法まとめ

- 1) 片山ら 土論集 NO.342 1984-2
- 2) 村重ら 28回水講 1984-2
- 3) 橋本ら 28回水講 1984-2
- 4) 村重ら 39回年講 1984-10
- 5) Bauer, J.M. Trans. A.S.C.E. Vol. 119, 1954
- 6) Iwasa, Y. Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyoto Univ. Vol. 18, 19, 1956
- 7) Markland, E. Proc. Inst. C.E.E. No. 686, 1965
- 8) 栗津ら 32回 年講 1977
- 9) 斎藤 隆 土論集 NO.264 1977-8
- 10) Sigalla, A. Jr. R.A.S. 1958
- 11) Rajaratnam 「噴流」