

水路湾曲部を通る高速流に関する数値解析

Numerical Simulations on High Velocity Flow through
Curved Open Channels

広島大学工学部 正 員 細 田 尚
 京都大学工学部 正 員 岩 佐 義 朗
 広島大学工学部 正 員 余 越 正一郎

1. 序 論

本研究は、定常な平面流れの解析法に関する基礎的研究で、解析例として高速湾曲流を取り上げる。定常な平面流れの基礎式は、平面流れの Froude 数 $Fr = q/\sqrt{gh}$ (q ; 流速ベクトルの大きさ, h ; 水深) が 1 より大か小かにより、双曲線と楕円型に分類される¹⁾。ここでは、流れが全域にわたって双曲型のときを考え、特性曲線法による解析法の定式化を述べる。そののち、数値解析を行い、解析結果を、von Kármán²⁾ の解、Lenau³⁾ の摂動解と比較・検討し、本解析法の利点を明らかにする。ただし、本研究では、固定格子点の特性曲線法を用いるため、同種の特性曲線の交差により発生する衝撃波については解析できない。

2. 基礎式と特性曲線

基礎式は Fig. 1 を参照して、次のように表わされる。

$$A_1 \frac{\partial U}{\partial r} + A_2 \frac{\partial U}{\partial \theta} = B \quad (1)$$

ここに、

$$U = \begin{pmatrix} h \\ v_r \\ v_\theta \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} rv_r & rh & 0 \\ g & v_r & 0 \\ 0 & 0 & v_r \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} v_\theta & 0 & h \\ 0 & \frac{v_\theta}{r} & 0 \\ \frac{g}{r} & 0 & \frac{v_\theta}{r} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -v_r h \\ \frac{v_\theta^2}{r} \\ -\frac{v_r v_\theta}{r} \end{pmatrix}$$

(ξ, η) 系への座標変換を考え、 η 上 ($\xi = \text{一定}$) で U の値と U の η 方向の微係数が与えられたとき、 ξ 方向の微係数が定まらない条件が特性条件⁴⁾と呼ばれ、

$$\left(A_1 \frac{\partial \xi}{\partial r} + A_2 \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right) \frac{\partial U}{\partial \xi} + \left(A_1 \frac{\partial \eta}{\partial r} + A_2 \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right) \frac{\partial U}{\partial \eta} = B$$

より、

$$\det \left| A_1 \frac{\partial \xi}{\partial r} + A_2 \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right| = 0 \quad (2)$$

で表わされる。

(2)式より、特性曲線は $A_2^{-1}A_1$ の固有値であって ($\xi = \xi(x, y) = \text{const.}$ 線のこう配)

$$\frac{dr}{r d\theta} = \frac{v_r}{v_\theta}, \quad \frac{v_r v_\theta}{v_\theta^2 - gh} \pm \frac{\sqrt{gh} \sqrt{v_\theta^2 + v_r^2 - gh}}{v_\theta^2 - gh} \quad (3)$$

となる。第一式は流線を表わしている。第二、三式より $v_\theta^2 + v_r^2 - gh$ の正負により双曲型と楕円型に分類される。ここに、 $A_2^{-1}A_1$ は次のように表わされる。

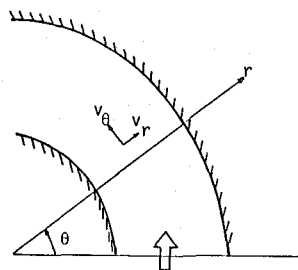


Fig. 1 座標系

$$\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1 = \mathbf{r} \begin{pmatrix} \frac{v_r v_\theta}{v_\theta^2 - gh}, \frac{h v_\theta}{v_\theta^2 - gh}, \frac{-h v_r}{v_\theta^2 - gh} \\ \frac{g}{v_\theta}, \frac{v_r}{v_\theta}, 0 \\ \frac{-g v_r}{v_\theta^2 - gh}, \frac{-gh}{v_\theta^2 - gh}, \frac{v_r v_\theta}{v_\theta^2 - gh} \end{pmatrix}$$

3. 特性曲線上の関係式⁵⁾

次に、(3)式の各々に対応する $\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1$ の左固有ベクトルを求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} \psi \frac{dr}{rd\theta} &= \frac{v_r}{v_\theta}; \mu_1 = \left(1, \frac{v_r}{g}, \frac{v_\theta}{g}\right) \\ \zeta_+ \frac{dr}{rd\theta} &= \frac{v_r v_\theta}{v_\theta^2 - gh} + \frac{\sqrt{gh} \sqrt{v_\theta^2 + v_r^2 - gh}}{v_\theta^2 - gh}; \mu_2 = \left(\frac{\sqrt{gh} \sqrt{v_\theta^2 + v_r^2 - gh}}{h v_\theta}, 1, -\frac{v_r}{v_\theta}\right) \\ \zeta_- \frac{dr}{rd\theta} &= \frac{v_r v_\theta}{v_\theta^2 - gh} - \frac{\sqrt{gh} \sqrt{v_\theta^2 + v_r^2 - gh}}{v_\theta^2 - gh}; \mu_3 = \left(-\frac{\sqrt{gh} \sqrt{v_\theta^2 + v_r^2 - gh}}{h v_\theta}, 1, -\frac{v_r}{v_\theta}\right) \end{aligned} \quad (4)$$

固有ベクトル μ_i を $\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{I} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \theta} = \mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{B}$ に左より乗ずる。このさい、便利のため、両辺を r で割り、 $\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1/r$ を $\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1$ として再定義する。特性曲線上の関係式として次式が得られる。

$$\mu_i \left(\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1 \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{I} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \eta} = \mu_i \left(\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{I} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \theta} \right) \Big|_{\xi=\text{const}} = \mu_i \mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{B} \quad (5)$$

ここに、 $\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{B}$ は次のように表わされる。

$$\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v_\theta}{r} \\ -\frac{v_r}{r} \end{pmatrix}$$

4. 固定格子点の特性曲線法

固定格子点の特性曲線法は、境界条件の与え方が水理学的であることより、同種の特性曲線の交差が生じない緩慢な開水路非定常流に用いられ、成果を収めてきた⁶⁾。本研究でも特性曲線網による解析は困難であるので、固定格子点の特性曲線法による差分を行なう。

Fig. 2 を参照して、特性曲線に沿った微係数が次のように近似される。

$$\begin{aligned} \zeta_+; \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \theta} &\approx \frac{U_j^{n+1} - U_B}{d\theta} \approx \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{d\theta}, \quad U \approx \frac{U_A + U_B}{2} \approx \frac{U_j^n + U_{j-1}^n}{2} \\ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial r} &\approx \frac{U_j^{n+1} - U_B}{dr_+} \approx \frac{U_j^n - U_B}{dr_+} \approx \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{dr_1} \end{aligned}$$

上式を用いて、 ζ_+ 上での関係式は次式のように差分化される。

$$(\mu_2)_j^n \left((\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1)_j^n \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{dr_1} + \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{rd\theta} \right) = (\mu_2)_j^n (\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{B})_j^n \quad (6-a)$$

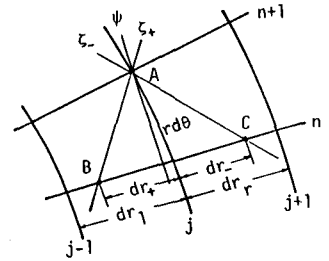


Fig. 2 差分格子

同様に, ζ^- 上で

$$(\mu_3)_j^n \left((A_2^{-1} A_1)_j^n \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{dr} + \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{rd\theta} \right) = (\mu_3)_j^n (A_2^{-1} B)_j^n \quad (6-b)$$

一方, 流線上の関係式は用いずに, 非定常な平面流れのばあいの特性曲線法⁷⁾で用いられているように, 連続式をそのまま差分化する。すなわち, 次式で表わされる差分式を用いる。

$$v_{\theta j}^n \frac{h_j^{n+1} - h_j^n}{d\theta} + h_j^n \frac{v_{\theta j}^{n+1} - v_{\theta j}^n}{d\theta} + \frac{r_{j+1} h_{j+1}^n v_{rj+1}^n - r_{j-1} h_{j-1}^n v_{rj-1}^n}{2dr} = 0 \quad (7)$$

以上をまとめると, 次式のように表わされる。

$$PU_j^{n+1} = QU_j^n + RU_{j+1}^n + SU_{j-1}^n + T \quad (8)$$

ここに,

$$P = \begin{pmatrix} \frac{(\mu_2)_j^n}{rd\theta} \\ \frac{(\mu_3)_j^n}{rd\theta} \\ \frac{v_{\theta j}^n}{d\theta}, 0, \frac{h_j^n}{d\theta} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{(\mu_2)_j^n}{rd\theta} - \frac{(\mu_2)_j^n (A_2^{-1} A_1)_j^n}{dr} \\ \frac{(\mu_3)_j^n}{rd\theta} + \frac{(\mu_3)_j^n (A_2^{-1} A_1)_j^n}{dr} \\ \frac{v_{\theta j}^n}{d\theta}, 0, \frac{h_j^n}{d\theta} \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{(\mu_3)_j^n (A_2^{-1} A_1)_j^n}{dr} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} \frac{(\mu_2)_j^n (A_2^{-1} A_1)_j^n}{dr} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} (\mu_2)_j^n (A_2^{-1} B)_j^n \\ (\mu_3)_j^n (A_2^{-1} B)_j^n \\ -\frac{r_{j+1} h_{j+1}^n v_{rj+1}^n - r_{j-1} h_{j-1}^n v_{rj-1}^n}{2dr} \end{pmatrix}$$

5. 境界条件の取り扱い

双曲型の性質より, 上流端で水量が与えられなければならない。問題となるのは側壁での境界条件であり, 次に, その取り扱いについて述べる。側壁では $v_r = 0$ であるから, 連続式より $h v_\theta = \text{一定} (= h_0 U_0 = M_0)$ となる。ここに, h_0, U_0 は上流端での水深と流速。これと, 側壁よりおろした ζ^+ あるいは ζ^- 上の関係式を連立することにより, 側壁での h, v_θ が求められる。(Fig. 3 参照)

具体的に, 左岸では ζ^- 上の関係式は

$$\frac{(\mu_{3,1})_1^n}{r_1 d\theta} h_1^{n+1} + \frac{(\mu_{3,3})_1^n}{r_1 d\theta} v_{\theta 1}^{n+1} = X^{-n}$$

となり, $h_1^{n+1} v_{\theta 1}^{n+1} = M_0$ とを連立して,

$$h_1^{n+1} = \frac{X^{-n} - \sqrt{(X^{-n})^2 - 4 \frac{(\mu_{3,1})_1^n}{r_1 d\theta} \cdot \frac{(\mu_{3,3})_1^n}{r_1 d\theta} M_0}}{2 \frac{(\mu_{3,1})_1^n}{r_1 d\theta}} \quad (9-a)$$

が得られる。ここに, X_1^{-n} は左岸での(8)式の右辺を表わす。

右岸でも同様に

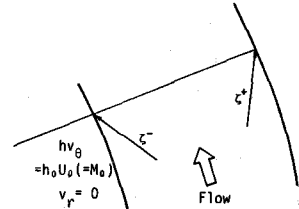


Fig. 3 側壁での境界条件

$$h_N^{n+1} = \frac{X^{n+1} + \sqrt{(X_n^{n+1})^2 - 4 \frac{(\mu_{2,1})^n}{r_{Nd}\theta} \cdot \frac{(\mu_{2,3})^n}{r_{Nd}\theta} M_0}}{2 \frac{(\mu_{2,1})^n}{r_{Nd}\theta}} \quad (9-b)$$

6. 解析結果と考察

解析に用いられた水理条件を Table 1 に示す。

(Fig. 4 参照)

解析結果を示す前に、従来の研究として、有名な von Kármán の解²⁾と、Lenau³⁾の結果を示す。

von Kármán の解は次のように表わされる。

$$\theta = \sqrt{3} \tan^{-1} \sqrt{\frac{3h/2H_0}{1-(3h/2H_0)}} - \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{3h/2H_0}{1-(3h/2H_0)}} - \theta_1 \quad (10)$$

ここに、 $H_0 = h_0 + \frac{U_0^2}{2g}$

一方、Lenau は、連続式、Bernoulli の式とさらに非回転の条件を用いた摂動解を求めている。その結果として、水深の first peak の値と位置が次式のように与えられる。

$$\frac{h_{\max}}{h_0} = 1 + Fr_0^2 \frac{B}{R + \frac{B}{2}}, \quad \theta_{\max} = \frac{B}{R + \frac{B}{2}} \cdot Fr_0 \quad (11)$$

まず、Run-1 の右岸、左岸の水深変化を Fig-5 に示した。

図には、von Kármán の解も示してあり、計算結果は von Kármán の解とよく一致している。 $\theta = 0.2$ 付近で計算不能となっており、これは、双曲型から楕円型への遷移が発生しているためである。このことを明確にするために、右岸での Froude 数の変化を Fig. 6 に示した。これより、Froude 数が 1 に近づく様子がわかる。つぎに、横断方向の水深、 θ 方向の流速分布を Fig. 7, 8 に示した。これにより、水深、 θ 方向の流速の変化過程が理解できる。

Fig. 9 に、Run-2 での右岸、左岸の水深変化を示した。図には von Kármán の解と、(11)式で表わされる first peak の値、位置も示してある。計算結果は、左岸水深の再下降域で若干の振動を示している。first peak の値、位置は(11)式とほぼ同一の値をとるが、Lenau の解のように、右岸と左岸で対称とはならない。計算結果は、右岸水深での再上昇域で発散したが、数値的不安定か、同種の特性曲線の交差によるものかわからない。

Fig. 10 に Run-2 の水深の横断分布を示した。

7. 結 論

本研究は、高速湾曲流に関して、固定格子点の特性曲線法を用いた解析法に関する定式化を行なうとともに、数値解析を行ない、計算結果を考察した。右岸での水深の上昇域は von Kármán の解はほぼ一致する。上昇とともに双曲線から楕円型に遷移し計算不能となるばあいと、上昇から下昇に移り、再上昇のとき発散するばあいが存在した。後者のばあい、計算法の改善により再検討する必要がある。さらに、基礎式を直接差分化して、楕円型の領域も含む解析法を検討して行きたい。

Table 1 水理条件

	Fr_0	R/B	B/h_0
Run-1	2.04	5.0	10.0
Run-2	2.04	10.0	10.0

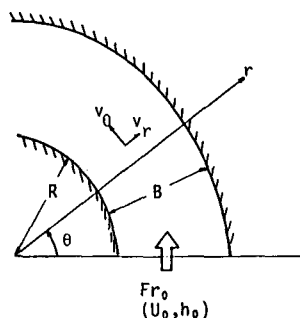


Fig. 4 記号の説明

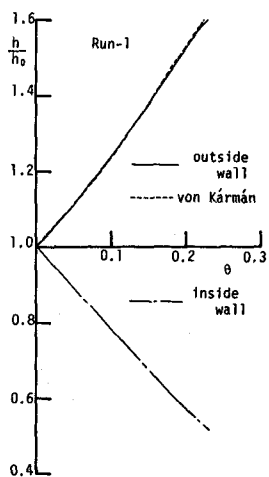


Fig. 5 右・左岸での水深変化 (Run-1)

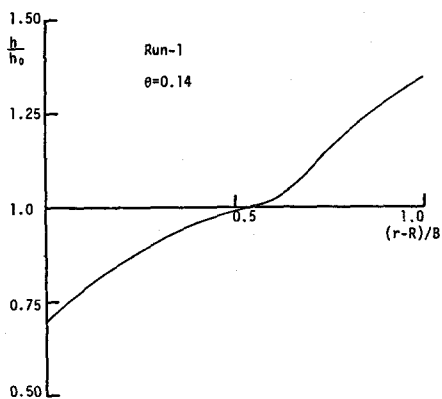
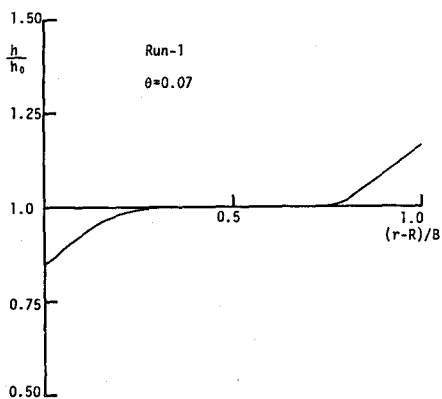


Fig. 7 水深の横断分布

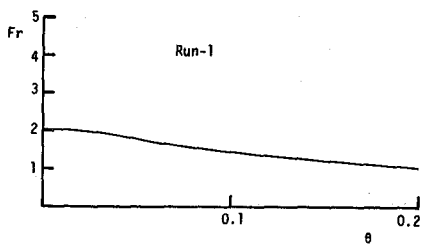


Fig. 6 右岸のFroude数の変化

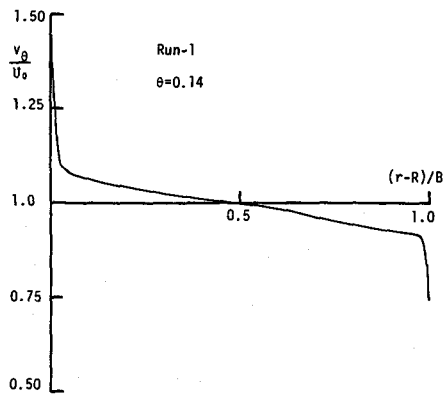
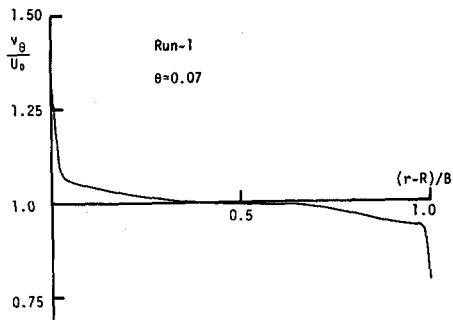


Fig. 8 流速の横断分布

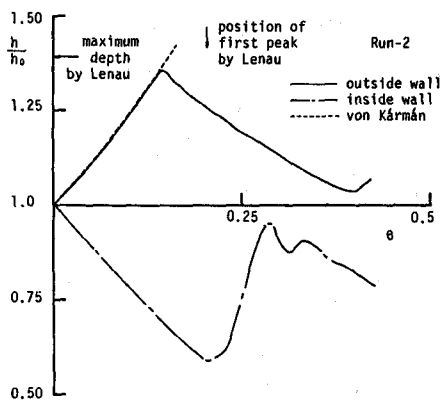


Fig. 9 右・左岸の水深変化 (Run-2)

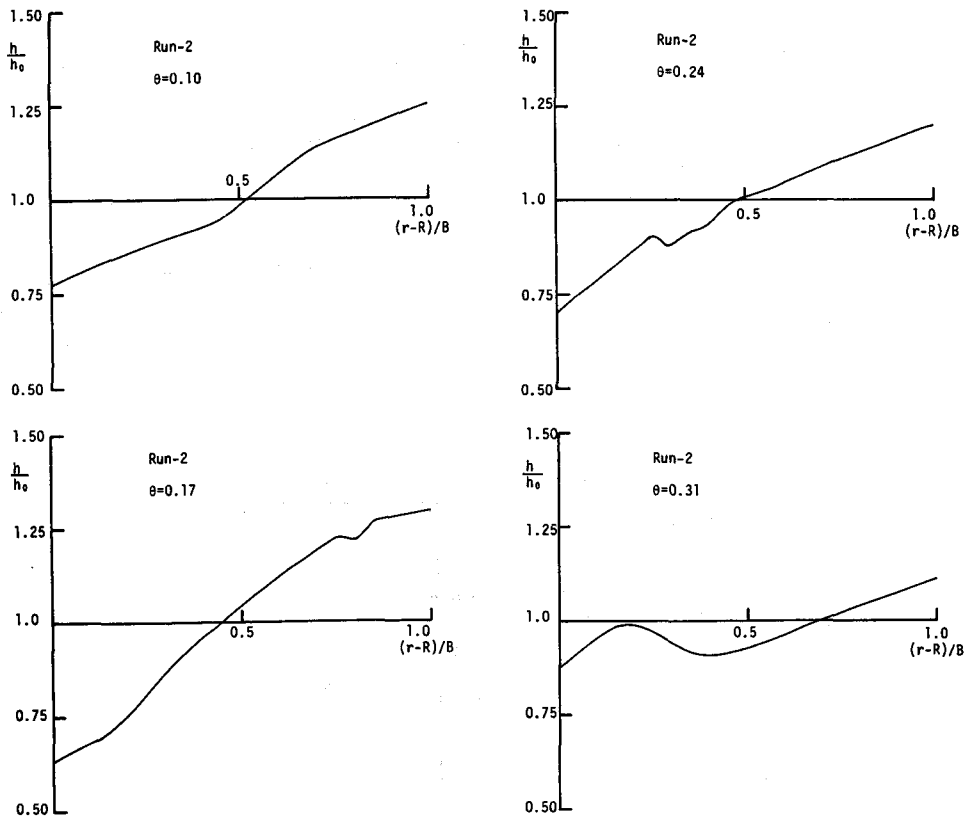


Fig. 10 水深の横断分布 (Run-2)

参考文献

- 1) 細田尚, 余越正一郎; 開水路における角柱背後の流れに関する数値解析, 第28回水理講演会論文集, 1984
- 2) 例えば, 岩佐義朗; 水理学, 朝倉土木工学講座 3, 朝倉書店, 1969
- 3) Lenau, C. W.; Supercritical flow in bends of trapezoidal section, Proc. ASCE, Journal of Engineering Mechanics Division, Vol. 105, No. EM1, 1979
- 4) Courant, R. and D. Hilbert; 斎藤利弥監訳 (1959-1968), 数理物理学の方法 4, 東京図書
- 5) 谷内俊弥, 西原功修; 非線形波動, 岩波書店, 1977
- 6) 岩佐義朗, 井上和也, 片山猛; 開水路非定常流の数値計算法について, 京大防災研究所年報19号B-2, 1976
- 7) 岩佐義朗, 井上和也, 吉田英信; 特性曲線法による二次元平面流れの数値解析法に関する2, 3の検討, 京都大学防災研究所年報24号B-2, 1981