

Lagrange-Euler混合法による自由表面及び密度界面の数値解析

Numerical Analysis of Free Surface and Density Interface by the Mixed Lagrangian Eulerian Method

北海道大学工学部 正員 水田 洋

1 はじめに

河口部における塩水楔のような剪断密度流の数値解析を行う場合、界面が鮮明な弱混合型の流れ場では界面変動に着目する二層モデルが、混合が進んだ緩混合型や強混合型の流れ場では格子を固定したEuler格子系がよく用いられてきた。これらの方法で観測結果が説明された例は数多いが、弱混合型と緩・強混合型の間の場合、あるいはこれらの間の遷移にまでこの様なモデルを適用するには、いくつかの問題点がある。例えば、二層モデルでは流れ場の把握は不充分であるし、Euler格子系では速度勾配や密度勾配の大きな領域の動きに伴う人工的な拡散が持ちこまれる。また、Lagrange格子系では剪断流れ場での格子変形が大きい(図-1参照)。

様々な剪断密度流の場を数値解析によって調べるためには、より統一的な取り扱いが必要になってくる。この論文では、Lagrange-Euler混合法による定式化と、自由表面と密度界面の振動現象の数値解析例について述べ、このような取り扱いが可能であることを示す。

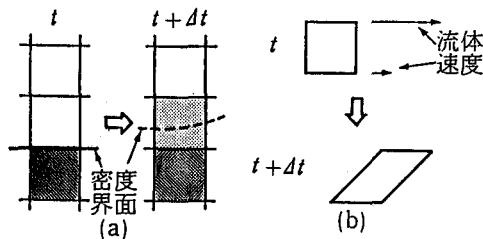


図-1 (a)界面変動によるEuler格子系での人工拡散の例と、(b)剪断流によるLagrange格子系での格子変形の例

2 定式化の方法

2-1 Lagrange-Euler混合法

流体中に設けた格子により、流体をセルに分ける。

セルの形は任意とし、その表面は、流体の速度 v とは異なる速度 u で移動が可能であるとする。 u と v の差から対流流束項が現われることを考慮すれば、各時刻で、セルに含まれる体積 V 、質量 M 、運動量 Mv に対して、次の積分型の保存則が成り立つ。

$$\frac{dV}{dt} = \oint dS \cdot (u - v) \text{ または } \oint dS \cdot v = 0, \quad (1)$$

$$\frac{dM}{dt} = \oint dS \cdot (u - v) \rho + (\text{拡散項}), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{dMv}{dt} = & - \oint dSp + \oint dS \cdot (u - v) \rho v \\ & + (\text{重力項}) + (\text{粘性項}) \end{aligned} \quad (3)$$

ただし、 $\oint dS$ はセルの表面積分を、 ρ 、 p は流体の質量密度、圧力を表す。積分型の保存則を用いれば、曲った境界、自由表面、密度界面も無理なく扱うことができ、計算結果の解釈も容易である。

式(1)~(3)で $u = 0$ とすれば Euler 法、 $u = v$ とすれば Lagrange 法となるが、ここでは u を任意に指定した方法、例えば流体速度の鉛直成分にのみ追従させて動かせるようにした。このような方法は、Lagrange-Euler 混合法¹⁾とよばれている。

2-2 時間微分の差分化

式(1)~(3)で時間微分を前進差分でおきかえると、

$$\begin{cases} V^{n+1} = V^n + \left[\oint dS \cdot (u - v) \right]^{(n)} \Delta t, \text{ または} \\ \left[\oint dS \cdot v \right]^{(n)} = 0, \end{cases} \quad (4)$$

$$M^{n+1} = M^n + \left[\oint dS \cdot (u - v) \right]^{(n)} \Delta t + (\text{拡散項})^n \Delta t, \quad (6)$$

$$\begin{cases} (Mv)^{(n)} = (Mv)^n - \left[\oint dSp \right]^{(n)} \Delta t, \text{ および} \\ (Mv)^{n+1} = (Mv)^{(n)} + \left[\oint dS \cdot (u - v) \rho v \right]^{(n)} \Delta t \\ + (\text{重力項})^n \Delta t + (\text{粘性項})^{(n)} \Delta t \end{cases} \quad (7)$$

のように、時刻 $n\Delta t$ での量により時刻 $(n+1)\Delta t$ での量を表わすことができる。ここで (n) は、 $n\Delta t$ での流体速度 $\mathbf{v}^{(n)}$ のかわりに、(7)式から求まる $\mathbf{v}^{(n)}$ を用いることを示す。 $\mathbf{v}^{(n)}$ を求めるためには、体積保存則(5)式が満たされるように圧力 p^n を求めなくてはならないが、その方法は2-4節に述べる。

セル表面の移動速度 $\mathbf{u}^{(n)}$ から $(n+1)\Delta t$ におけるセル表面の位置 $\mathbf{r}^{n+1}$ を定める式

$$\mathbf{r}^{n+1} = \mathbf{r}^n + \mathbf{u}^{(n)} \Delta t \quad (9)$$

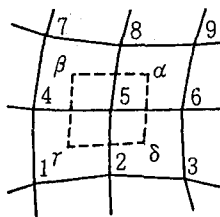
をつけ加えると、次の手順で、 $\mathbf{r}^n$, $\mathbf{V}^n$, M^n , $(M\mathbf{v})^n$ から $\mathbf{r}^{n+1}$, $\mathbf{V}^{n+1}$, M^{n+1} , $(M\mathbf{v})^{n+1}$ が求められる。

- 1) 体積保存則を満たす圧力 p^n を求める(5)式。
- 2) 圧力項を加算して、仮の運動量 $(M\mathbf{v})^{(n)}$ を求める(7)式。
- 3) $\mathbf{V}^n$, M^n , $(M\mathbf{v})^{(n)}$ よりセル平均密度 ρ^n と速度 $\mathbf{v}^{(n)}$ を計算して、セルの重心での値とする。
- 4) 指定した方法で、(必要なら $\mathbf{v}^{(n)}$ を用いて) $\mathbf{u}^{(n)}$ を求める。
- 5) 対流流束項、拡散項、重力項、粘性項を加算して、 $\mathbf{V}^{n+1}$, M^{n+1} , $(M\mathbf{v})^{n+1}$ を求める(式(4)、(6)、(8))。
- 6) 新しいセルの形を求める(9)式。

なお、振動現象の数値解析をする場合、時間方向の差分のとり方によっては、時間の刻み幅をいくら小さくしても振動が不安定になることがあるが、ここに示した方法で数値解析をした結果には、このような傾向は見られなかった。

2-3 空間の分割

この節以降では、図-2のように、セルを二次元の一般四辺形と考えて、セルまたはその重心上の物理量は $c = \alpha \sim \delta$ で、格子点(セルの頂点)上の物理量は $v = 1 \sim 9$ で示す。ここで $\mathbf{r}_c$, $\mathbf{r}_v$ はそれぞれ、セルの重心と格子点の位置ベクトルである。また、



セル上($c = \alpha \sim \delta$):

$\mathbf{r}_c$, $\mathbf{V}_c$, M_c , $(M\mathbf{v})_c$,

ρ_c , $\mathbf{v}_c$

格子点上($v = 1 \sim 9$):

$\mathbf{r}_v$, p_v , ρ_v , $\mathbf{v}_v$, $\mathbf{u}_v$

図-2 四辺形セルと、配置される物理量

格子点上の密度 ρ_v と速度 $\mathbf{v}_v$ とは、セル内の平均量としての密度 ρ_c と速度 $\mathbf{v}_c$ とから、内挿によって求められる。

2-4 圧力の決定

体積保存則(5)式を、セルではなく、図2の破線で示したような格子点を取り囲む領域に適用する。

$$\mathbf{r}_{\delta\beta} \equiv \mathbf{r}_\beta - \mathbf{r}_\delta \text{ のような記法を用いると、(5)式は、} \\ (\mathbf{v}_{\alpha\tau} \times \mathbf{r}_{\beta\delta} - \mathbf{v}_{\beta\delta} \times \mathbf{r}_{\alpha\tau})^{(n)} \cdot \mathbf{z} = 0 \quad (10)$$

と表わされる。ただし、 $\mathbf{z}$ は z 方向単位ベクトルである。ところで、 $\mathbf{v}_\alpha^{(n)}$ は(7)式より、

$$\mathbf{v}_\alpha^{(n)} = \mathbf{v}_\alpha^n - \mathbf{f}_\alpha^n \Delta t, \quad (11)$$

$$\mathbf{f}_\alpha^n \equiv (\mathbf{p}_\beta \mathbf{r}_{\beta\delta} + \mathbf{p}_\delta \mathbf{r}_{\delta\alpha} + \mathbf{p}_\gamma \mathbf{r}_{\gamma\alpha} + \mathbf{p}_\epsilon \mathbf{r}_{\epsilon\alpha}) \times \mathbf{z} / M_\alpha^n \quad (12)$$

のように周囲4個の格子点上の圧力 p_v を含み、これは $\mathbf{v}_\beta^{(n)}$, $\mathbf{v}_\gamma^{(n)}$, $\mathbf{v}_\delta^{(n)}$ についても同様だから、結局(5)式からは、次のような9個の格子点上の p_v の間の関係式が得られることになる。

$$(\mathbf{v}_{\alpha\tau} \times \mathbf{r}_\tau^* - \mathbf{v}_{\beta\delta} \times \mathbf{r}_\beta^*)^{(n)} \cdot \mathbf{z} / \Delta t \\ = p_\gamma (R_\gamma^\beta) + p_\delta (R_\delta^\beta + R_\delta^\alpha) + p_\epsilon (R_\epsilon^\alpha) \\ + p_4 \left(\frac{R_4^\beta}{+R_4^\gamma} \right) + p_5 \left(\frac{R_5^\beta + R_5^\alpha}{+R_5^\gamma + R_5^\delta} \right) + p_6 \left(\frac{R_6^\alpha}{+R_6^\gamma} \right) \\ + p_1 (R_1^\delta) + p_2 (R_2^\delta + R_2^\alpha) + p_3 (R_3^\alpha) \quad (13)$$

ただし、 $v = 1, 2, 3, 4$ に対して

$$\begin{cases} M_\alpha^n \mathbf{R}_v^\alpha \equiv \mathbf{r}_{68}, \mathbf{r}_{95}, \mathbf{r}_{86}, \mathbf{r}_{59}, \\ M_\beta^n \mathbf{R}_v^\beta \equiv \mathbf{r}_{57}, \mathbf{r}_{84}, \mathbf{r}_{75}, \mathbf{r}_{48}, \\ M_\gamma^n \mathbf{R}_v^\gamma \equiv \mathbf{r}_{24}, \mathbf{r}_{51}, \mathbf{r}_{42}, \mathbf{r}_{15}, \\ M_\delta^n \mathbf{R}_v^\delta \equiv \mathbf{r}_{35}, \mathbf{r}_{62}, \mathbf{r}_{53}, \mathbf{r}_{26} \end{cases} \quad (14)$$

を定義し、更に

$$\mathbf{r}_\alpha^* \equiv \mathbf{r}_{\delta\beta}, \mathbf{r}_\beta^* \equiv \mathbf{r}_{\alpha\tau}, \mathbf{r}_\gamma^* \equiv \mathbf{r}_{\beta\delta}, \mathbf{r}_\delta^* \equiv \mathbf{r}_{\tau\alpha} \quad (15)$$

とおくとき、

$$R_v^c \equiv \mathbf{R}_v^c \cdot \mathbf{r}_c^* \quad (c = \alpha \sim \delta, v = 1 \sim 4) \quad (16)$$

となっている。

微分型の運動量保存式に非圧縮性の条件を用いれば、圧力に対するPoisson方程式が得られるが、(13)式はPoisson方程式を差分化したものに相当する。

明らかに、1個の格子点には1個の破線領域が対応する。格子点には未知数としての p_v が、領域には方程式(13)が結びついているので、未知数と方程式の個数は常に等しく、流体の各部分の(13)式を連立させれば、全ての格子点上の p_v を求めることができる。

ここではこの連立方程式の解を、直接法の一つであ

るEVP法を用いて求めた。

2-5 格子点の移動方法

Lagrange-Euler混合法では、流れ場の様子や境界の種類に応じて、セル表面の移動方法、言いかえると、格子点の移動速度 u_v の選び方を工夫することができる。例えば、図-3のように自由表面上の格子点の水平方向の動きを制限して鉛直方向にのみ動き得るようにするには、自由表面上の流体速度 v_v を鉛直方向と接線方向の成分に $v_v = v_b b + v_p p$ のように分け(b , p はそれぞれ鉛直方向と接線方向の単位ベクトル)、鉛直成分のみをとって、

$$u_v = v_b b, \quad v_b = (v_v \times p) \cdot z / (b \times p) \cdot z \quad (17)$$

とすれば、常に格子点を自由表面上に置くことができる。密度界面上の格子点も同様に考えられる。

また、接線が鉛直に近い平滑な壁面に沿って格子点を動かす場合は、 b , p として壁面の接線方向および法線方向の単位ベクトルを選べばよい。

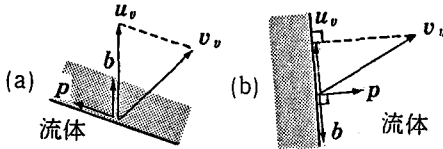


図-3 (a)自由表面、および(b)接線が鉛直に近い平滑な壁面上の格子点移動速度 u_v

2-6 対流流束項

式(4)~(8)にある対流流束項の一表面からの寄与を

$$\left[\int dS \cdot (u-v) q \right]^{(n)} dt \quad (18)$$

と表わすことになる。ここで q は式(4)、(6)、(8)に応じて1、 ρ 、 ρv_x および ρv_y である。以下では、これを格子点とセルの重心上での量で表現していく。

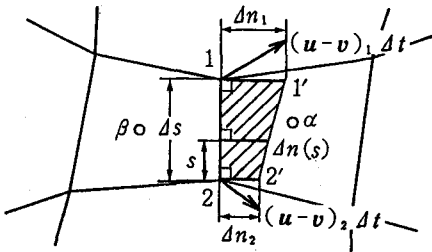


図-4 対流流束項の意味

量(18)は、図-4のような隣りあったセル α , β の表面21を横切る流れと境界自身の移動との差によって、時間 dt の間にセル同士で実質的にやり取りされる領域に含まれる体積、質量、運動量等の保存量の大きさにあたる。この領域は、図-4では斜線で示した四辺形 $22'1'1$ であり、セルの表面の移動速度 u と流体速度 v との差の表面に対する法線成分から決まる(接線成分からの寄与は、 dt について高次なので無視する)。したがって、対流流束項は、

$$(18) = \iint_{\square 22'1'1} dV q = \int_0^{ds} ds \int_0^{\Delta n(s)} \frac{dn(s)}{dn} q(n, s) \quad (19)$$

という形になる。ここで ds は表面21の長さ、

$\Delta n(s)$ は格子点2から表面上を距離 s だけ進んだ位置での領域の厚みである。

n が充分小さければ、 q を n でTaylor展開して、

$$q(n, s) \simeq q(0, s) + n \left(\frac{\partial q}{\partial n} \right)_{AV} \quad (20)$$

と置くことができる。ただし、 $(\partial q / \partial n)_{AV}$ は q の法線微分を領域 α β 2内で平均したものであり、

$$\left(\frac{\partial q}{\partial n} \right)_{AV} = \frac{r_{21} \cdot \{ r_{21} (q_\alpha - q_\beta) - r_{\beta\alpha} (q_1 - q_2) \}}{ds (r_{\beta\alpha} \times r_{21}) \cdot z} \quad (21)$$

と求められる。また、 $0 < s < ds$ で $q(0, s)$ と $\Delta n(s)$ の変化が緩やかであれば、

$$q(0, s) \simeq \frac{q_2 \cdot s + q_1 \cdot (ds - s)}{ds}, \quad (22)$$

$$\Delta n(s) \simeq \frac{\Delta n_2 \cdot s + \Delta n_1 \cdot (ds - s)}{ds} \quad (23)$$

とおくことができる。ただし、

$$\begin{cases} \Delta n_1 \cdot ds \equiv (u-v)_1 dt \times r_{21} \equiv S_1, \\ \Delta n_2 \cdot ds \equiv (u-v)_2 dt \times r_{21} \equiv S_2 \end{cases} \quad (24)$$

を定義した。(20)~(23)を(19)式に代入すれば、

$$(18) = \frac{q_1 (2S_1 + S_2) + q_2 (S_1 + 2S_2)}{6} + Ddt \cdot \left(\frac{\partial q}{\partial n} \right)_{AV} ds, \quad (25)$$

$$Ddt \equiv \frac{S_1^2 + S_1 \cdot S_2 + S_2^2}{6 ds^2} \quad (26)$$

の形にまとめられる。(25)式の第1項は $q(0, s) \Delta n(s)$ の表面21上での積分、第2項はいわゆる人工粘性項である。こうして量(18)は、 q_1 , q_2 , q_α , q_β , $(u-v)_{1,2}$ と各点の座標で表現されたことになる。

(26)式で求めた量をセル β の保存量に加え、その分

だけセル α の保存量から差し引けば、必ず保存則は満たされる。なお、(6)式の拡散項と(8)式の粘性項は、 D_m を分子拡散係数、 μ_m を分子粘性係数として、

$$\left[\int dS D_m \frac{\partial \rho}{\partial n} \right]^{(n)} \Delta t \simeq D_m \Delta t \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial n} \right)_{AV} \Delta s, \quad (27)$$

$$\left[\int dS \mu_m \frac{\partial v}{\partial n} \right]^{(n)} \Delta t \simeq \mu_m \Delta t \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)_{AV} \Delta s \quad (28)$$

と表わされるので、これらの項は(25)式に含めることができる。

本節の方法を他の方法と比較するために、一次元の偏微分方程式 $(\partial u / \partial t) + v(\partial u / \partial x) = 0$ を積分型に直し、これに本節の方法を適用して(25)式にあたる式を導く。このとき $D \Delta t = (v \Delta t)^2 / 2$ となるが、これは上の偏微分方程式をLax-Wendroff法で差分化した時に得られる人工粘性係数と同じものである²⁾。すなわち、本節の方法はLax-Wendroff法を拡張したものと考えることができる。

2-7 境界条件の分類

流体力学の数値解析では、問題に応じて種々の境界条件が用いられるが、これらは次のような条件の組みあわせによって表現できる。

- 1) 境界は移動可能か否か？
- 2) 境界密度 ρ と、密度流速(勾配) j のいずれを既知量として与えるか？
- 3) 境界速度の接線成分 v_s と、境界応力の接線成分 σ_s のいずれを既知量として与えるか？
- 4) 境界速度の法線成分 v_n と、境界応力の法線成分(圧力を含む) σ_n のいずれを既知量として与えるか？

境界の種類と条件の与え方の例を表-1に示す。ここでは、与えられる量と求めるべき量を記号で示してある。問題によっては、条件の別な組み合わせ

表-1 境界の種類と条件の与え方

種 類	移動	既 知 量	未 知 量
①粘 着 壁	可	v_n, v_s, j	σ_n, σ_s, ρ
②平 滑 壁	可	v_n, σ_s, j	σ_n, v_s, ρ
③流 入	不可	v_n, v_s, ρ	σ_n, σ_s, j
④流 出	不可	σ_n, σ_s, j	v_n, v_s, ρ
⑤自由表面	可	σ_n, σ_s, j	v_n, v_s, ρ
⑥密度界面	可	σ_s, j	v_n, σ_n, v_s, ρ

も考えられる。本論文で取り上げた水槽内の流体の自由表面や密度界面の振動の例では、側壁と底面を②平滑壁、上部を⑤自由表面とした。条件1)~4)の内容を以下に述べる。

1) 境界の移動

境界での流体速度が与えられるか求められるかすれば、2-5節に述べた方法に従って、境界上の格子点の移動速度を求めることができる。①、②では、もし壁面が移動するなら、格子点を法線方向に動かしても構わない。③、④では、 v_n や σ_n を与える位置が決められているため、格子点を法線方向に動かすことはできない。⑤、⑥では、求められた流体速度を用いて、格子点の移動速度が決められる。

2, 3) ρ と j 、 v_s と σ_s

ρ が与えられた境界では、 j を求めて境界に接するセルの保存量に加え、 j が与えられた境界では、この量を保存量に加えると共に、これから境界上の ρ を求める。以上のことを行うには、図-5に示すように、境界に接したセルの重心 β に最も近い境界上の点 α を設け、ここでの ρ の値によって j を

$$j = D_m \frac{\partial \rho}{\partial n} \simeq D_m \frac{\rho_\alpha - \rho_\beta}{dn} \quad (29)$$

と表わせばよい。ここで dn は α と β の間の距離である。同様に、 v_s と σ_s との間の関係は、セル β が境界に接する部分の長さを $|r_{21}| = \Delta s$ 、 α における境界の接線方向単位ベクトルを s_α とすれば、

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \mu_m \left(\frac{\partial v_n}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial n} \right) \\ &\simeq \mu_m \left[\frac{(v_n)_1 - (v_n)_2}{\Delta s} + \frac{(v_s)_\alpha - s_\alpha \cdot v_\beta}{dn} \right] \quad (30) \end{aligned}$$

で表わされ、もし体積保存則の成立を前提にするなら、

$$\sigma_s = \mu_m \frac{\partial v_s}{\partial n} \simeq \mu_m \frac{(v_s)_\alpha - s_\alpha \cdot v_\beta}{dn} \quad (31)$$

となる。

j の値は①、②、④、⑤、⑥では0とする。また、 v_s の値は④で静止した壁、③で水平流入の場合は0と置くことになる。更に、 σ_s の値は②、④、⑤、⑥

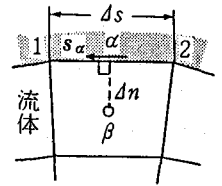


図-5 境界での法線勾配

では0とする。(④の場合は、 j と σ_s に混合の程度に応じた値を与えるとか、あるいは σ_s を与えるのではなく界面の両側からの内挿値を v_s として与えるなど、議論の余地がある。)

4) v_n と σ_n

法線方向の境界条件は、体積保存則と密接な関係がある。図-6に破線で示したように、境界上の格子点を取り囲むような領域を設け、この領域に体積保存則

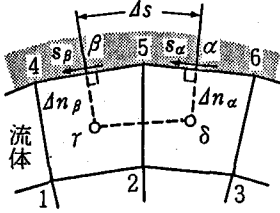


図-6 境界における体積保存則

(5)式を適用すれば、

$$\begin{aligned} & [(v_n)_\alpha \Delta s - (v_s)_\alpha \Delta n_\alpha + v_\delta \times r_{r\alpha} \\ & + (v_n)_\beta \Delta s + (v_s)_\beta \Delta n_\beta + v_\tau \times r_{r\beta}]^{(n)} = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

が得られる。ただし、 α と β は $r_{s\alpha} \perp r_{s\beta}$, $r_{\beta\tau} \perp r_{s\delta}$ を満たす点、 Δs , Δn_α , Δn_β は図に示したような長さである。

③式は、圧力項を含んだ $v^{(n)}$ によって満たされている。式(11)、(12)、(14)と同様に $v^{(n)}$ を表わせば、

$$v_{\delta, \tau}^{(n)} = v_{\delta, \tau}^{(n)} - f_{\delta, \tau}^{(n)} \Delta t, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} f_{\delta}^{(n)} & \equiv (p_\delta R_\delta^1 + p_\delta R_\delta^2 + p_\delta R_\delta^3 + p_\delta R_\delta^4) \times z, \\ f_{\tau}^{(n)} & \equiv (p_\delta R_\tau^1 + p_\delta R_\tau^2 + p_\delta R_\tau^3 + p_\delta R_\tau^4) \times z, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} M_\delta^1 R_\delta^1 & \equiv r_{3\delta}, r_{6\delta}, r_{5\delta}, r_{2\delta}, \quad (v=1, 2, 3, 4) \\ M_\tau^1 R_\tau^1 & \equiv r_{24}, r_{51}, r_{42}, r_{15} \end{aligned} \quad \text{に対して} \quad (35)$$

となる。ところで $(v_s)_{\alpha, \beta}^{(n)}$ は、 v_s が与えられた境界では既知量であるが、 σ_s が与えられた境界では③または③1式によって $v_{\delta, \tau}^{(n)}$ から決まる。そこで、両方の場合をまとめて次のように表わす。

$$(v_s)_{\alpha, \beta}^{(n)} = (v_s)_{\alpha, \beta}^{(n)} - k s_{\alpha, \beta} \cdot f_{\delta, \tau}^{(n)} \Delta t \quad (36)$$

ただし、 v_s が与えられた場合は、

$$(v_s)_{\alpha, \beta}^{(n)} = v_s \text{ (既知量)}, k = 0, \quad (37)$$

また、 σ_s が与えられた場合は式(31)、(33)より、

$$(v_s)_{\alpha, \beta}^{(n)} = \sigma_s \Delta n / \mu_m + s_{\alpha, \beta} \cdot v_{\delta, \tau}^{(n)}, k = 1 \quad (38)$$

とおく。式(33)、(34)、(36)を③2式に代入すれば、次のような $p_1 \sim p_6$ と $(v_n)_{\alpha, \beta}^{(n)}$ の関係係数が得られる。

$$\begin{aligned} & [-(v_s)_\alpha \Delta n_\alpha + (v_s)_\beta \Delta n_\beta + (v_\delta \times r_{r\alpha} + v_\tau \times r_{r\beta}) \cdot z]^{(n)} / \Delta t \\ & = -[(v_n)_\beta + (v_n)_\alpha]^{(n)} \Delta s / \Delta t \\ & + p_4 (R_\delta^1) + p_5 (R_\tau^1 + R_\delta^2) + p_6 (R_\delta^3) \\ & + p_1 (R_\delta^4) + p_2 (R_\tau^2 + R_\delta^3) + p_3 (R_\delta^4) \end{aligned} \quad (39)$$

ここでは、

$$R_c^v \equiv R_c^v \cdot r_c^* \quad (c = r, \delta, v = 1 \sim 4), \quad (40)$$

$$\begin{cases} r_r^* \equiv r_{\beta\delta} - k \Delta n_\beta n_\beta, n_\beta \equiv s_\beta \times z, \\ r_\delta^* \equiv r_{r\alpha} + k \Delta n_\alpha n_\alpha, n_\alpha \equiv s_\alpha \times z \end{cases} \quad (41)$$

を定義した。

v_n が与えられた境界では、③9式で $(v_n)_{\alpha, \beta}$ を既知量で置きかえると $p_1 \sim p_6$ の関係となるが、 $\Delta n_{\alpha, \beta} \rightarrow 0$ として微分型の表現に直せば $\partial p / \partial n$ の値を指定する式、すなわち圧力に対するNeumann型の境界条件が得られる。③9式は③3式と連立させて圧力を求めるために用いる。

圧力も含めて σ_n が与えられた境界では、③3式を解く際には $p_1 \sim p_6$ に既知量を置く。③9式は、各格子点での圧力 p_0 が得られた後で $(v_n)_s^{(n)} = [(v_n)_\beta + (v_n)_\alpha]^{(n)} / 2$ を求めるために用いるが、その代わりに、 $v_{\delta, \tau}^{(n)}$ が求まってからこれを③2式に代入してもよい。③2式で $\Delta n_{\alpha, \beta} \rightarrow 0$, $\Delta s \rightarrow 0$ として微分型の表現に直せばいわゆる表面条件が導かれる。

最後に密度界面では、たとえ密度や接線速度成分が界面で不連続であっても、法線速度成分と圧力は連続である。境界上の格子点に v_n と p を置き、これらを界面の両側から共通に引用するだけでこの条件は満たされるが、このとき、 v_n と p は共に未知量であって、内部での p と同時に求められるべきものである。ただし、図-6のような領域を界面の両側に対にして設ければ、未知量の数と方程式の数とは一致する。

3 結 果

滑らかな内壁を持つ二次元水槽に満たされた流体の自由表面と密度界面の振動現象を、前章で述べた方法で数値的に再現した例を以下に示す。

図-7は、長さ $l = 2.0$ mの水槽に深さ $h = 0.3$ mまで水を満たし、水面中央を $-a \cos(2\pi x / l)$ ($a = 0.015$ m, x : 水槽の端から測った水平距離)の形に持ち上げて放した時の自由振動を、約 $1/4$ 周期毎に示したものである。流体は 6×6 個のセルに分け、時間刻みは $\Delta t = 0.05$ 秒に選んである。セルの重心の矢印の長さの $1/10$ が、流体の速さに Δt をかけた距離を表わす。数値解析が安定であるためには、この距離がセル内に収まっていなければならない。

図-8は、水面の中央と端の高さの時間変化を表

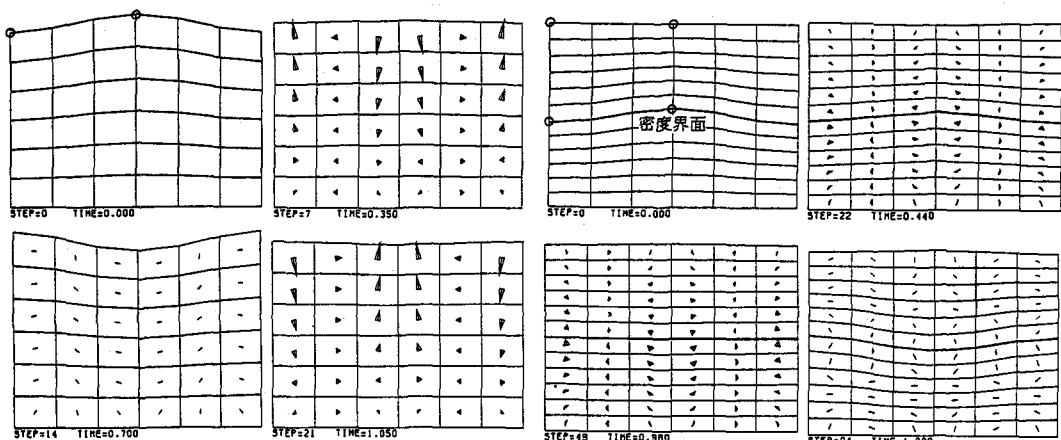


図-7 自由表面の振動

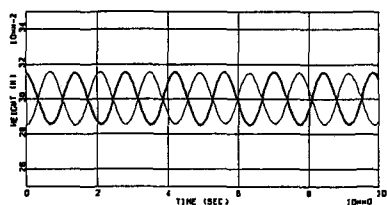


図-8 自由表面中央（太線）と端（細線）の高さの時間変化

わたしたものである。振幅はほとんど一定で、周期 1.4 秒は、線型理論による値 1.32 秒に近い。

図-9 は、長さ $l = 1.0$ m の水槽に密度 1.25 の流体を厚さ $h_2 = 0.1$ m まで入れ、更にその上 $h_1 = 0.1$ m の厚さまで水を載せ、界面だけを $-a \cos(2\pi x/l)$ ($a = 0.008$ m) の形に持ち上げて放した時の自由振動を示したものである。流体は縦横 12×6 個のセルに分け、時間刻みは $\Delta t = 0.02$ 秒とした。(矢印の長さの $1/20$ が、流体の速さに Δt をかけた距離)。

図-10 は自由表面と密度界面の高さの時間変化を示している。表面及び界面の振動周期はそれぞれ 0.8 ~ 0.9 秒、3.7 秒であるが、線型理論では³⁾ 0.88 秒と 3.3 秒となる。

4 結 論

任意形状の変形可能なセルに積分型の保存則を適用するという方法で、陽解法ならびに数少ないセルのままだも、自由表面や密度界面の振動現象の数値解析が無理なく行われ、妥当な結果が得られることが示された。ここで取り上げた振動現象では、非線

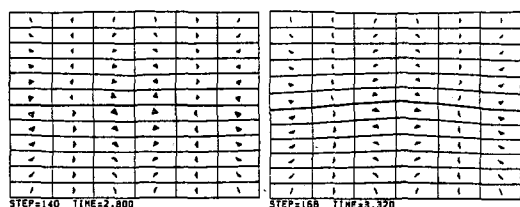


図-9 自由表面と密度界面の振動

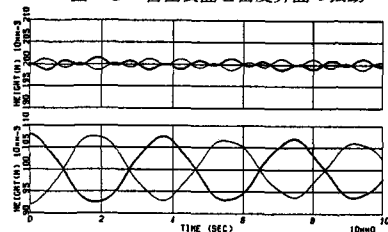


図-10 自由表面中央（上段太線）と端（上段細線）及び密度界面中央（下段太線）と端（下段細線）の高さの時間変化

型効果をもたらす対流流束項の寄与は比較的小さいが、次の機会には、対流流束項の効果も現われてくる平均流の存在する現象を取り上げてみたい。

参 考 文 献

- 1) C. W. Hirt, A. A. Amsden and J. L. Cook : J. Comp., Phys., 14, 227(1974).
- 2) 矢嶋信男, 野木達夫 : 発展方程式の数値解析 (岩波書店, 東京, 1977), P.49.
- 3) H. Lamb : Hydrodynamics (Cambridge Univ. Press, London, 1975), 6th ed., P.372.