

# 三次元解析法による琵琶湖湖流に関する二、三の検討

Some considerations on flows in Lake Biwa by means of three-dimensional analysis

京都大学工学部 正 員 岩 佐 義 朗

京都大学工学部 正 員 ○井 上 和 也

京都大学大学院 学生員 松 岡 隆 之

## 1. はじめに

近年、貯水池あるいは湖沼、海洋などの空間的な拡がりの大きい場での流体運動およびそれに伴う物質輸送に関する現地観測やシミュレーション・モデルによる研究が数多く行われている。本研究もそれらのうちの一つであって、琵琶湖（湖面積約 680 km<sup>2</sup>、貯水量 27.5 × 10<sup>9</sup> m<sup>3</sup>）を対象にして、湖流を三次元的に解析するための数値モデルを開発するとともに、種々に想定された条件のもとで特徴的に発生する湖流について考察し、それらの水理学的な特性を把握しようとしたものである。

## 2. 基礎式

周知のように、琵琶湖は最深部では水深が 100 m に達し、他の多くの湖沼と同様の成層状態の変化がみられる。したがって流れの解析にあたっては、空間的に三次元の扱いが必要である。本研究では、鉛直方向の加速度が重力のそれに比して小さい流れだけを扱うことにし、基礎式として次式を用いる。ただし密度の非一様性の運動方程式への影響については、Boussinesq の近似を適用する。

### (1) 運動方程式

$$x \text{ 方向: } \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = f v - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + A_h \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + A_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1)$$

$$y \text{ 方向: } \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -f u - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + A_h \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + A_v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (2)$$

### (2) 静水圧分布式

$$0 = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (3)$$

### (3) 連続式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

### (4) 密度の保存式

$$\frac{\partial \Delta \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \Delta \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \Delta \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \Delta \rho}{\partial z} = q + K_h \left( \frac{\partial^2 \Delta \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta \rho}{\partial y^2} \right) + K_v \frac{\partial^2 \Delta \rho}{\partial z^2} \quad (5)$$

ここに、 $x, y, z$ : それぞれ東向き、北向きおよび鉛直上向きにとられた座標軸、 $f$ : Coriolis の因子、 $\rho_0$ : 基準密度 ( $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$  とする)、 $\Delta \rho$ : 密度偏差 ( $\Delta \rho = \rho_0 - \rho$ ,  $\rho$ : 密度)、 $q$ : 輻射熱による密度偏差の生成項、 $A_h, A_v$ : それぞれ水平および鉛直方向の渦動粘性係数、 $K_h$ : 水平方向の渦動拡散係数、 $K_v$ : 成層が静的に安定な ( $\partial \Delta \rho / \partial z \geq 0$ ) とときの鉛直方向の渦動拡散係数である（他の記号は慣用どおり）。ただし、 $\partial \Delta \rho / \partial z < 0$  のとき、つぎに定義される深さ  $z_m$  まで、瞬時に対流混合が生ずるとする。

$$\int_{z_m}^{\zeta} \Delta \rho dz = (\zeta - z_m) \Delta \rho(z_m) \quad (6)$$

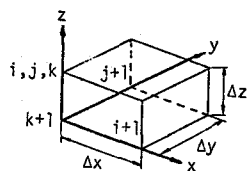
ここに、 $\zeta$ : 基準水面からの水位である。

(3)式より、静水圧分布式として、次式が得られる。

$$p = \rho_0 g \zeta - \int_{z_m}^{\zeta} \Delta \rho g dz \quad (7)$$

右辺第一項が barotropic な成分を表わし、第二項が baroclinic な成分を表わす。

境界条件および外力項（風、輻射熱）の取り扱いについては省略する<sup>1)</sup>。



図・1

### 3. 差分式と計算の手順

本研究では、三次元空間において計算式への定式化が比較的簡単な差分法を適用する。差分式には、水位  $\zeta$  に関して implicit なものと explicit なものの 2 つを用いたが、ここではまず前者について述べる。基礎式 (1)~(5) を、境界条件を考慮して図・1 の control volume (式(1)および(2)に対しては、この control volume をそれぞれ  $x$  および  $y$  方向に  $\Delta x/2$  および  $\Delta y/2$  だけずらせる。後の変数の配置 (図・2 参照) について積分した式にもとづいて、差分式を導く。以後図・1 の  $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$  の control volume を cell と呼び、 $\Delta z$  に代って湖底から水面までの全水深 ( $H+\zeta$ ) をとった  $\Delta x \times \Delta y \times (H+\zeta)$  の control volume を column と呼ぶことにする。差分式の詳細<sup>1)</sup>は省略し、誘導の概要だけを示すことにする。

(1) 未知量である変数をつぎのように配置する。水位  $\zeta$ : column の上面の中心, 圧力  $p$ : cell の上, 下面の中心, 密度偏差  $\rho$ : cell の中心,  $u, v$  および  $w$ : それぞれ cell の  $yz$  面,  $zx$  面および  $xy$  面の中心, これらの変数の配置を示したのが、図・2 である。

(2) 時間軸方向の差分については、 $t = n\Delta t$  と  $t = (n+1)\Delta t$  での水理量を既知として、 $t = (n+2)\Delta t$  の水理量を求める 2-level の leap-frog 法を用いる。

(3) 非定常項 ( $\partial/\partial t$  に関する項) を、 $t = (n+2)\Delta t$  での値と  $t = n\Delta t$  での値の差を、その時間間隔  $2\Delta t$  で除して評価する。他の項に関しては、つぎに述べる圧力の barotropic な成分を除いて、水理量が既知の  $t = n\Delta t$  あるいは  $t = (n+1)\Delta t$  での値で評価する。

(4) 式(1), (2) および (5) の移流項の差分化には、移流速度の向きに応じて、上流側の量が移流されるようにとる上流差分法をとる。

(5) 式(7)の右辺第一項 (圧力の barotropic な成分) の評価では、

$$\zeta = (1-\theta)\zeta^n + \theta\zeta^{n+2} \quad (8)$$

の加重平均をとる。また、baroclinic な成分は  $t = (n+1)\Delta t$  での既知の水理量によって評価する。式(8)の  $\theta$  は加重平均のパラメータであり、後の計算では試算的に  $\theta = 0.75$  をとっている。式(8)のようにした結果、最終的に未知量  $\zeta^{n+2}$  に関する implicit な差分式が導かれる。

(6) 式(4)を、境界条件を考慮して column について積分した連続式に改めて差分化する。このとき、 $u$  および  $v$  には、式(8)と同様の加重平均を用いる。すなわち、次式のようなものである。

$$u = (1-\theta)u^n + \theta u^{n+2}, \quad v = (1-\theta)v^n + \theta v^{n+2} \quad (9)$$

(7) 運動方程式(1)および(2)を、式(8)を用いて差分化し、これらを column について積分した連続式に代入すれば、 $\zeta^{n+2}$  に関する連立一次方程式が導かれる。

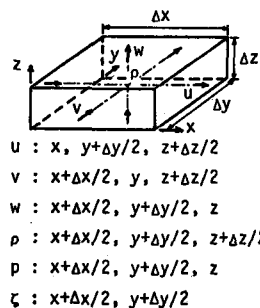
(8) この連立方程式は、楕円型偏微分方程式の差分式と同様の構造を有する。本研究では、この方程式を解くのに SOR 法を用いた。

以上で得られた差分式による計算手順はつぎのようである。

- ①  $t = n\Delta t$  および  $t = (n+1)\Delta t$  における既知の水理量から計算されるすべての項を求めておく。
- ② 上記の(8)で得られた  $\zeta^{n+2}$  に関する連立一次方程式を解く。
- ③ 式(1)および(2)を cell ごとに積分して差分化した式より、 $u^{n+2}$  および  $v^{n+2}$  を求める。
- ④ 式(4)を cell ごとに積分して差分化した式を、湖底より水面に向って順次適用し、 $w^{n+2}$  を求める。ただし、湖底では  $w^{n+2} = 0$  である。
- ⑤ 式(5)を cell ごとに積分して差分化した式より、 $\Delta p^{n+2}$  を求める。

### 4. 琵琶湖への適用

#### (1) 格子分割



図・2

図・3は琵琶湖の等深図である(基準面 T.P. 84.5 m)。差分格子の大きさは、水平面内に  $\Delta x = \Delta y = 1 \text{ km}$  であり、水深方向には水深が 50 m より浅い部分では  $\Delta z = 2.5 \text{ m}$ 、それより深い部分では  $\Delta z = 10 \text{ m}$  とする。

(2) 計算時間間隔

3 で述べた implicit な差分法を用いたとき、いくつかの試算の後、 $\Delta t$  は 300 秒とした。

(3) 渦動粘性係数、渦動拡散係数

水平方向の渦動粘性係数  $A_h$  および渦動拡散係数  $K_h$  には、 $A_h = 10 \text{ m}^2/\text{s}$ 、 $K_h = 30 \text{ m}^2/\text{s}$  を与えた。鉛直方向のこれらに関しては、定数とした予備計算の結果では、鉛直方向の熱の伝導が促進され、実際に予想されるよりかなり速く、成層状態の水温分布が一様な水温分布に移行した。したがって、以後の計算では鉛直方向の渦動粘性係数および渦動拡散係数をつぎの Richardson 数の関数<sup>2)</sup>として与えることにした。

$$A_v = A_{v0} e^{-m R_i}, \quad K_v = K_{v0} e^{-n R_i} \quad (9)$$

ここに、 $R_i = -g(\partial \rho / \partial z) / \rho_0 (\partial u / \partial z)^2$  であり、また  $A_{v0} = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ 、 $m = 1.5$ 、 $K_{v0} = 1 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ 、 $n = 3.0$  としている。ただし  $R_i < 0$  の場合には、先述のように式(6)の深さまで対流混合が生ずるとしているのので、式(9)は適用されない。

5. 解析結果

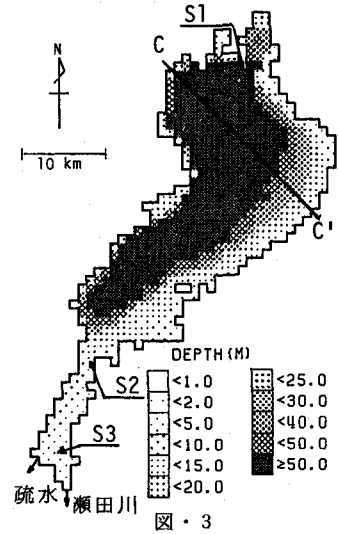
(1) 成層発達期の計算

1983 年 5 月の気象・水理条件(図・4 にその一部が示される)を外力項に用いて行った計算結果から、最深部での水温分布を求め、観測値と比較したのが図・5である。水温こう配は計算の方が観測よりもかなり緩やかになっている。

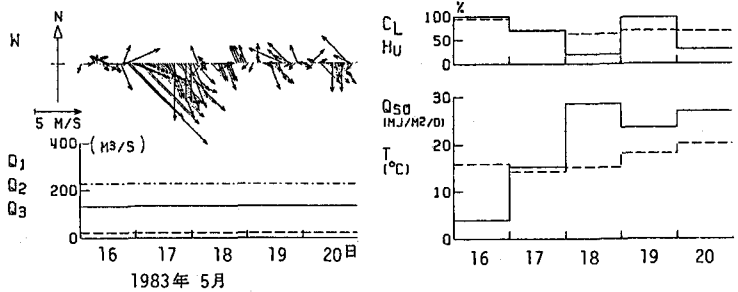
また 5 月 28 日の結果では、変

水層において水温の計算値が観測値より大きい。これらはいずれも、水面で吸収された輻射熱が、計算上かなり速く下層へ伝達され表層に蓄熱されないからである。観測からみれば実際には表層でかなり蓄熱され、その結果水温こう配が大きくなり、それに伴う安定性の増加により、下層への熱の伝達が抑制されると思われる。このことは、式(9)のような渦動拡散係数の表現だけではまだ不十分なことを示しており、モデルをさらに改良する必要がある。

図・6は湖流分布の例である(5月20日、水深0~2.5 mの表層および水深15 m~17.5 mの第7層)。

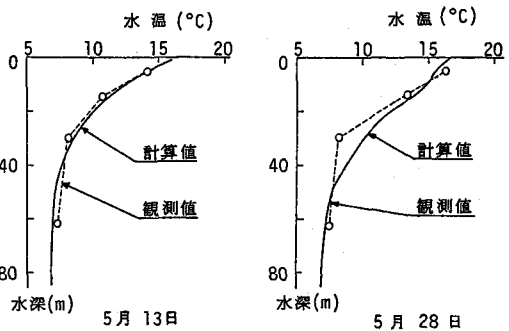


図・3



W: 風向・風速、 $Q_1$ : 瀬田川流量、 $Q_2$ : 琵琶湖疏水取水流量、 $Q_3$ : 流入流量  
CL: 曇量、HU: 相対湿度、 $Q_{50}$ : 全日放射量、T: 気温

図・4

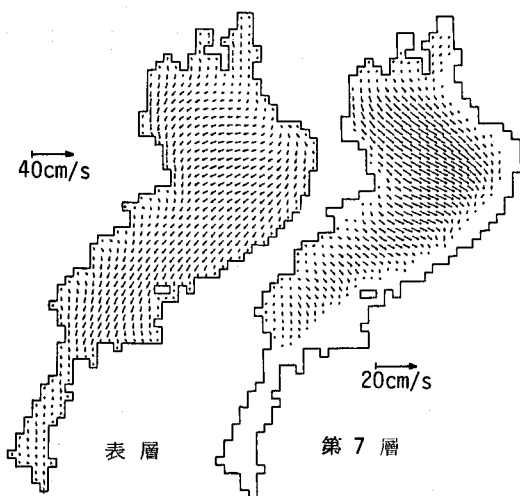


図・5

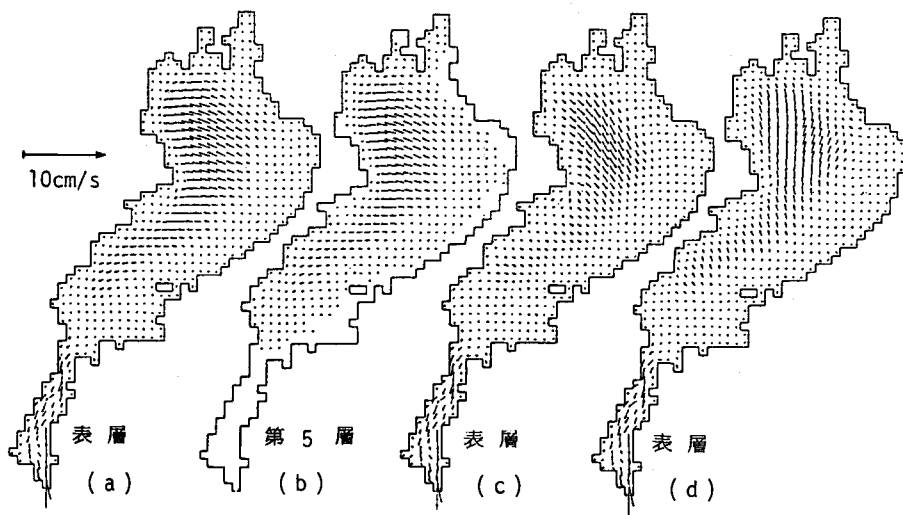
図・4の風の資料より明らかなように、この湖流はほぼ静穏時に相当しよう。これらの図より、計算上現われた湖流の特徴として、観測でしばしば認められている北湖の北部の反時計回りの環流がみられないこと、流向が水深方向に相当変化すること、平面的な環流でなく三次元的な環流の存在が予想されることなどが挙げられる。これらの特徴に対する観測的裏づけは現段階では乏しく、また計算だけに限ってもこれらの特徴の生ずる機構を明らかにできていない。今後詳しい検討を行う予定である。

## (2) 吹送流

図・7は、水温を全湖で一様とし、外力として5 m/sの南西の風を12時間継続して与え吹送流を発生させ、風が静止してから、(a)は44時間後の表層、(b)は同じ時間の第5層(水深10 m～12.5 m)、(c)および(d)は



図・6

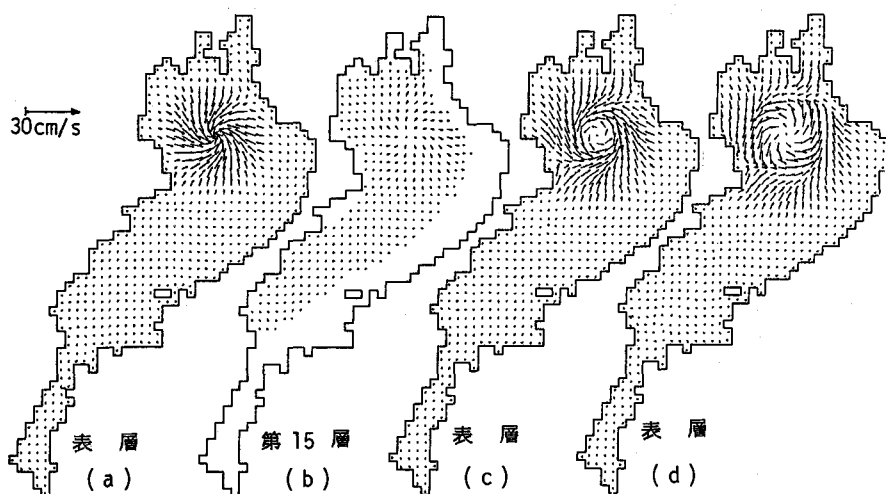


図・7

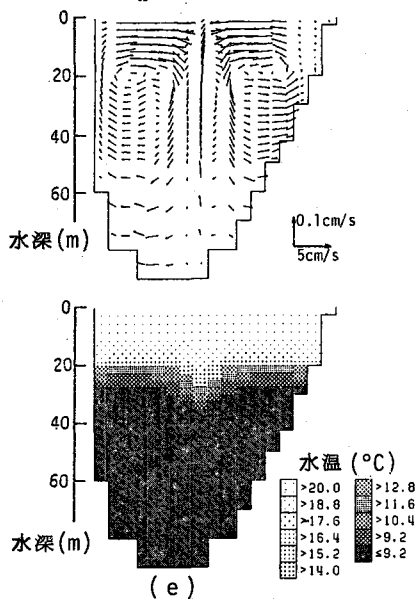
48時間および52時間後の表層の湖流を示したものである。(a)および(b)をみると、風が静止してある程度時間がたてば、水深の大きい北湖では上層から下層まで流向が同じであり、一つの流体塊のような挙動を示している。これは密度を一様にしたことによると考えられ、このような場合に限れば二次元一層のモデルが適用できそうである。(c)および(d)を比較すると、北湖では流速の大きさはほとんど変化していないが流向が時計回りに変化しており、その周期は図より約21.6時間と見積られる。Coriolis力による旋回の周期は $2\pi/f$ であり、琵琶湖では $f = 8.39 \times 10^{-5}$ /秒であるので、20.4時間である。つまり流向の変化の周期とほぼ一致しており、これから流向の時間的な変化はCoriolis力によるものと考えられよう。

## (3) baroclinic な流れ

観測によれば、北湖の北部にはしばしば反時計回り的大規模な環流が存在するといわれている。ここではこの環流の一成因とされるbaroclinicな流れを求めることにする。図・8は初期に北湖の北部の中央域に、周辺より水温が約4℃低い冷水塊を想定した場合の結果である(外力項は一切考えない)。(a)および(b)は計算



開始後2時間目の表層および第15層(水深35 m~37.5 m), (c)および(d)は3時間目および4時間目の表層のそれぞれ湖流の分布である。また(e)は3時間目のC-C'断面(図・3)の湖流および水温分布である。計算開始後の早い時期には、表層では冷水塊の中心に向う流れ、下層では逆に外向きの流れとなっている。これは密度の大きい冷水塊の下層への移動により表層の水位が低下し、その結果周辺の水温の高い水が中心部に集中するためである。このような流れは(e)によくみられるとおりで、冷水塊の中心では下降する流れ、周辺の湖岸では上昇する流れがそれぞれ現われ、全体として鉛直循環流が形成されている。水温分布をみても、上層の冷水塊の浸入により下層の等水温線は凹形状を示し、上の流れを裏づけている。(c)では冷水塊に向う流れにCoriolis力が作用し、反時計回りのかなり強い環流が形成されている。しかし、時間の経過とともに表層では(c)の収束する流れから(d)の発散する流れへ変化して



図・8

おり、環流が次第に消滅してゆくことを想像させる。上のような冷水塊は環流形成のひき金になることは計算上確かめられるが、観測では環流はかなり持続性をもつといわれているから、その機構についてはさらに検討が必要とされる。

## 6. explicit 化の試み

これまでの計算は式(8)で示される implicit な差分式による結果であった。この方法の問題点の一つとして、ここで行った大部分の計算では水位の時間的および空間的变化が極めて小さく、全湖にわたって最大数cmの程度の水位変化しか現われなかったことがある。implicit な差分式は、計算の安定条件を緩和させ時間的差分  $\Delta t$  を大きくすることを最大の目的とする方法であるが、そのために水理量の細かいスケールの変化を cut-off しているとみられる。琵琶湖の南湖においては4時間周期の変化が顕著であり、静振によるものとみられているが、これまでの計算ではこの水面振動は十分には再現されていない。このような問題点を考察する

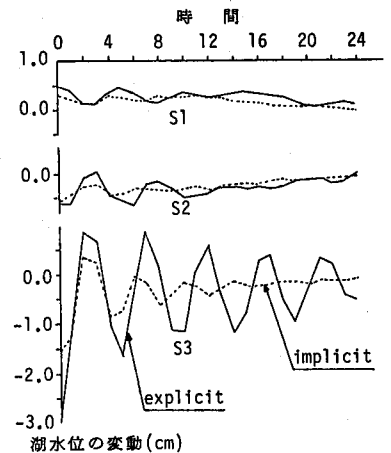
一助として、 $\Delta t$ に関する安定条件は相当厳しくなるが、explicitな差分法による計算を試みた。

計算法のexplicit化は比較的容易である。すなわち、式(8)に代って、ここでは次式を用いることにした。

$$\zeta = (1-\theta)\zeta^n + \theta\zeta^{n+1} \quad (10)$$

この変更により、運動方程式は $u^{n+2}$ および $v^{n+2}$ についてexplicitに解くことができ、これらをcolumnについて積分された連続式の差分式に代入すれば、 $\zeta^{n+2}$ が計算される。計算の他の部分はimplicitの場合と同じである(ただし、 $\Delta t = 10$ 秒)。

計算例として、5(2)で述べたのと同じ条件のもとでの吹送流による水面の振動を求めた。図・9は風の静止後24時間の湖水位の変化を示したものである。図中の実線はexplicit法、破線はimplicit法の結果であり、また地点S1、S2およびS3は図・3中に示されるとおりで、それぞれ葛籠尾崎沖、堅田沖および浜大津沖を表す。想定した程度の外力(南西5 m/sの風)の場合、とくにS3点では10 cm程度の振幅の静振が生ずることがあるので、ここで計算された水位の変化は、とくにimplicit法において過少のように考えられ、また減衰についてもやや速すぎるようである。計算でみられる水位の変化の位相は、S2およびS3では二つの計算法の結果は初期では一致しているが、S1においては逆になっている。S3における周期は、implicit法ではほぼ4時間で従来より認められている南湖の静振に対応しているのに対し、explicit法ではそれよりやや長くなっていることがみられるが、これらの差異は現段階では明らかにできていない。



図・9

## 7. むすび

以上、差分法によって琵琶湖の湖流を三次元的に解析する方法および計算例のいくつかについて述べた。特徴ある流れの発生の機構が明らかにされていないので、今後これらに関する考察をすすめるとともに、観測資料との比較による計算モデルの較正、種々の条件下における湖の応答特性の把握および年間にわたる長期的な解析などの研究を行いたいと考えている。

最後に、研究の全般にわたり御協力いただいた阿部徹氏(現埼玉県庁)および計算・作図に御助力いただいた宮川勇二氏(大学院学生)に謝意を表します。

文献 1) 岩佐・井上・劉・阿部:琵琶湖湖流の三次元的な解析, 京大防災研年報 26-B-2, 1983.

2) Leendertse and Liu: A three-dimensional model for estuaries and coastal sea, Vol. 2, RAND, 1975.