

K-ε 乱流モデルによる空気蛇行流の三次元数値計算

NUMERICAL COMPUTATION OF THREE-DIMENSIONAL TURBULENT FLOW IN A MEANDERING AIR DUCT BY K-ε MODEL

東京工業大学 正員 田 中 昌 宏
 埼玉大学 正員 池 田 駿 介

1. はじめに

蛇行流の解析はこれまで多くなされてきているが、そのほとんどは水面形状や主流鉛直平均流速の横断方向分布などの流れの二次元特性を表現できる程度に留まっており、二次流の発達・減衰過程や主流鉛直方向分布の流下方向遷移過程などの三次元特性は十分に求められていない。これは、蛇行流の特徴である流れの非線形性が十分考慮されていないためだけではなく、乱れ場の局所的変化が考慮されていないことに起因すると考えられる。しかし、最近 Demuren¹⁾は乱れ場の局所的変化が考慮できる K-ε 乱流モデルを用いた三次元数値計算を蛇行流解析に適用し、良好な結果を報告している。一方、著者ら²⁾は蛇行風路を用いて蛇行流の三次元特性や乱れ場の特性を詳細に調べると共に K-ε モデルを用いた三次元解析を行い、蛇行流の基本的三次元構造の特性を明らかにした。その中で、数値計算の概略を述べたが、本報告では、数値計算手法についてさらに詳しく述べ、K-ε モデルの蛇行流解析における有効性及び問題点を指摘することにする。

2. 計算対象領域と座標系

計算の対象としては著者ら²⁾が実験を行った矩形断面蛇行風路内の流れを考える(図1参照)。このとき、流れは水平中央面(上下対称面)に対し上下対称と考えられるため、計算領域は蛇行一波長について横断面下半分とする。

蛇行風路の風路中心線は次式で定義される sine-generated curve に従っており、座標系は図1に示された直交曲線座標(s, n, z)系を使用する。

$$\alpha = \alpha_0 \cos \theta, \quad \theta = \frac{2\pi s}{L} \quad (1)$$

また、s 軸の局所曲率半径、R は次式で与えられる。

$$\frac{1}{R} = -\frac{d\alpha}{ds} = \alpha_0 \frac{2\pi}{L} \sin \theta \quad (2)$$

ここに、α：蛇行風路中心線が平均流下方向の直線となす偏角、α₀：最大偏角、s：流路中心線に沿う原点からの距離、L：蛇行長である。

3. 支配方程式

先に述べた様に、蛇行流の三次元流況を解析するためには流れの非線形性だけではなく、乱れ場の局所的変化を考慮する必要がある。そこで、本解析ではレイノルズ応力の評価にはブーシネスク近似を用いるが、そこに現われる渦動粘性係数の決定には乱れ場の局所的変化が考慮できる K-ε モデルを採用する。従って、支配方程式は連続式、運動量方程式、K 及び ε の輸送方程式となるが、流れの非線形性を十分考慮するために、各輸送方程式の簡単化は主流方向の拡散項の無視のみに留めた。この簡単化は後で述べる計算手法上の要請によるが、流れに剝離が生じない限り十分妥当な仮定である。さらに、流れを定常とし、十分に発達した空気乱流を対象としていることから、体積力及び粘性項を無視すれば、運動量方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial U_s^2}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \chi (U_s U_n - \nu_t \frac{\partial U_s}{\partial n}) \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \chi (U_s U_z - \nu_t \frac{\partial U_s}{\partial z}) \right\} + \frac{U_s U_n}{R} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} (P + \frac{2}{3} K) \quad (3)$$

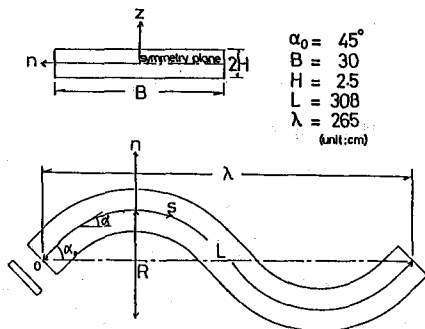


図1. 蛇行風路及び座標系

$$\frac{\partial U_s}{\partial s} \frac{U_n}{n} + \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \chi (U_n^2 - v_t \frac{\partial U_n}{\partial n}) \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \chi (U_n U_z - v_t \frac{\partial U_n}{\partial z}) \right\} - \frac{U_s^2}{R} = -\frac{\chi}{\rho} \frac{\partial}{\partial n} (P + \frac{2}{3} K) + \chi \frac{\partial v_t}{\partial n} \frac{\partial U_n}{\partial n} + \chi \frac{\partial v_t}{\partial z} \frac{\partial U_n}{\partial z} - v_t \frac{U_n}{R^2 \chi} \quad (4)$$

$$\frac{\partial U_s}{\partial s} \frac{U_z}{z} + \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \chi (U_n U_z - v_t \frac{\partial U_z}{\partial n}) \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \chi (U_z^2 - v_t \frac{\partial U_z}{\partial z}) \right\} = -\frac{\chi}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (P + \frac{2}{3} K) + \chi \frac{\partial v_t}{\partial n} \frac{\partial U_z}{\partial z} + \chi \frac{\partial v_t}{\partial z} \frac{\partial U_z}{\partial z} \quad (5)$$

ここに、 U_s, U_n, U_z : それぞれ s, n, z 方向の流速平均成分、 P : 圧力、 K : 乱れ運動エネルギー、 ρ : 密度、 v_t : 渦動粘性係数、 $\chi = 1 + n/R$ である。また、 v_t は $K-\epsilon$ モデルでは次式で与えられる。

$$v_t = C_\mu K^2 / \epsilon \quad (6)$$

ここに、 C_μ : 定数、 ϵ : 乱れ運動エネルギーの逸散率である。 K 及び ϵ の輸送方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial U_s}{\partial s} K + \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \chi (U_n K - \frac{v_t}{\sigma_K} \frac{\partial K}{\partial n}) \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \chi (U_z K - \frac{v_t}{\sigma_K} \frac{\partial K}{\partial z}) \right\} = \chi (G - \epsilon) \quad (7)$$

$$\frac{\partial U_s}{\partial s} \epsilon + \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \chi (U_n \epsilon - \frac{v_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial n}) \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \chi (U_z \epsilon - \frac{v_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial z}) \right\} = \chi (C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{K} G - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{K}) \quad (8)$$

$$G = v_t \left[2 \left\{ \left(\frac{\partial U_s}{\chi \partial s} + \frac{U_n}{\chi R} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_n}{\partial n} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_z}{\partial z} \right)^2 \right\} + \left(\frac{\partial U_s}{\partial n} - \frac{U_s}{\chi R} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_s}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_z}{\partial n} + \frac{\partial U_n}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (9)$$

ここに、 G : 乱れ運動エネルギーの生産項、 $\sigma_K, \sigma_\epsilon, C_{\epsilon 1}$ 及び $C_{\epsilon 2}$ は定数であり、 C_μ を含め Imperial College のグループによって次のような値が提案されており、通常普遍定数として用いられる。

$$C_\mu = 0.09, \quad \sigma_K = 1.0, \quad \sigma_\epsilon = 1.3, \quad C_{\epsilon 1} = 1.47, \quad C_{\epsilon 2} = 1.92, \quad (10)$$

さらに、連続式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial U_s}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial n} (\chi U_n) + \frac{\partial}{\partial z} (\chi U_z) = 0 \quad (11)$$

4. 差分方程式

(1) 格子網及び変数の配置

上記の連立偏微分方程式を離散化するために、本数値計算では差分法を採用するが、その際まず格子網を定義する必要がある。格子網は図2に示された様にとられ、その間隔は数値拡散の影響を考慮し、 n 及び z 方向はそれぞれの方向に等間隔で、 $n \times z = 32 \times 12$ 、 s 方向は s 軸に沿って等間隔で73メッシュとした。変数の配置はスカラー量 P, K, ϵ 及び v_t を格子点上に、流速成分を格子点の中間に配置する "Staggered-grid" とした (図2参照)。

(2) 差分方程式

差分方程式は偏微分方程式を図2に示されたコントロールボリュームに渡って積分することによって得られる。差分方程式の最終形は次のようになる。

連続式

$$(U_P a_d - U_a a_u) + (V_E a_e - V_P a_w) + (W_n a_n - W_P a_s) = 0 \quad (12)$$

運動量方程式

$$U_P = A_E^U U_E + A_W^U U_W + A_N^U U_N + A_S^U U_S + B^U + C^U (P_D - P_P) \quad (13)$$

$$V_P = A_E^V V_E + A_W^V V_W + A_N^V V_N + A_S^V V_S + B^V + C^V (P_P - P_W) \quad (14)$$

$$W_P = A_E^W W_E + A_W^W W_W + A_N^W W_N + A_S^W W_S + B^W + C^W (P_P - P_S) \quad (15)$$

スカラー量 (ϕ) 輸送方程式

$$\phi_P = A_E^\phi \phi_E + A_W^\phi \phi_W + A_N^\phi \phi_N + A_S^\phi \phi_S + B^\phi \quad (16)$$

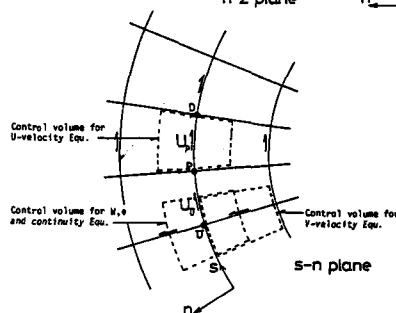
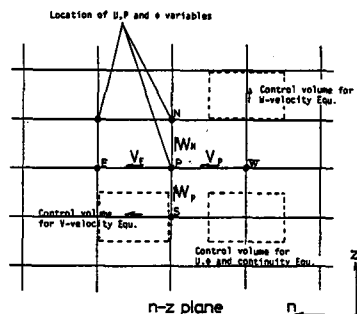


図2. 格子網及びコントロールボリューム

ここに、 U 、 V 及び W それぞれ s 、 n 、 z 方向の流速成分を示し、その位置は下付きの添字によって P (対象点)、 N (北)、 S (南)、 E (東)、 W (西)、 U (上流)、 D (下流) で示されており、 a はコントロールボリュームの表面の面積であり、 a の下付き添字は格子点の方向に対応している。更に、 A : 移流及び拡散によってコントロールボリュームに出入りするフラックス、 B : 上流からの移流によるフラックス及びソース項、 C : 圧力勾配の流速に対する効果を示す係数であり、上付きの添字は対象となる変数を示し、下付きの添字は位置を示している。なお、詳しい内容は参考文献 3) を参照されたい。ここでは積分法を用いて差分を行ったが、通常の差分化の表現では、主流方向の移流項に第一次の風上差分、断面内の移流項にハイブリッド型差分、拡散項に中心差分を用いていることになる。

5. 境界条件及び計算手順

(1) 境界条件

(a) 入口条件

入口断面においては圧力を除くすべての従属変数の値が与えられなければならない。理想的にはすべての値が実験値から与えられることが望ましいが、実際には不可能であるので本数値計算では次の様子で与えた。

① U_s の分布は下流に大きく影響するため、実験値を用いて与えた。

② U_s 以外は下流への影響が小さいことが従来の研究から知られているので、次のように与えた。蛇行部入口より上流に仮想の直線部を考え、入口断面の一断面上流 ($\theta = -\pi/36$) で U_s 以外の量を次式で与える。

$$U_n = U_z = 0, \quad v_t = \kappa U_* z', \quad \epsilon = 0.01 U_*^3 / (\kappa z'), \quad K = 0.1 (v_t \epsilon / C_\mu)^{1/2} \quad (17)$$

ここに、 U_* : 摩擦速度、 κ : カルマン定数、 z' : 壁面からの距離である。

③②の条件から U_s の分布を変えずに他の輸送方程式を入口断面で解き、その値を入口条件とした。

(b) 壁面条件

運動量方程式中の粘性項は無視されており、 $K-\epsilon$ モデルは完全乱流域についてのみ成り立つので、壁面条件は特別な取り扱いが必要であり、ここでは "The Wall Function Method" ⁴⁾ を採用した。すなわち、壁面条件は次のような関係式で与えられる。

$$U_p / U_* = \ln(E U_* z_p / v_t) / \kappa, \quad (v_t) P = \kappa U_* z_p = c_\mu K_P^2 / \epsilon_P, \quad K_P = U_*^2 / c_\mu^{1/2}, \quad \epsilon_P = c_\mu^{3/4} K^{3/2} / (\kappa z_p) \quad (18)$$

ここに、添字 P は流れ場の境界に最も近い格子点を示し、 U_p : 合流速ベクトル、 U_* : U_p と同じ方向の摩擦速度、 E : 壁面の状態によって決まる定数 (滑面の場合、9.793) である。さらに、壁面上で垂直方向の流速成分はゼロ、同じ方向の圧力勾配はゼロの条件である。ここで、式 (18) は未知量 U_* を含んだ Implicit な境界条件となっており、水平中央面の上下対称条件と共に一断面内の計算は「未定二点境界値問題」となっている。したがって、一断面内の計算は壁面における Shooting を含めたくり返し計算となる。境界での Shooting に用いられる U_* の値は次式で与えられる。

$$U_* = \kappa U_p / \ln(E z_p c_\mu^{1/4} K_P^{1/2} / v_t) \quad (19)$$

(c) 風路水平中央面

風路水平中央面の条件は、上下対称条件であり、 $U_z = 0$ 、他の従属変数の z 方向勾配はゼロとなる。

(d) 出口条件

出口条件は圧力のみ与えることとし、ここでは大気圧条件で断面一定とした。実験結果から蛇行変曲点では横断面全体に圧力はほぼ一定となっており、大気圧条件は妥当な境界条件と考えられる。

(2) 計算手順

差分方程式は上記の境界条件の下で反復計算によって解かれる。その際、輸送方程式は主流方向の拡散項の無視によって、圧力を除くすべての従属変数は主流方向に垂直な断面内の二次元の記憶で済み、 S 方向に断面毎の行進計算によって順次計算が進む。圧力は三次元で記憶されるが初期条件は全くの予測値が用いられ、流れ場の行進計算毎に連続式、運動量方程式の誤差が収束する方向に圧力値が補正されていく。この手法は SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equation) Algorithm ³⁾ と呼ばれている。

計算の手順をまとめると次のようになる。

①初期の三次元圧力場が予測値によって決定される。今回は実験値から一波長平均の圧力勾配を用いて、一断面内では一定として与えた。

②圧力以外の変数は入口断面で境界条件として与えられ、順次下流の断面へ計算が進む。差分方程式中の圧力及び係数A, Bなどはそのときに記憶されている値から評価される。解かれる方程式は連立代数方程式となり、ここでは単純な代入法を用いた。

③新しく計算された流速値はその断面内のすべてのコントロールボリュームにおいて質量保存則を満足しているかチェックされ、それに応じて圧力場及び流速場が誤差の収束する方向に補正される。この補正は次節で示される圧力補正方程式を解くことによって実行される。

④K及びεの輸送方程式が解かれ、新しい v_t が求まる。

⑤一つの断面内で連続式及び運動量方程式の誤差が許容範囲(入口断面の流量及び運動量によって誤差を無次元化し、その値に対し収束条件を設定する。今回は、圧力の収束状態に応じて、5%, 3%, 1%, 0.5%と収束条件を上げていき最終的には0.1%とした。)に入るまで②③④が反復される。

⑥行進計算が出口まで進み、新しい三次元圧力場が計算される。流れ場全体の収束条件は新しい圧力場とその前の圧力場の差によって評価し、それが十分小さくなるまで、入口から出口までの行進計算が反復される。

なお、今述べた計算手順は図3のフローチャートにまとめられている。

(2) 圧力補正方程式

圧力補正方程式はすべてのコントロールボリュームにおいて質量保存則が満足されるように圧力及び流速値を補正するため用いられる。以下導出法を説明する。

①圧力及び流速を次のように表現する。

$$P = P^* + P', U = U^* + U', V = V^* + V', W = W^* + W' \quad (20)$$

ここに、左辺は真の値であり、*は計算値、'は補正値を示している。

②運動量方程式の差分形から流速補正項と圧力補正項の関係を次のように簡略化する。

$$\begin{aligned} U_P' &= C_P^U (P_D' - P_P'), U_U' = C_U^U (P_P' - P_U'), V_E' = C_E^V (P_E' - P_P') \\ V_P' &= C_P^V (P_P' - P_P'), W_N' = C_N^W (P_P' - P_P'), W_P' = C_P^W (P_P' - P_P') \end{aligned} \quad (21)$$

③ $P_U' = P_P' = 0$ として式(20)及び式(19)を式(12)に代入すると次のような圧力補正方程式が得られる。

$$A_P^P P_P' = A_N^P P_N' + A_S^P P_S' + A_E^P P_E' + A_W^P P_W' + M_P \quad (22)$$

ここに、係数 A_P^P はコントロールボリュームの面積a及び係数Cを含み、 A_P^P, M_P は次式で与えられる。

$$A_P^P = A_N^P + A_S^P + A_E^P + A_W^P + A_U^P + A_D^P \quad (23)$$

$$M_P = (U_P^* a_d - U_U^* a_u) + (V_E^* a_e - V_P^* a_w) + (W_N^* a_n - W_P^* a_s) \quad (24)$$

式(23)は計算値による連続式を示し、 M_P がゼロに近づく様に補正が行われる。また、 $P_U' = P_D' = 0$ としたのは、これらの項が縦断方向の圧力補正を示す項であるためであり、これをゼロとおくことによって式(22)は一つの断面毎に解くことができる。しかし、ある断面での圧力の変化は当然上流に影響するため、収束を速めるためには縦断方向の補正が必要となる。この手法はPratap³⁾によって提案されており、本数値計算においても採用した。なお、式(22)は高階の微係数を無視した一般の圧力方程式に相当する。

6. 計算結果及び考察

数値解と実験値の比較及びその物理的考察等は前報(参考文献2))において述べられているので、ここでは数値解の特性を簡単に整理し、K-εモデルの有効性及び数値計算について詳しく述べることにする。

(1) 数値解と実験値の比較

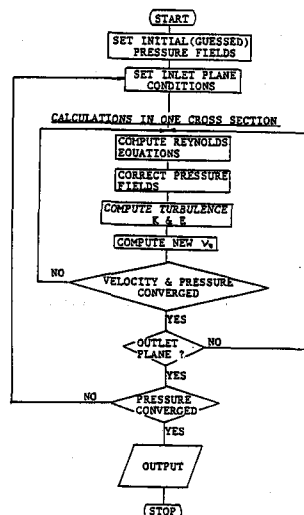


図3. 計算のフローチャート

計算結果は実験値と共に図4～図10に示されており、良好な結果が得られた。すなわち、

- ① 静圧の横断及び縦断方向分布を良く表現でき、特に横断分布は非常に良く再現できる(図4)。
- ② 主流の平面二次元流れの流下方向遷移過程を良く表現でき、鉛直分布の特性をも再現できる(図5, 6)。
- ③ 二次流の遷移過程及び分布形を良く表わせる(図7)。
- ④ 渦動粘性係数、乱れ運動エネルギー及びその逸散率の特性を表現できる(図8, 9, 10)。

以上から、本手法は蛇行流の基本的特性を調べるために有効な手法であることが判明した。

(2) $K-\epsilon$ モデル及び計算手法の妥当性

a) $K-\epsilon$ モデル……本数値計算では渦動粘性係数をスカラー量として取り扱うブーシネスク近似を導入し、 K 及び ϵ によって式(6)から ν_t を算出した。これは乱流拡散作用の状態が等方的であることを意味しており、乱流拡散作用の状態が方向によって異なる流れでは問題が生じる。また、 K 及び ϵ の輸送方程式中の生産項はブーシネスク近似の導入によって常に正の値を持つことになるが、実験値からは加速域において、負の生産も存在することが確認された。しかし、河川の流れのように幅のスケールが水深のスケールに較べて非常に大きい場合には、乱れの場合は、底面近くの主流のせん断力による乱れの生産によってほぼ決定される。したがって、乱流拡散作用は鉛直方向に卓越し、渦動粘性係数をほぼスカラー量としてみなすことができる。また、著者らが用いた蛇行風路では主流の加速領域は減速領域に較べ現象が緩やかに変化するため、上記した負の生産が表現できない効果は無視できる程度のものと判断される。

b) 支配方程式の簡略化……運動量方程式の簡略化において計算手法の要請から主流方向の拡散項が無視された。ここで対象とした流れにおいては、オーダー比較及び実験結果からこの簡略化は妥当な仮定であったが、剥離の発生のある場合には、この簡略化は無効となる。しかし、本手法を完全な楕円形の方程式系の場合に拡張することにはさほど困難はなく、計算機の容量と計算時間上の制約である。

c) 境界条件……本数値計算では、壁面条件としてWall Function法を採用した。乱流モデルでは壁面条件が常に問題となり、ここで対象とした矩形断面で主流方向に断面形状が変化しない場合にはさほど問題はないが、断面形状が変化する場合には問題が生じると考えられ、今後の検討が必要である。また、入口条件として主流速以外を経験値で与えたため、その影響が $\theta=90^\circ$ (乱れ量及び二次流) 付近までみられたが、 $\theta=90^\circ$ 及び 180° 及び 360° では流れ場はほぼ反対称となっており、大きな影響はないと判断した。本来は、入口断面と出口断面を周期条件で与えることが望ましいが、本数値計算では輸送方程式が放物型となっているため、出口条件を与えると条件過剰となる。したがって周期条件とするためには、方程式を楕円型のまま取り扱うか、放物型で計算する場合には、流れ場全体の収束計算が終了したのち出口断面の計算値を入口条件として与えて再度計算する必要がある。

d) 格子間隔……計算結果と実験値の良好な一致から判断して、一断面内の格子間隔は十分と判断されるが、縦断方向に対しては、急激な減速領域 ($\theta=90^\circ\sim 150^\circ$) での主流鉛直方向分布(図6)及び乱れ運動エネルギー(図9)に格子間隔の影響と判断される実験値との不一致がみられる。しかし、局所的な影響に留まっており、特に問題はなく、格子間隔を細かくとることによって解消される問題である。

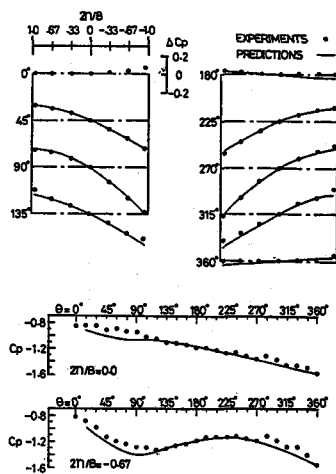


図4. 静圧の横断及び縦断方向分布

C_p : 圧力係数, ΔC_p : 断面中央点 C_p と各点の C_p との差

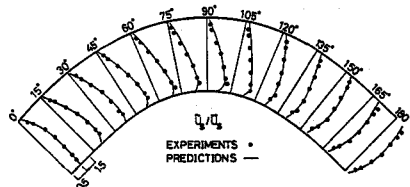


図5. 主流鉛直平均流速の横断方向分布

$\tilde{U}_s$: 鉛直平均流速, $\bar{U}_s$: 断面平均流速

7. 結 語

本研究では、複雑な三次元乱流である蛇行流を解析するために、乱れ場の局所の変化を考慮できる $K-\epsilon$ モデルを用いた三次元数値計算を行った。その結果、蛇行流の平面二次元特性だけでなく、従来の解析では表現できなかった、二次流の発達・減衰過程や主流鉛直方向分布の遷移過程、さらには渦動粘性係数、乱れ運動エネルギー及びその逸散率の遷移特性をも再現できる解を得ることができた。本数値計算手法は断面形が縦断方向に変化する開水路流れに適用する際には、境界条件等に問題が生じると考えられるが、理想化された蛇行流路の基本的特性を調べるためには有効な手法であることが判明した。

なお、本数値計算は東京大学大型電算機センターにおける HITAC M-280H/M-200H を用いて行われ、計算時間は断面内収束条件を段階的に変化させ、数回のジョブに分けて行われたが、全体で 60 分程度であった。なお本研究は文部省科学研究費試験研究 1 (代表 吉川秀夫 早稲田大学教授) の補助を受けた。

参考文献

- 1) Demuren, A. O.: IAHR, XX Congr. Moscow, USSR, Vol. 3, 29-36, 1983.
- 2) 池田, 田中, 千代田: 土木学会論文集, No. 351, 1984.
- 3) Prapat, V. S & Spalding, D. B.: Int. J. Heat Mass Transfer, 19, 1976.
- 4) Launder, B. E. & Spalding, D. B.: Comp. Meth. Appl. Mechanics and Engr., 13, 269-289, 1974.

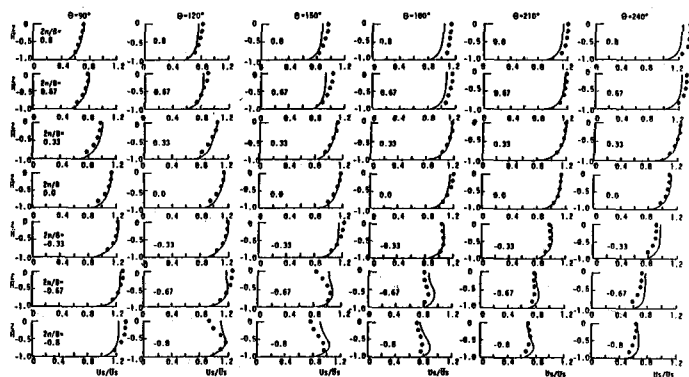


図 6. 主流鉛直方向分布

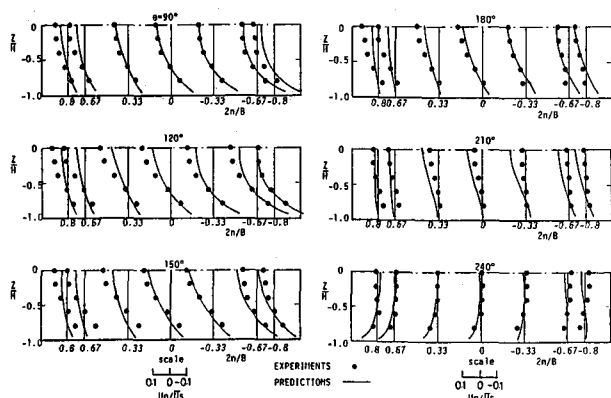


図 7. 横断方向流速の鉛直方向分布

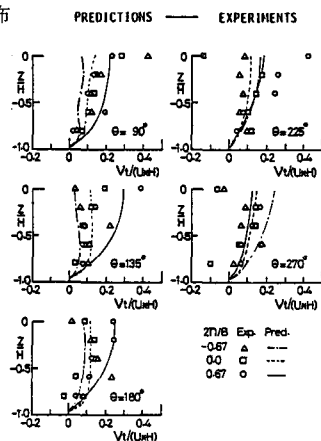


図 8. 渦動粘性係数の分布

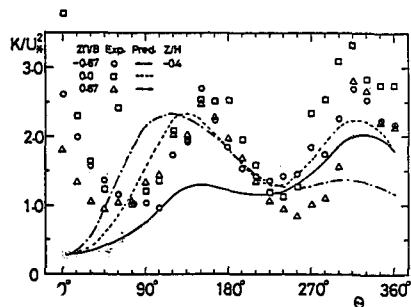


図 9. 乱れ運動エネルギーの縦断方向分布

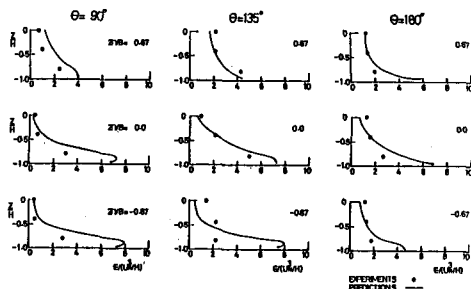


図 10. 乱れ運動エネルギー逸散率の鉛直分布