

開水路の流れの三次元数値解析法
Three-Dimensional Analysis of Open Channel Flows

信州大学工学部 正員 富所 五郎
信州大学工学部 正員 荒木 正夫
大 阪 府 正員 吉田 宏司

1 はじめに

開水路における流れの三次元性は、合流部やわん曲部などにおいて顕著に現われており、その影響は河川工学上の種々の現象に関連しており無視できない。例えば、これらの部分の分散現象は流れの三次元的な流況に密接に依存している。このように、合流部やわん曲部などの流れの三次元構造を明らかにすることは河川工学上重要な意味を持っている。

開水路における流れの実験による研究は多く行われ、その三次元的特性が明らかにされている。一方、その数値解析による研究は、従来計算機の容量や計算時間の制約のため二次元解析までであったが、最近ようやく三次元解析が試みられるようになってきた。^{1), 2)}

本研究は、開水路における流れの新しい三次元数値解析法として、形状関数に水平方向の従来の区分的多項式と鉛直方向の余弦関数の積を用いる Galerkin 有限要素法を提案するものである。一般の河川などは、その水平長が水深に比し十数倍以上大きいことが多く、その数値計算メッシュは歪んだものとなり、数値安定性上望ましくない。上の変数分離型の形状関数は、このような水平長と水深の大きく異なる場合に対応するものとして考えられたものであり、また余弦関数は鉛直方向に直交性を有するため、時間積分法として陽型式を用いる時には、かなりの計算機容量や時計時間の節約が計られる。

2 流れの基礎式

開水路における流れの基礎式は

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + L \cdot u = g I_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + D \cdot u + \frac{\partial}{\partial z} \left(A_v \frac{\partial u}{\partial z} \right) \dots\dots\dots(1)$$

$$-\frac{\partial v}{\partial t} + L \cdot v = g I_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + D \cdot v + \frac{\partial}{\partial z} \left(A_v \frac{\partial v}{\partial z} \right) \dots\dots\dots(2)$$

$$-\frac{\partial w}{\partial t} + L \cdot w = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + D \cdot w + \frac{\partial}{\partial z} \left(A_v \frac{\partial w}{\partial z} \right) \dots\dots\dots(3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots(4)$$

ただし、

$$L = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}, \quad D = \frac{\partial}{\partial x} \left(A_h \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_h \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

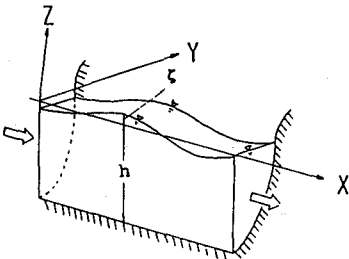


図-1 開水路の流れ

である。ここに、 x 軸は図-1に示すように x 軸方向の平均勾配 I_x に平行、 y 軸は y 軸方向の平均勾配 I_y に平行に水面付近にとり、また z 軸は xy 平面に垂直で上方を正とする。また、 u, v, w はそれぞれ x, y, z 方向の流速成分、 t は時間、 g は重力加速度、 p は水圧、 A_h, A_v はそれぞれ水平、鉛直渦動粘性係数、 ρ は水の密度である。

上式は、解析対象の代表物理量を用いて各項のオーダーを比較して微小項を無視することにより簡単化される。一般の河川の場合、代表水平長は代表水深に比し十数倍以上大きい。このために、式(3)の右辺第一項と第二項以外は無視でき、それを ρ を一定として z 方向に z から水面 ζ まで積分し、水面 $z = \zeta$ で大気圧を

$p_a = 0.0$ とすると、式(3)は

$$p = \rho g (-z + \zeta) \dots\dots\dots(5)$$

となる。また式(4)は、水底から水面まで積分し、水面と水底の運動学的条件を用いると

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial w}{\partial z} dz = w(\zeta) - w(-h) = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u(\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v(\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial(-h)}{\partial t} - u(-h) \frac{\partial(-h)}{\partial x} - v(-h) \frac{\partial(-h)}{\partial y} \dots\dots\dots(6)$$

$$\int_{-h}^{\zeta} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\zeta} u \cdot dz - u(\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + u(-h) \frac{\partial(-h)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\zeta} v \cdot dz - v(\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial y} + v(-h) \frac{\partial(-h)}{\partial y} \dots\dots\dots(7)$$

より

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\zeta} u \cdot dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\zeta} v \cdot dz = 0 \dots\dots\dots(8)$$

となる。ここで、 $\partial(-h)/\partial t$ は水底を時間的に変化しないものとして零としている。同様に、式(4)を水底より z まで積分すること

$$w(z) = - \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^z u \cdot dz - \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^z v \cdot dz \dots\dots\dots(9)$$

となる。式(5)、(9)を式(1)、(2)に代入すると

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^z u \cdot dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^z v \cdot dz \right) \frac{\partial u}{\partial z} = g I_x - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + D \cdot u + \frac{\partial}{\partial z} \left(A_v \frac{\partial u}{\partial z} \right) \dots\dots\dots(10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^z u \cdot dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^z v \cdot dz \right) \frac{\partial v}{\partial z} = g I_y - g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + D \cdot v + \frac{\partial}{\partial z} \left(A_v \frac{\partial v}{\partial z} \right) \dots\dots\dots(11)$$

が得られる。以上、式(10)、(11)、(8)が u 、 v 、 ζ を未知量とする開水路における三次元流れを支配する連立微分方程式である。

3 基礎式の有限要素法による離散化

上に示した基礎式をまず空間変数について離散化するために、図-2 に示す要素内で総和規約を用いてつぎに示す近似関数を定義する。

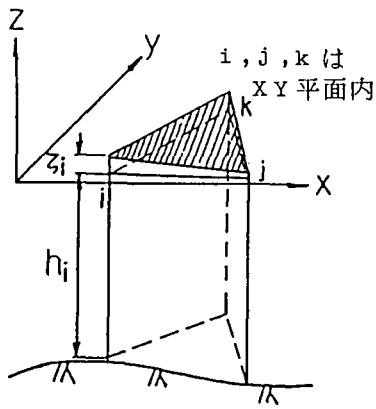


図-2 有限要素

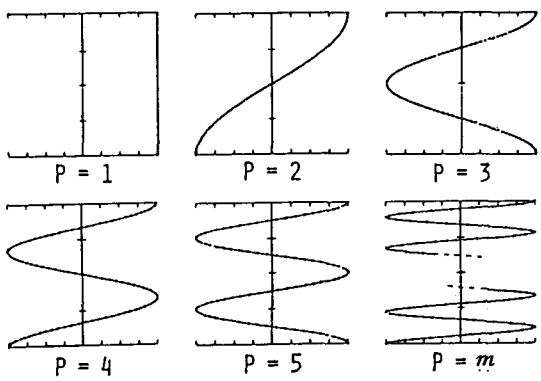


図-3 鉛直形状関数

$$\left. \begin{aligned} u &= N_i \cdot \cos(B_p \cdot (z - \zeta)) \cdot u_{pi} \\ v &= N_i \cdot \cos(B_p \cdot (z - \zeta)) \cdot v_{pi} \end{aligned} \right\}, B_p = \frac{(p-1)\pi}{h+\zeta}, (p=1, 2, \dots, m) \left\{ (i=i, j, k) \dots\dots\dots (12) \right.$$

$$\zeta = N_i \cdot \zeta_i$$

ここに、 $N_i = N_i(x, y)$ は従来より用いられている区分的多項式で、ここでは三角形一次要素のものをを用いる。また、 $\cos(B_p \cdot (z - \zeta))$ は図-3に示す鉛直方向の形状関数で、 m はその展開項数である。

上式を基礎式に代入し、重み関数として、式(10)、(11)には $N_i \cdot \cos(B_p \cdot (z - \zeta))$ を、式(8)には N_i をかけ重み関数の定義域内で積分すると、要素が一つしかない時

$$\left. \begin{aligned} M_{pqij} \cdot \dot{u}_{qj} + R_{Xpqrijk} \cdot u_{qj} \cdot u_{rk} + R_{Ypqrijk} \cdot v_{qj} \cdot u_{rk} \\ = g \cdot I_x \cdot D_{pi} - g \cdot EX_{pij} \cdot \zeta_j + K_{pqij} \cdot u_{qj} + FX_{pi} \\ M_{pqij} \cdot \dot{v}_{qj} + R_{Xpqrijk} \cdot u_{qj} \cdot v_{rk} + R_{Ypqrijk} \cdot v_{qj} \cdot v_{rk} \\ = g \cdot I_y \cdot D_{pi} - g \cdot EY_{pij} \cdot \zeta_j + K_{pqij} \cdot v_{qj} + FY_{pi} \\ M_{ij} \cdot \dot{\zeta}_j + KX_{qij} \cdot u_{qj} + KY_{qij} \cdot v_{qj} = 0 \\ (q=1, 2, \dots, m, \quad r=1, 2, \dots, m, \quad j=i, j, k, \quad k=i, j, k) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

となる。ここに、 $p=1, 2, \dots, m$, $i=i, j, k$ で u_{qj} , v_{qj} , ζ_j の上つきの $(\cdot)$ は時間微分を意味する。ここで、式(12)の近似関数の添字 p , i は重み関数のそれらと区別するために q, r や j, k などにかえている。各係数は、零以外の場合のみを示すとつぎのようである。

$$M_{pqij} = C \cdot \int_S N_i N_j h' ds, \quad (p=q=1: C=1.0, \quad p=q \neq 1: C=0.5, \quad p \neq q: C=0.0)$$

$$R_{Xpqrijk} = \int_S R_0 [N_i N_j \frac{\partial N_j}{\partial x} \cdot \frac{1}{4} (T_A + T_B + T_C + T_D) h' + N_i (\frac{\partial N_j}{\partial x} h' + N_j \frac{\partial h'}{\partial x}) N_k] T ds$$

$$(p+q-r=1: T_A=1.0, \quad p+q-r \neq 1: T_A=0.0, \quad p-q+r=1: T_B=1.0, \quad p-q+r \neq 1: T_B=0.0$$

$$-p+q+r=1: T_C=1.0, \quad -p+q+r \neq 1: T_C=0.0, \quad p+q+r=3: T_D=1.0, \quad p+q+r \neq 3: T_D=0.0$$

$$p=q=r=1: T=0.0, \quad q=1 \text{ and } p=r \neq 1: T=-0.25, \quad q=1 \text{ and } p \neq q: T=B_r^2 / (B_p^2 - B_q^2),$$

$$q > 1: T=0.25 (T_A + T_B - T_C) \cdot B_r / B_q)$$

$$R_{Ypqrijk} \text{ は } R_{Xpqrijk} \text{ の } \frac{\partial}{\partial x} \text{ を } \frac{\partial}{\partial y} \text{ にかえた式}$$

$$D_{pi} = C \cdot \int_S N_i h' ds, \quad (p=1: C=1.0, \quad p > 1: C=0.0)$$

$$EX_{pij} = C \cdot \int_S N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} h' ds, \quad (p=1: C=1.0, \quad p > 1: C=0.0)$$

$$EY_{pij} \text{ は } EX_{pij} \text{ の } \frac{\partial}{\partial x} \text{ を } \frac{\partial}{\partial y} \text{ にかえた式}$$

$$FX_{pi} = \int_S N_i \tau_{xi} (-1)^p ds, \quad FY_{pi} = \int_S N_i \tau_{yi} (-1)^p ds$$

$$KX_{qij} = C \cdot \int_S (N_i N_j \frac{\partial h}{\partial x} + N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} h') ds, \quad (q=1: C=1.0, \quad q > 1: C=0.0)$$

$$KY_{qij} \text{ は } KX_{qij} \text{ の } \frac{\partial}{\partial x} \text{ を } \frac{\partial}{\partial y} \text{ にかえた式}$$

$$M_{ij} = \int_S N_i N_j ds$$

$$K_{pqij} = -A_v \int_S N_i N_j B_p^2 \frac{h'}{2} ds - A_h \int_S (CX + CY) \cdot ds, \quad (\text{第一項は } p = q > 1 \text{ の時のみ})$$

$$CX = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} h', \quad (p=q=1)$$

$$CX = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{h'}{2} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} N_j + N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) \frac{\partial h'}{\partial x} \\ + N_i N_j \left\{ \left(\frac{\partial h'}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{B_p^2 h'}{6} - \frac{1}{4h'} \right) - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{B_p^2 h}{2} \right\}, \quad (p=q>1)$$

$$CX = \left\{ \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} N_j + N_i N_j \frac{\partial h'}{\partial x} - \frac{4B_p^2}{h'(B_p^2 - B_q^2)} \right] \left\{ \frac{\partial h}{\partial x} (-1)^{p+q} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right\} \right. \\ \left. - N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} \left\{ \frac{\partial h}{\partial x} (-1)^{p+q} + \frac{\partial h'}{\partial x} \right\} \right] \frac{B_q^2}{B_p^2 - B_q^2}, \quad (p \neq q)$$

$$CY \text{ は } CX \text{ の } \frac{\partial}{\partial x} \text{ を } \frac{\partial}{\partial y} \text{ にかえた式}$$

となる。ここに、 S は三角形 ijk 、 l はその辺、 r_{xi} 、 r_{yi} は底面に作用するせん断応力を水の密度で割った x 、 y 成分、 h は $h = h + \zeta$ である。

要素が多数存在する場合には、式(13)の各項を各要素について求め、これらを同じ重み関数について重ね合わせると、各節点の u_{qj} 、 v_{qj} 、 ζ_j などを未知量とする連立微分方程式が得られる。

得られた式は時間に関する常微分方程式になっているため、いろいろな常微分方程式の解法が利用できるが、本研究で Runge-Kutta 法を用いる。この時、 M_{pqij} は $p \neq q$ の時零となるために各展開項ごとのからみ合い (coupling) がなくなり、連立方程式は各展開項ごとにとける。このために、かなりの計算機容量や計算時間の節約が計られる。また、流速成分の各展開項に対する境界条件が同じ場合には、 M_{pqij} は p に対し係数 C が異なるのみで形が全く同じため、これらを各展開項に対し共通に用いることができるため、さらに計算機の容量や計算時間の節約が計られる。

4 係数の評価法と数値計算に伴う諸問題の解決法

上の解析モデルを非定常解析により定常解を求める問題に適用するが、以下に数値計算に必要な基礎式の各係数の評価法と数値計算に伴う諸問題の解決法についてのべる。

渦動粘性係数 渦動粘性係数は、乱流のシミュレーションモデルなどより定める方法もあるが、計算時間がかかるために、ここでは渦動粘性係数と渦動拡散係数に Reynolds 相似則を仮定し、Elderに従い

$$A = KU_* h' = K \sqrt{gh' l} h' = Kn \sqrt{g(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)} h' \frac{5}{8} \dots\dots\dots (14)$$

より評価する。ここに n はマンギングの粗度係数、上つきの(一)は鉛直平均を意味し、 K は定数で A_0 に対しては 0.068 である。一方 A_h は、渦動粘性係数を離散化のスケールの $4/3$ 乗に比例して変化する³⁾と仮定して、 $K = 0.068 \left(l/l' \right)^{4/3}$ (l : 水平メッシュ長、 l' : 最小乱子径)とする。

せん断応力 底面や壁面に作用するせん断応力は、摩擦こう配をマンギング式より求め、次式とする。

$$\tau_x = gn^2 \bar{u} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2} / h'^{1/3}, \quad \tau_y = gn^2 \bar{v} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2} / h'^{1/3} \dots\dots\dots (15)$$

時間きざみ幅 時間きざみ幅 Dt の決定は数値安定性上重要であるが、非線形方程式ではこれを一般的に決定する方法は確立されていない。本研究では次式を目安に Dt を決定した。

$$Dt \leq \frac{l}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2} + \sqrt{gh'}} \dots\dots\dots (16)$$

境界条件 壁と底でスリップ速度を認める。また上下流の境界条件としては、下流は流速と水位を拘束し上流は流量を指定した値となるよう境界条件の変更を行う。⁴⁾

場所的な数値振動の抑制 水平渦動粘性項を考慮しても得られる解には場所的な数値振動が現われるが、これをつぎの数値フィルターをかけ抑制した。第 k 節点の未知量を v_k としフィルターをかけた後のそれを $\bar{v}_k$ とすると $\bar{v}_k = (v_k + \overline{v}_k) / 2.0$ である。ここに、 $\overline{v}_k$ は第 k 節点を共有する要素のこの節点を除く未知量の平均値である。以下の計算例では、このフィルターを長波が解析領域を通過するに要する時間ごとに作用させた。

質量行列の集中化⁵⁾ 本解析モデルによりかなりの計算機容量や計算時間の節約が計られるが、さらにこれらを押し進める方法として質量行列の集中化法がある。これは、物理現象の変化が激しくない場合や近似解を求める場合には有効で、以下の計算例ではこの方法を用いている。

5 数値計算例

鉛直・水平二次元等流 上の解析モデルを鉛直・水平二次元等流に適用するが、 A_v を一定とすると基礎式は

$$gI_x + A_v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \dots\dots\dots(17)$$

となる。原点を底面に移し、水面 $z = h$ で水面こう配を零として、鉛直平均流速を $\bar{u}$ とすると

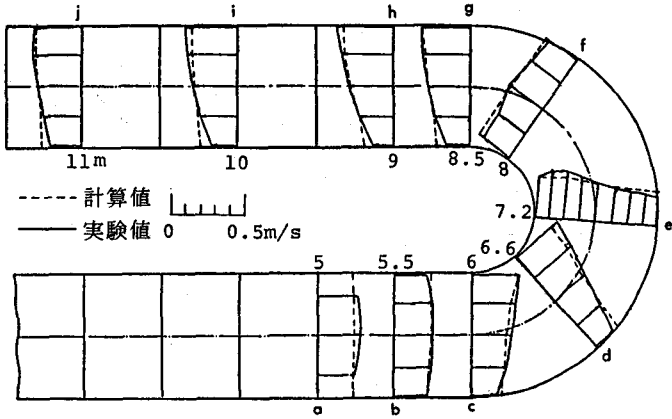
$$u = \bar{u} + \frac{1}{6} \frac{gI_x}{A_v} \{ h^2 - 3(h-z)^2 \} \dots\dots\dots(18)$$

となる。表－1 は $\bar{u} = 0.5 \text{ m/s}$, $I_x = 1 / 1000$, $h = 10 \text{ cm}$, $n = 0.0136$ とした時の解析解と幅 50 cm , 長さ 10 m の水路に節点数 123 , 要素数 160 のメッシュを組み、展開項数 m を変えた場合の数値解である。両者は底面を除くと良い一致を示している。

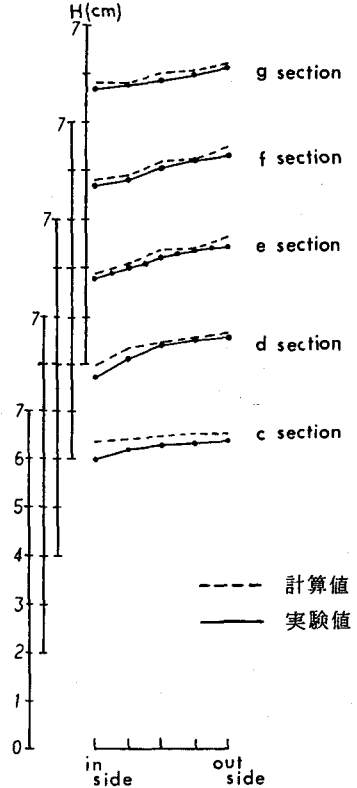
わん曲流 つぎに、図－4 に示す内半径 40 cm , 幅 80 cm のわん曲部と上流側 6 m , 下流側 3 m の直線部よりなる水平水路において、Rozovskii により行われた実験値との比較を行う。この水路に、 12.3 l/s の流

表－1 等流の流速

relative depth	velocity(m/s)				
	analitical solution	m=2	m=4	m=6	m=8
1.0	0.577	0.594	0.579	0.578	0.577
0.9	0.574	0.590	0.574	0.573	0.573
0.8	0.568	0.576	0.564	0.565	0.567
0.7	0.556	0.555	0.551	0.556	0.556
0.6	0.540	0.529	0.539	0.541	0.539
0.5	0.519	0.500	0.523	0.517	0.520
0.4	0.494	0.417	0.499	0.493	0.494
0.3	0.464	0.445	0.463	0.467	0.463
0.2	0.429	0.424	0.422	0.430	0.432
0.1	0.390	0.410	0.388	0.385	0.387
0.0	0.347	0.406	0.375	0.364	0.360



図－4 鉛直平均流速の分布



図－5 わん曲部の水位

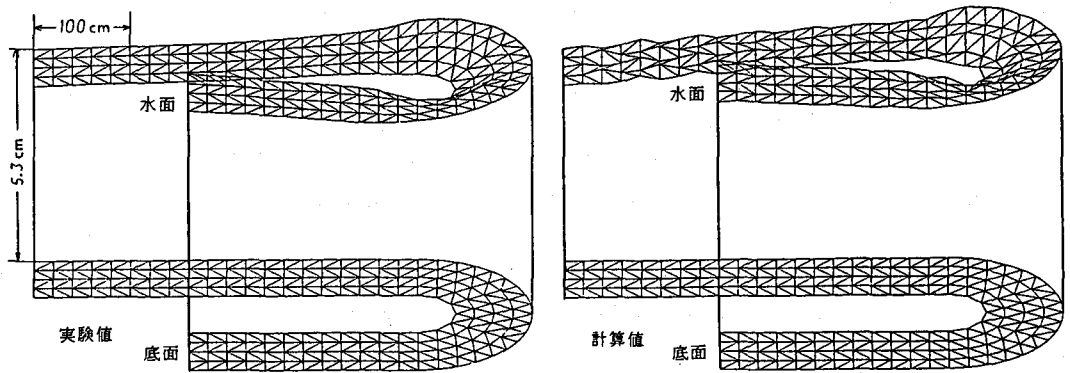


図-6 斜め上方30°からみた水面

量を流した時の各断面の鉛直平均流速を図-4に、水位を図-5、6に示す。またこれらの図にはわん曲部と上流側直線部を2.4 m、下流側直線部を4.0 mとした解析領域を用いた計算値も示してある。これらは、図-6に示すメッシュを用いて、水路のシェジ粗度係数 $C=32$ より $n=0.0197$ 、下流端で水深を5.3 cm、流速を29 cm/s、時間きざみを0.1 sとして非定常計算の収束値として求めている。計算値は実験値にはほぼ一致している。さらに図-7はわん曲に入ってから中心角が60°の断面の断面内の流速ベクトルの計算値である。実験では、二次流の測定は行われていないために検証はできないが、一般に言われている二次流の流況とよい一致を示している。

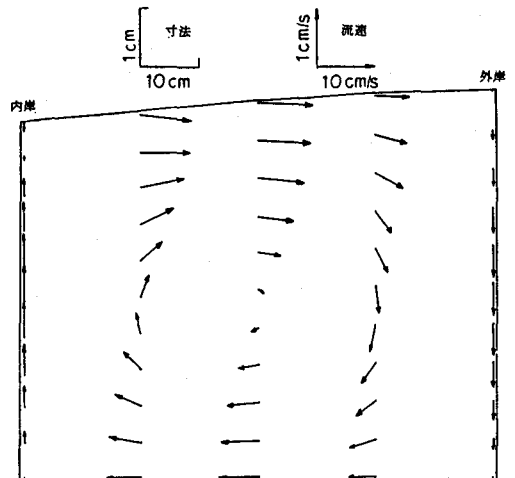


図-7 横断面内の流速分布($\theta=60^\circ$)

6 おわりに

以上のように、本研究で提案している解析モデルによる数値解は、解析解や実験値にはほぼ一致しており妥当なものである。しかし、実験値との比較による検証は十分でないので、今後は合流部における流れなどに適用しその妥当性を検討するとともに、渦動粘性係数やせん断応力の評価法などの検討も必要である。最後に、本研究は昭和59年度文部省科学研究費補助金、一般研究(C)、課題番号59550339の援助を受けている。記して深甚なる謝意を表する。

参考文献

- 1) 玉井・池谷：蛇行河道内の3次元解析，第27回水理講演会論文集，pp.91—96，1983.
- 2) 森・岸・吉岡：河道湾曲部における二次流の構造，第27回水理講演会論文集，pp.79—84，1983.
- 3) 例えば，土木学会編：土木工学における数値解析/流体解析編，サイエンス社，pp.27—28，1974.
- 4) 吉田・富所：開水路合流部の流れの数値解析法，土木学会年次学術講演会概要集，II—180，1983.
- 5) O.C.Zienkiewicz：The Finite Element Method, Third Edition, McGraw-Hill, pp.535—539，1977.
- 6) I.L.Rozovskii：Flow of Water in Bends of Open Channels, Israel program for scientific translation, 1961.