

K-ε 乱流モデルの鉛直噴流への適用

Turbulence Transport Equations and its Application
to Vertical Jet in Open Channel Flows

日立造船(株) 正員 柴田 弘
神戸大学工学部 正員 松梨順三郎

1. はじめに

乱流はKármán-Howarth方程式に示されるように、理論的に未解明な問題を擁している。その一方で、この困難を補完するため、合理的な仮定と近似を用いる乱流モデルは、電子計算機の進歩と相俟って、着実に成果をあげてきている。乱流モデルは現在まで種々に提案されているが、本研究ではK-ε型2方程式モデルをとりあげた。モデルの構成にかかわる仮定・仮説を考究して、このモデルの基本的性格を把握するとともに、固定壁と自由水面からなる二次元開水路での鉛直噴流の解析にこのモデルを適用して、乱れによる効果を可視化した。さらに、全体的な流れのプロファイルの妥当性を実験結果とあわせて検討した。

2. 解析モデルと解析手法

本研究では図-1に示すような鉛直噴流モデルを設定した。非圧縮性流体の連続の式、及び渦動粘性係数 ν_T を用いたReynolds方程式の三次元の式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

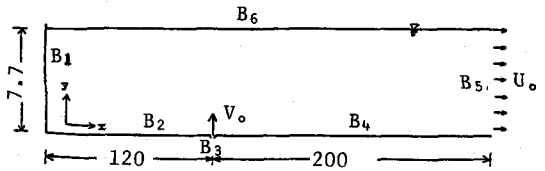


図-1 解析モデル (単位 cm)

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} = g_i - \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \nu_T \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \right) \right\} \quad (2) \quad \nu_T = C_\mu \frac{\bar{K}^2}{\bar{\epsilon}} \quad (3)$$

ここに、 $\phi = p/\rho$ (圧力密度比) とする。(2) 式中の渦動粘性係数 ν_T は、乱れエネルギー $\bar{k}$ と、乱れエネルギー消散率 $\bar{\epsilon}$ を用いて(3)式で表わされる。係数 C_μ は正の定数とする。さらに、 $\bar{k}$ 、 $\bar{\epsilon}$ に関する輸送方程式を導入する。それらの厳密な形はそれぞれ次のように与えられる。

$$\frac{\partial \bar{K}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \bar{K}}{\partial x_k} = -\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_k (K + \phi')} + \nu \overline{u'_i \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_k}} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x_k} = & -2\nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_l \partial x_l} \left(\overline{u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_l}} \right) - 2\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \left(\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \frac{\partial u'_k}{\partial x_l}} \right) - 2\nu \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \left(\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} \right) \\ & - 2\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_l} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_l} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_k \epsilon'} - 2\nu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \frac{\partial \phi'}{\partial x_l}} \right) + \nu \frac{\partial^2 \bar{\epsilon}}{\partial x_k \partial x_k} \\ & - 2\nu^2 \left(\overline{\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_l}} \right)^2 \end{aligned} \quad (5)$$

(5) 式は、Navier-Stokesの式と、Reynolds方程式の差として得られる変動速度成分 u'_i の式を x_l で微分し、両辺に $\partial u'_i / \partial x_l$ を掛けた後、各項の平均をとって若干の整理をすると得られる。(4)、(5) 式はこのままでは解くことはできないので、右辺の各項が全て平均量で表わされるようにモデル化される必要がある。このモデル化の前提となる仮定を以下に示す。

1) Reynolds 応力 $\rho \overline{u_i' u_j'}$ の Boussinesq による勾配拡散近似と同様に、乱流量 $\overline{k}$, $\overline{\varepsilon}$ の乱流拡散も、勾配拡散近似が成立する。

2) 渦動粘性係数と受動的輸送量であると k, ε の乱流拡散係数の比は定数である。

3) 乱流エネルギー消散率 $\overline{\varepsilon}$ の時間変化は、局所等方性を仮定した次元解析の結果に、非等方性の寄与を評価して得られる。(Lumley, 文献1)

4) 高い Reynolds 数の乱流場では、乱流エネルギーの消散の構造は等方的であり、エネルギー消散率 $\overline{\varepsilon}$ は等方性消散で近似しうる。

このような仮定を用いてモデル化すると、 $\overline{k}$, $\overline{\varepsilon}$ の輸送方程式は次のように与えられる。

$$\frac{\partial \overline{K}}{\partial t} + \overline{u_k} \frac{\partial \overline{K}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_K} \right) \frac{\partial \overline{K}}{\partial x_k} \right\} + \nu_T \overline{E_p} - \overline{\varepsilon} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \overline{\varepsilon}}{\partial t} + \overline{u_k} \frac{\partial \overline{\varepsilon}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \overline{\varepsilon}}{\partial x_k} \right\} - C_\alpha \frac{\overline{\varepsilon}^2}{\overline{K}} + C_r \frac{\overline{\varepsilon} \nu_T \overline{E_p}}{\overline{K}} \quad (7)$$

$$\overline{E_p} = \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \quad (8)$$

上式で $\sigma_K, \sigma_\varepsilon, C_\alpha, C_r$ は全て正の定数である。(3)式の C_μ も含めて、これら5個の定数は、経験的に決めなければならないが、ゼロ方程式モデルや1方程式モデルのように、流れの型に固有の ν_T , あるいは混合長 λ の関数形を必要としないという点で2方程式モデルは優れている。これらの定数の値は従来の研究の計算例を参照して次のように設定した。

$$C_\mu = 0.09, \quad \sigma_K = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3, \quad C_\alpha = 1.44, \quad C_r = 1.92 \quad (9)$$

3. 数値計算

数値計算は $\overline{u}_i^n, \overline{\varphi}^n, \overline{\nu}_T^n, \overline{K}^n, \overline{\varepsilon}^n$ を既知として、i) (1), (2)式より $\overline{u}_i^{n+1}, \overline{\varphi}^{n+1}$ を求める。ii) (6)式より $\overline{K}^{n+1}$, (7)式より $\overline{\varepsilon}^{n+1}$ を求める。iii) (3)式より $\overline{\nu}_T^{n+1}$ を求める。というサイクルを繰り返した。このうち、i)の $\overline{u}_i^{n+1}, \overline{\varphi}^{n+1}$ を求める方法として、本研究では以下に述べるような完全に陰的な差分法を用いた。以下、2次元とし、平均量を示すバーは省略する。図-2のようなメッシュシステムで、格子交点の・点に u, v を、○点に φ を与える。図中のハッチを入れたセルで、連続の式(1)を近似すると次式ようになる。このとき、流速成分は全て未知レベルで評価する。

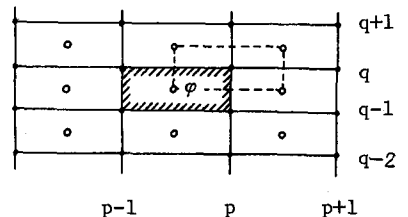


図-2 メッシュシステム

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x} \left\{ \frac{1}{2} (u_{p,q}^{n+1} + u_{p,q-1}^{n+1}) - \frac{1}{2} (u_{p-1,q}^{n+1} + u_{p-1,q-1}^{n+1}) \right\} \\ & + \frac{1}{\Delta y} \left\{ -\frac{1}{2} (v_{p,q}^{n+1} + v_{p-1,q}^{n+1}) - \frac{1}{2} (v_{p,q-1}^{n+1} + v_{p-1,q-1}^{n+1}) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

次に点 p, q を中心とした運動方程式(2)の差分近似を考える。対流項の差分近似にドナーセル法を用い、対流速度以外の u, v, φ を未知レベルで評価すると次式ようになる。これは図-2の点線で囲んだセルの運動量保存則の近似に相当する。簡単のために $\overline{\nu}_T$ の項を省略したものを記すと、

$$\frac{u_{p,q}^{n+1}-u_{p,q}^n}{\Delta t} + \frac{\hat{u}_{R,R}^{n+1}-\hat{u}_{L,L}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{\hat{v}_{T,T}^{n+1}-\hat{v}_{B,B}^{n+1}}{\Delta y} = -\frac{1}{\Delta x}\left\{\frac{1}{2}(\varphi_{p+1,q+1}^{n+1}+\varphi_{p+1,q}^{n+1})-\frac{1}{2}(\varphi_{p,q+1}^{n+1}+\varphi_{p,q}^{n+1})\right\} \\ + v \frac{u_{p+1,q}^{n+1}-2u_{p,q}^{n+1}+u_{p-1,q}^{n+1}}{\Delta x^2} + v \frac{v_{p,q+1}^{n+1}-2v_{p,q}^{n+1}+v_{p,q-1}^{n+1}}{\Delta y^2} + v_T \dots \quad (11)$$

$$\frac{v_{p,q}^{n+1}-v_{p,q}^n}{\Delta t} + \frac{\hat{v}_{R,R}^{n+1}-\hat{v}_{L,L}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{\hat{u}_{T,T}^{n+1}-\hat{u}_{B,B}^{n+1}}{\Delta y} = -\frac{1}{\Delta y}\left\{\frac{1}{2}(\varphi_{p,q+1}^{n+1}+\varphi_{p+1,q+1}^{n+1})-\frac{1}{2}(\varphi_{p,q}^{n+1}+\varphi_{p+1,q}^{n+1})\right\} \\ + v \frac{v_{p+1,q}^{n+1}-2v_{p,q}^{n+1}+v_{p-1,q}^{n+1}}{\Delta x^2} + v \frac{v_{p,q+1}^{n+1}-2v_{p,q}^{n+1}+v_{p,q-1}^{n+1}}{\Delta y^2} + v_T \dots \quad (12)$$

(10), (11), (12) 式を全領域でたて、 u^{n+1} , v^{n+1} , φ^{n+1} を未知数とする連立方程式を構成する。これを解けば、連続の式、運動方程式の両方を満たす $n+1$ レベルの全領域の u, v, φ が一括して求められる。従って、MAO法の同時緩和スキームのように、連続の式を満足させるための流速と圧力の調整ループは必要でない。また、この計算法は安定性に優れている。大次元の連立方程式を解かなければならないが、2次元問題であれば大型電算機でかなりのレベルの計算が実行可能である。

本研究で設定した図-1のようなモデルでは、流入部で流れの変化が激しく、そこから離れるほどゆるやかに変化するように考えると考えられる。そこで、上に述べたような数値計算法を適用するにあたり、図-3に示すような不等長メッシュを採用した。また、 $\bar{\kappa}^{n+1}$, $\bar{\epsilon}^{n+1}$ の計算にも陰的な差分法を用い、対流項はドナーセル法で差分近似をした。なお、(11), (12) 式中の φ はあらためて静水圧を基準とする変動圧力を表わすものとした。

4. 初期条件と境界条件

初期条件は全領域で、 $u=v=\varphi=0$, $\epsilon=k=v_T=0$ とした。また、境界条件は図-1の $B_1 \sim B_6$ でそれぞれ次のように与えた。

$$\begin{aligned} B_1, B_2, B_4 &: u=v=0, \varphi=0, K=0, \epsilon=0 \\ B_3 &: u=0, v=V_0, \varphi=0, K=K_{in}, \epsilon=\epsilon_{in} \\ B_5 &: u=U_0, v=0, \partial K/\partial x=0, \partial \epsilon/\partial x=0 \\ B_6 &: \partial u/\partial y=0, v=0, K=\epsilon=0 \end{aligned}$$

V_0 , U_0 , K_{in} , ϵ_{in} の数値を表-1に示す。本研究では表-1の二つの乱流モデルの他に、渦動粘性係数を考慮しない層流モデルの計算を行ない、三つの計算結果について比較検討した。

表-1 解析の所与条件

	乱 流		層 流
	モデル 1	モデル 2	モデル
q cm ² /s	12.00	12.00	12.00
h cm	7.70	7.70	7.70
V ₀ cm/s	9.60	9.60	9.60
U ₀ cm/s	1.68	1.68	1.68
v cm ² /s	0.01	0.01	0.01
v _{Tin} cm ² /s	0.01	0.10	—
K _{in} cm ² /s ²	1.24 ×10 ⁻²	1.24 ×10 ⁻¹	—
ε _{in} cm ² /s ³	1.40 ×10 ⁻³	1.40 ×10 ⁻²	—

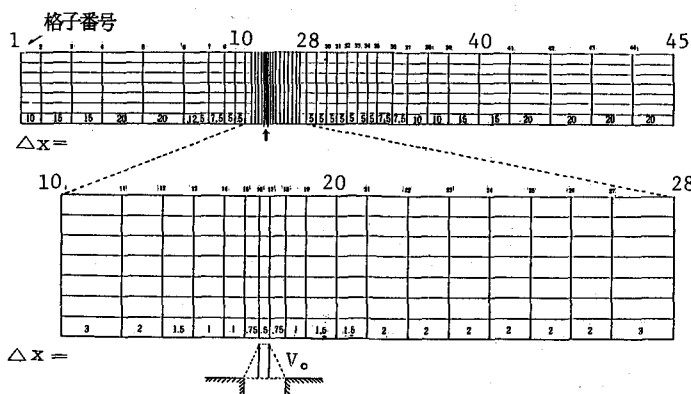


図-3 不等長メッシュシステム (単位 cm)

5. 結果と考察

図-4, 5 および図-7はそれぞれ乱流モデル1, 乱流モデル2, 層流モデルの流線模様を示す。また、図-6は実験による計測結果である。さらに2方程式モデルでは、渦動粘性係数、乱れエネルギー、エネルギー消散率の情報を得ることができる。図-8図-9はそれぞれ乱流モデル1および同2の渦動粘性係数の分布状況を示したものである。乱れエネルギーの分布については図-10, 11エネルギー消散率の分布については、図-12, 13にそれぞれ同様の場合の結果を示す。図-4, 5, 7を比較して、乱流モデルと層流モデルの最も大きな相違は逆流域の大きさに表われている。乱流モデルの逆流域はほぼ定常状態に達していると考えられる120秒後で、噴流口から下流へ約40 cm程度であるが、層流モデルの逆流域は時間の経過とともに次第に大きく発達し、1 m以上にわたっている。噴流口か

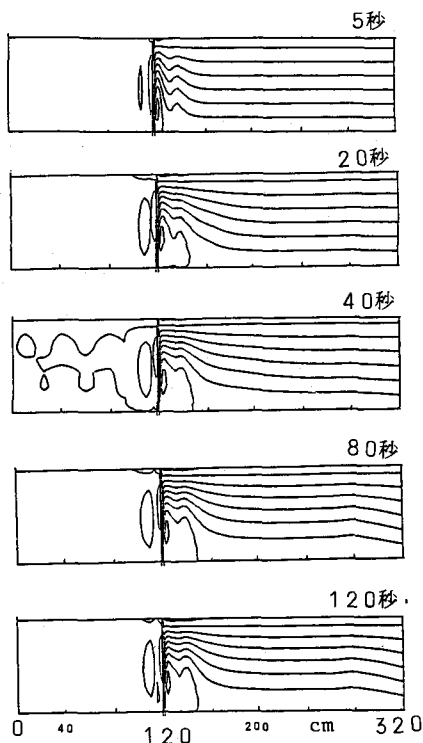


図-4 乱流モデル1の流況図 (流線)

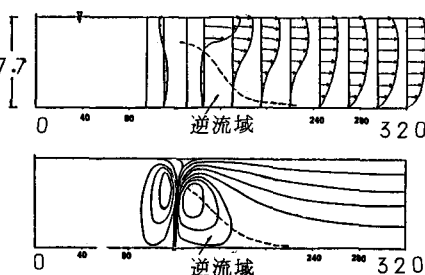


図-6 可視化実験によるフローパターン (単位 cm)

実験結果

水路幅、40 cm、噴流開口部は水路全幅にわたって1 cmのスリットを設けている。流量を単位幅当り $12 \text{ cm}^2 / \text{s}$ として、計算の条件とあわせている。流れの計測には、水素気泡法と、メチレンブルーをトレーサーとする写真撮影を併用した。図-6は水路中央面の流況図である。

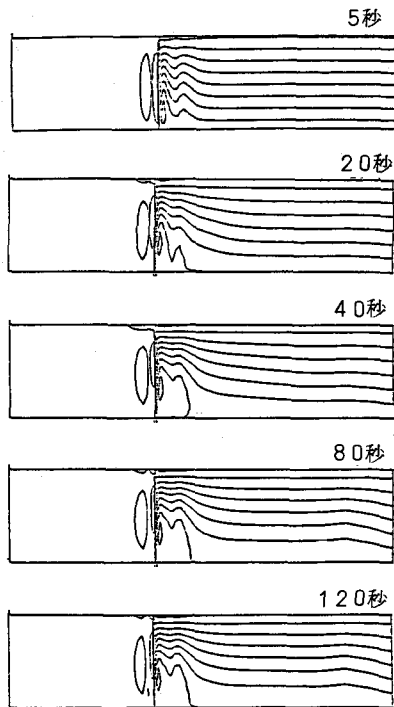


図-5 乱流モデル2の流況図

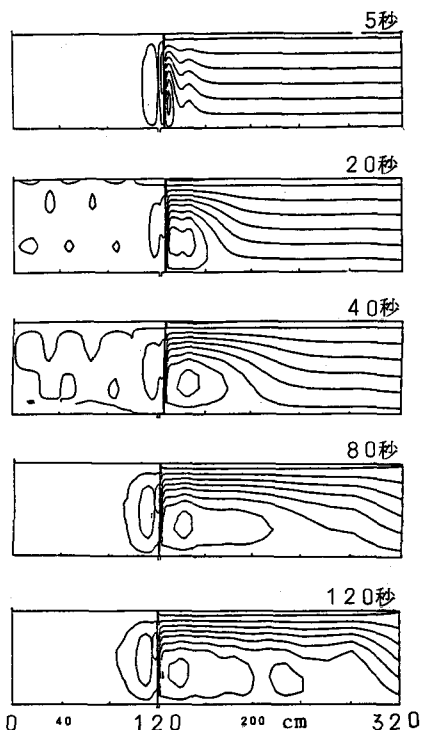


図-7 層流モデルの流況図

ら上流側はいわゆる死水域を形成するが噴流にともなって発生する弱い渦が乱流モデル、層流モデルともに現れている。これら乱流モデルと層流モデルの相違が渦動粘性係数によることは明らかである。図-8, 9に示されているように、渦動粘性係数が $0.3 \sim 0.5 \text{ cm}^2/\text{s}$ と分子粘性係数の $30 \sim 50$ 倍の値が下流部分に出現している。これによって生ずる大きな剪断力によって、主流部が逆流部を強く引っ張るために乱流モデルでは逆流域が小さくなっていると考えられる。次に乱流エネルギー(図-10, 11)エネルギー消散率(図-12, 13)の分布を見ると、これらの乱流量は時間とともに下流に輸送されるが、噴流口付近で80秒から120秒にかけてあまり変化がない。これはこれらの物理量が非保存的であり、流れの場での生成と消滅を伴うが、これらが平衡してくるためと考えられる。

つぎに乱流モデ

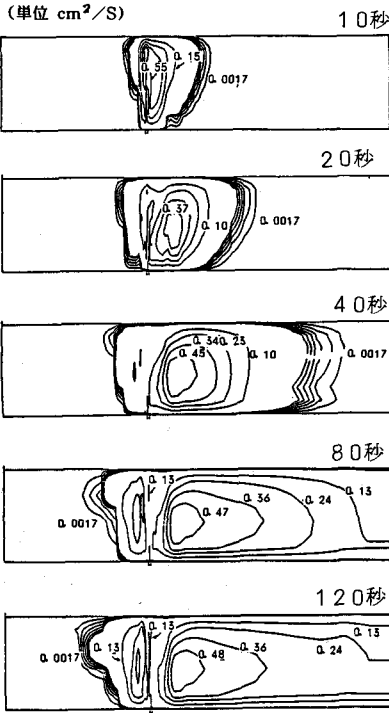


図-8 渦動粘性係数の分布 (乱流モデル1)

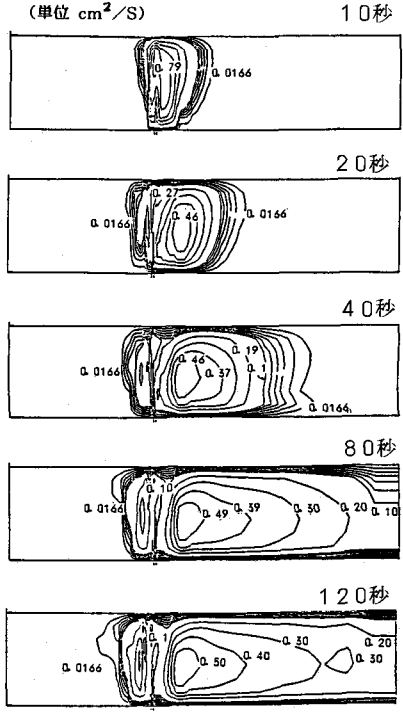


図-9 渦動粘性係数の分布 (乱流モデル2)

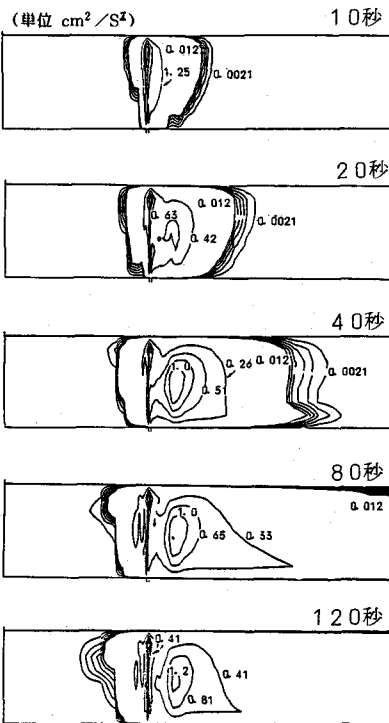


図-10 乱流エネルギーの分布 (乱流モデル1)

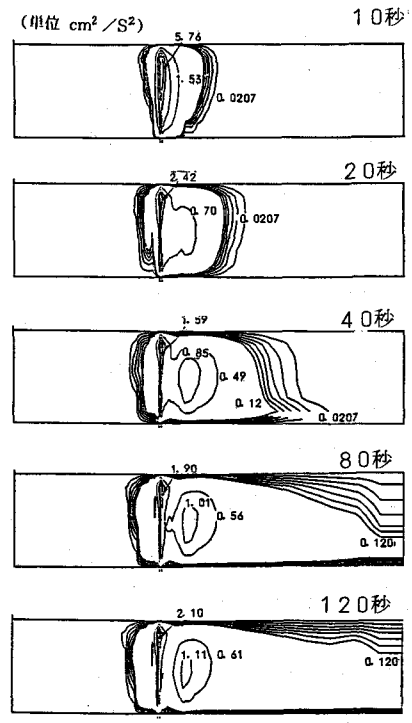


図-11 乱流エネルギーの分布 (乱流モデル2)

ル1と乱流モデル2を比較すると、両モデルでは表-1に示すように流入乱流量に10倍の差があるにもかかわらず、両者のフローパターン(図-4, 5), 渦動粘性係数(図-8, 9), 乱れエネルギー(図-10, 11), エネルギー消散率(図-12, 13)のそれぞれの分布が、オーダー的にまたパターンとして非常に類似している。これらの乱流量は流れの場によって生成、消滅するので、流入乱流量の負荷強度そのものは、これらの

乱流量の定常的分布の形成に重要な影響を与えないのではないかと考えられる。流入乱流量を合理的に決定し、乱流のプロフィールを予測することは一般に極めて困難であり、2方程式モデルの弱点の1つであると考えられている。しかし、本計算によると初期の非定常状態を除いて、定常的また全体的な流れのパターを予測する場合はそれほど重要な難点にならないようである。

6. おわりに

乱流モデルの逆流域が実験結果と比較して若干小さくでていること、上流側の渦も乱流モデルの方が小さくでていることなど、幾分の相違点はあるが、層流モデルのフローパターンと比較すると、乱流モデルの方が流れの状態をより実験結果に近くシミュレートできていると考える。2方程式モデルはReynolds応力輸送モデルに比較すると計算が容易なこともあり、局所的な流れの特性だけではなく、本計算のような全体的な流れのパターンのシミュレーションにも有効であるといえよう。

参考文献

- 1) W. C. Reynolds : Computation of Turbulent Flow, Annual Review, Fluid Mechanics (1976)
- 2) 武本行正, 阿部芳彦, 自由水面をもつ3次元鉛直噴流の数値解析(2方程式 $k \sim \epsilon$ 乱流モデルを用いて), 第4回流れの有限要素法解析シンポジウム報文集, 日科技連, (1983)
- 3) 谷一郎, 流体力学の進歩, 一乱流, 丸善 (1980)
- 4) 大路通雄, 他, 特集, 乱流モデルとその応用, 日本航空宇宙学会誌 Vol.28 (1980)

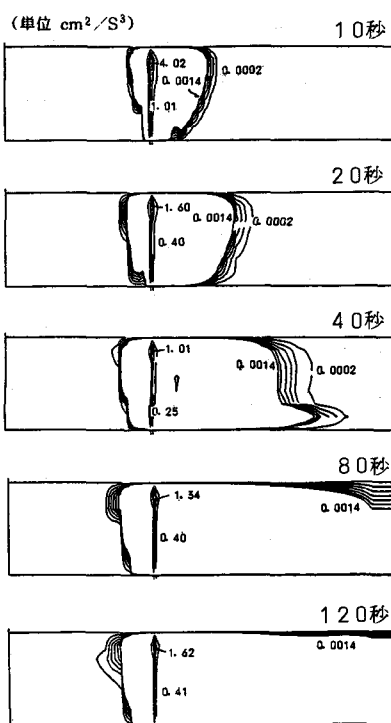


図-12 エネルギー消散率の分布(乱流モデル1)

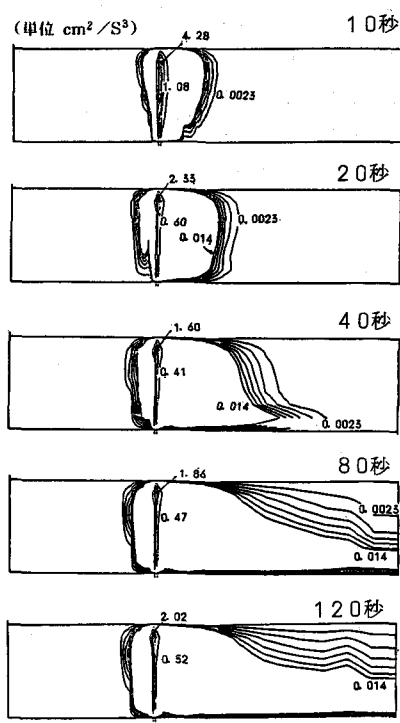


図-13 エネルギー消散率の分布(乱流モデル2)