

ライザー付管路内急変不定流への Double Sweep 法の適用
An Application of DOUBLE SWEEP Method
to Pressurized Flows in a Sewer Line System

東京都立大学工学部 正会員 宇井 正和
東京都立大学工学部 正会員 安川 浩

1. 緒 言

筆者らは先¹⁾に、満管状態における下水管渠を想定し、ライザー（マンホール）を介しながら連結されている管路系内の急変不定流を陰的解法を用いて理論的および実験的に検討し、良好な結果を得たことを報告した。陰的解法の適用は、ライザー内流体の鉛直水流加速度を考慮することにより、管路内水流を支配する方程式が流体加速度あるいは流量の時間的変化に関して、多元連立方程式を構成するためである。数値積分（Runge-Kutta-Gill法）に於いて必要な微係数を与えるために多元連立方程式を解くことは精度上からも、又計算時間の上からも極めて大きな比重を占めるものである。この連立方程式の係数行列は、直線的に連結されている管路に対してはバンド・マトリックスとなるが、枝管との合流部では係数要素が全体に散らばるためにバンド・マトリックスの特徴が失われ、方程式の解法としては消去法に頼らざるを得なかった。しかし、より大きな管路系に於いて消去法の採用は非能率的である。計算時間を短縮しそして系統的処理を可能にするために、tree 状をなす管路系に対して Double Sweep 法を試みたので、その概要と、特に合流点における筆者等の用いた計算法について報告するものである。更にその適用結果を消去法による結果と比較検討した。

2. 管路内流量に関する方程式

ライザー内被圧管内急変不定流の解析は既に報告¹⁾されているが、以下のような解析方法に従っている。まず、管路系の管路とライザーに対して下流端から通し番号を付ければ、その i 番管路内流量を支配する方程式は次式で表される。

$$\frac{dQ_i}{dt} = c_i(H_{i+1} - H_i) - d_i \quad \dots\dots\dots 1)$$

$$\frac{d\eta_i}{dt} = \frac{1}{S_i} (Q_i - Q_{i-1}) \quad \dots\dots\dots 2)$$

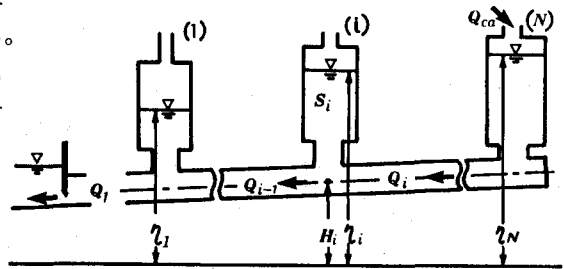


図-1 管路モデル

ここで Q_i : 管路内流量, η_i : ライザー内水位, d_i : 管路壁面抵抗, S_i : ライザー内断面積, c_i : 管路の大きさによる定数。 H_i は i 番ライザー基部での動水勾配線高度であるが、ライザー内断面急変部での急激な速度変化や水面とスラブ面との衝突による圧力変動にも対応できるように、鉛直水流加速度を考慮して運動量方程式から次式のように算定した。

$$H_i = \alpha_i + \beta_i Q_i' + \gamma_i \frac{dQ_i'}{dt} = a_i + b_i \frac{dQ_i'}{dt} \quad \dots\dots\dots 3)$$

Q_i' は i 番ライザー内流量であり, $Q_i' = Q_i - Q_{i-1}$ 。 α_i は水位および水面上圧力によって決まる量であるが, β_i , γ_i はライザーの断面形状に依る定数である。しかし、水位変動の向きによって、ライザー内断面変化部は拡大管あるいは縮小管として機能するため、それぞれについて異なる値をとる¹⁾。

これらの方程式に対し、管路系の上流端（各枝管も含めて）、および最下流端管路に対する境界条件を与えれば系は閉じ、流体運動は決定する。ここでは、上流端条件として既知の流量を与え、又下流端条件としてはそこに取付けてある流量調節用バルブの開度変化を用いている。バルブ通過流量 Q_0 は、系内での急変

$$A_{i,n} Q'_{i+1,n} + B_{i,n} Q'_{i,n} + C_{i,n} Q'_{i-1,n} = Z_{i,n} \quad \dots\dots\dots 9)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$A_{2,n} Q'_{3,n} + B_{2,n} Q'_{2,n} + C_{2,n} Q'_{1,n} = Z_{2,n} \quad \dots\dots\dots 10)$$

$\alpha_{N,n}$, $\beta_{N,n}$ は合流点, あるいは上流端条件によって決まる値であるが, もしそれらが与えられたとすれば, 7) 式は $Q'_{N,n}$ を $Q'_{N-1,n}$ で表すことができ, これを 8) 式へ代入すると変数を 1 つ減らすことができる。即ち, $i+1$ 番管路に対する式が, 定数 $E_{i,n}$, $F_{i,n}$ を用いて, $Q'_{i+1,n} = E_{i,n} Q'_{i,n} + F_{i,n}$ と表されたとすれば, これを 9) 式へ代入して次式を得る。

$$Q'_{i,n} = \frac{-1}{A_{i,n} E_{i,n} + B_{i,n}} (C_{i,n} Q'_{i-1,n} + A_{i,n} F_{i,n} - Z_{i,n}) \quad \dots\dots\dots 11)$$

ここで, $E_{i-1,n} = \frac{-C_{i,n}}{A_{i,n} E_{i,n} + B_{i,n}}$, $F_{i-1,n} = \frac{Z_{i,n} - A_{i,n} F_{i,n}}{A_{i,n} E_{i,n} + B_{i,n}} \quad \dots\dots\dots 12)$

と置き換えれば, 11) 式は, $Q'_{i+1,n}$ の式と同様に 13) 式で表される。

$$Q'_{i,n} = E_{i-1,n} Q'_{i-1,n} + F_{i-1,n} \quad \dots\dots\dots 13)$$

この手順を順次進めて行くことにより, 下流側 2 番管路まで到達し次式が得られる。

$$Q'_{2,n} = E_{1,n} Q'_{1,n} + F_{1,n} \quad \dots\dots\dots 14)$$

このように $E_{i,n}$, $F_{i,n}$ を求めながら変数を下流に送って行く事を Forward Sweep と呼んでいる。

もし, $n=1$, 即ちこの管路が最下流端小管路系である場合は, その下流端境界条件式は一般に, $\alpha_{1,1} Q'_{1,1} + \beta_{1,1} Q'_{2,1} = \gamma_{1,1}$ の形で与えられるから, 14) 式と連立させて $Q'_{1,1}$ および $Q'_{2,1}$ が決定できる。次は, この既知となった $Q'_{i,n}$ を 13) 式へ代入しながら順次上流側へ進むと, 全ての $Q'_{i,n}$ が求められることになる。この上流側への計算過程を Backward Sweep という。又, 以上の方法を Double Sweep 法と呼んでいる。

4. 合流点における接続法

第 n 番小管路系における Forward Sweep を進め, その下流端管路まで到達すると 14) 式が得られた。この Sweep をさらに下流へと進めるためには, $Q'_{i,n}$ を下流側の変数で与えなければならないが, 合流点である 1 番ライザーには, $n-1$, および $n-2$ 番小管路系が接続されているため, それらの $Q'_{1,n-1}$ および $Q'_{N,n-2}$ に関する方程式を連立させて, $Q'_{1,n}$ と $Q'_{N,n-1}$ を $Q'_{N,n-2}$ で表してやる必要がある。

しかし, $n-2$ 番小管路系が一本の管路しか持たない場合, 即ち合流点が連続して存在する場合には, $Q'_{N,n-2}$ ($N=1$ となるが) も, 続く $n-3$, $n-4$ 番小管路系の影響を受けることになり, $Q'_{i,n-3}$ と $Q'_{N,n-4}$ が変数として加わる。結局, 連続する合流点に関係する管路内流量の全ての方程式を連立させなければならない。

ここでは図-3 に示すように合流点が m 点連続する場合について考える。

合流すべき枝管小管路系に対しては, それぞれの上流端境界条件を用いて Forward Sweep を進め, 下流端管路に関する 14) 式までは求められているものとする。即ち, ここでは図-3 の番号に即して,

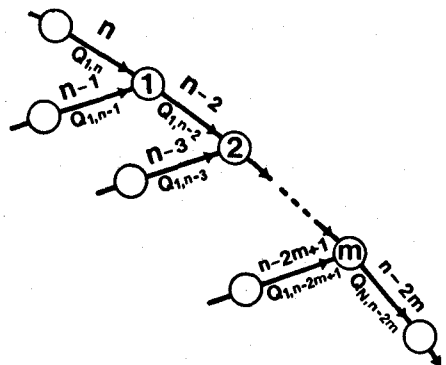


図-3 連続する合流点

$$Q'_{2,n'} = E_{1,n'} Q'_{1,n'} + F_{1,n'}, \quad n' = n-1, n-3, \dots \quad \dots\dots\dots 15)$$

合流を考慮した Q'_i による 3) 式と 1) 式とから, 合流部の全ての管路内流量に関する方程式は, 連立方程式

$$\left\{ b_{2,n}(E_{1,n}-1) - b_{1,n} - \frac{1}{c_{1,n}} \left[Q'_{1,n} - b_{1,n} Q'_{1,n-1} + b_{1,n} Q'_{1,n-2} = \frac{d_{1,n}}{c_{1,n}} + a_{1,n} - a_{2,n} - b_{2,n} F_{1,n} \dots \dots 16 \right] \right.$$
$$\left\{ \begin{array}{l} A_n, B_n, C_n \\ A_{n-1}, B_{n-1}, C_{n-1} \\ A_{n-2}, B_{n-2}, C_{n-2}, D_{n-2}, E_{n-2} \\ A_{n-3}, B_{n-3}, C_{n-3} \\ A_{n-4}, B_{n-4}, C_{n-4}, D_{n-4}, E_{n-4} \\ A_{n-5}, B_{n-5}, C_{n-5} \\ A_{n-6}, B_{n-6}, C_{n-6}, D_{n-6}, E_{n-6} \\ \\ \\ \\ A_{n-2m+1}, B_{n-2m+1}, C_{n-2m+1} \\ A_{n-2m}, B_{n-2m}, C_{n-2m}, D_{n-2m} \end{array} \right\} \dots \quad (17)$$

それ故、これらの方程式を解く方法として、Double Sweep 法に習い、まず 1 行および 2 行目の式から、 $Q'_{i,n}$ と $Q'_{i,n-1}$ を $Q'_{i,n-2}$ で表し 3 行目の式へ代入する。すると 3 行目の式は 2 変数が消去されて 3 変数に関する式となるが、それによるマトリックスの形はあたかも最初のマトリックスと同形を為すことがわかる。即ち、1 行目および 2 行目の式を連立させると、 $Q'_{i,n}$ と $Q'_{i,n-1}$ は次式で与えられる。

$$Q'_{1,n-1} = U_{n-1}Q'_{1,n-2} + V_{n-1} \dots\dots\dots 19)$$

$$U_{n-1} = \frac{A_n C_{n-1} - A_{n-1} C_n}{A_{n-1} B_n - A_n B_{n-1}}, \quad V_{n-1} = \frac{A_{n-1} Z_n - A_n Z_{n-1}}{A_{n-1} B_n - A_n B_{n-1}} \quad (21)$$

式 18), 19) を 17) 式の 3 行目の式へ代入すると,

$$(A_{n-2} U_n + B_{n-2} U_{n-1} + C_{n-2}) Q'_{1, n-2} + D_{n-2} Q'_{1, n-3} + E_{n-2} Q'_{1, n-4} = Z_{n-2} - A_{n-2} V_n - B_{n-2} V_{n-1} \dots\dots 22)$$

—678—

$Q'_{1,n-2m+2} = U_{n-2m+2} Q'_{N,n-2m} + V_{n-2m+2}$, $Q'_{1,n-2m+1} = U_{n-2m+1} Q'_{N,n-2m} + V_{n-2m+1}$ が決まり, これらを最終行の式へ代入すると次式が導かれる。

$$(A_{n-2m} U_{n-2m+2} + B_{n-2m} U_{n-2m+1} + C_{n-2m}) Q'_{N,n-2m} + D_{n-2m} Q_{N-1,n-2m} = Z_{n-2m} - A_{n-2m} V_{n-2m+2} - B_{n-2m} V_{n-2m+1} \cdots 23)$$

故に, $E_{N-1,n-2m}$ と $F_{N-1,n-2m}$ を用いて

$$E_{N-1,n-2m} = \frac{-D_{n-2m}}{A_{n-2m} U_{n-2m+2} + B_{n-2m} U_{n-2m+1} + C_{n-2m}}, F_{N-1,n-2m} = \frac{Z_{n-2m} - A_{n-2m} V_{n-2m+2} - B_{n-2m} V_{n-2m+1}}{A_{n-2m} U_{n-2m+2} + B_{n-2m} U_{n-2m+1} + C_{n-2m}} \cdots 24)$$

と表すと, 23)式は $Q'_{N,n-2m} = E_{N-1,n-2m} Q'_{N-1,n-2m} + F_{N-1,n-2m}$ の形で表される。この式は Double Sweep 法での13)式を与えるもので, $n-2m$ 番小管路系における Forward Sweep を始めるための出発式となるものである。以上の方法は, 合流点まで進められた Forward Sweep を合流条件を満たしながら下流側管路系へと接続させたもので, Double Sweep 法と類似した計算方法として使用できる。

5. 多重合流への拡張

前節における, 小管路系が2本づつ合流する場合の接続法を, より多数の管路が一点に合流する多重合流の場合へと拡張を試みる。図-4は多重合流が連続して存在している様子を示す。前節からも推測できるように, 一本の管路内流量に関する方程式は, その管路の両端ライザーに接続する全ての管路内流量と関係している。例えば図-4の $n-3$ 番小管路系には, 上流側3本, 下流側2本の管路が接続しているため, その流量に対する方程式には, $Q'_{1,n-3}$ 自身を含めて6個の変数が含まれる事がわかる。しかし, 各小管路系内の2番管路内流量は14)式で表されるから, それらを変数に数える必要はない。図-4の管路系を例に取り, 17)式の表示法に従って方程式を作ると, その係数マトリックス $[M_C]$ は次式で表される。

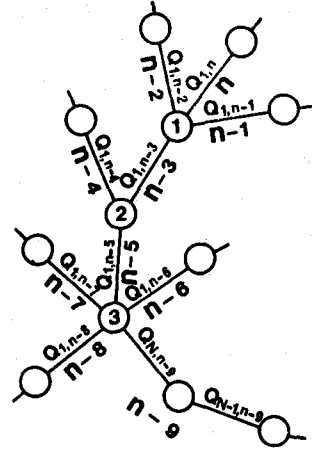


図-4 多重合流

$$[M_C] = \begin{bmatrix} A_n & B_n & C_n & D_n \\ A_{n-1} & B_{n-1} & C_{n-1} & D_{n-1} \\ A_{n-2} & B_{n-2} & C_{n-2} & D_{n-2} \\ A_{n-3} & B_{n-3} & C_{n-3} & D_{n-3} & E_{n-3} & F_{n-3} \\ & A_{n-4} & B_{n-4} & C_{n-4} \\ & A_{n-5} & B_{n-5} & C_{n-5} & D_{n-5} & E_{n-5} & F_{n-5} & G_{n-5} \\ & & A_{n-6} & B_{n-6} & C_{n-6} & D_{n-6} & E_{n-6} \\ & & A_{n-7} & B_{n-7} & C_{n-7} & D_{n-7} & E_{n-7} \\ & & A_{n-8} & B_{n-8} & C_{n-8} & D_{n-8} & E_{n-8} \\ & & A_{n-9} & B_{n-9} & C_{n-9} & D_{n-9} & E_{n-9} & F_{n-9} \end{bmatrix} \cdots 24)$$

$$\{Q'\}^T = \{Q'_{1,n}, Q'_{1,n-1}, \dots, Q'_{1,n-8}, Q'_{N,n-9}, Q'_{N-1,n-9}\}, \quad \{Z\}^T = \{Z_n, Z_{n-1}, \dots, Z_{n-8}, Z_{n-9}\}$$

多重合流が連続する場合には, 各点での合流管路数もまちまちなため, マトリックス $[M_C]$ 上での要素が一定幅にはならないが, 対角線近傍に配列されたバンドマトリックスを形成している。それ故, 前節で行った方法に従うと, まず最初の3行より $Q'_{1,n}$, $Q'_{1,n-1}$, $Q'_{1,n-2}$ を $Q'_{1,n-3}$ で表し第4行目の式へ代入すると, それは $Q'_{1,n-3}$, $Q'_{1,n-4}$, $Q'_{1,n-5}$ だけの関係式となり5行目の式と対応する。故に両方程式を連立させ, 結果を6行目の式へ代入する。以上の過程を最終段の方程式まで進めると, $Q'_{N,n-9}$ と $Q'_{N-1,n-9}$ の関係式が決定する。この式は, まさに n 番小管路系まで進められた Forward Sweep を $n-9$ 番小管路系へと接続する事を意味する。即ち合流が多重に行われる場合においても, Double Sweep と同様の方法で接続を処理する事が可能で

ある。しかし、この場合には、各ライザーにおける多重連結管路数が異なるため、それぞれに対応した連立方程式の解法（前節の係数 U , V に対応した式）を何組か用意しておかねばならない。これは多少煩雑な面もあるが、多重連結とはいえ、1本のライザーを介して結合する管路数はそれ程多くないと考えられるため、実用上は特別の困難は生じないであろう。

6. 応用結果と結論

管路系に対する Double Sweep 法の効果を検討するために、今まで筆者等が行ってきた下水管渠内急変不定流の解析へ適用した。この管渠系は図-5に示すように、28本の管路がマンホールを介しながら連結されたもので3箇所で合流があり、その内2箇所は連続した合流点となっているが、多重連結は含まない。比較のために用いた解析法は、管路全体に下流側から通し番号を付け、そこで作られる連立方程式をマトリックスの消去法によって解くもので、筆者等が模型実験との比較の上で十分満足しうる結果を得たものである。上流端および、流体運動を励起させる下流端境界条件も、両者とも同じものである。解析には東京都立大学のファコムM180Ⅰの計算機を使用した。

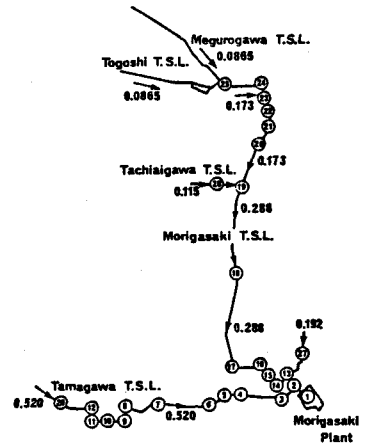


図-5 下水管渠系

図-6は両解析法による計算結果の一部であり、1番ライザー内の水位変動と、その速度をプロットしたもので、流量制御用ゲートの開閉時間を特性時間とし、その10倍の時間まで運動を追跡している。両者とも極めてよい一致を示し、Double Sweep法の有効さが確認できた。計算に要したCPU時間は、消去法によるものが298秒であるのに対し、Double Sweep法では220秒と約 $\frac{1}{4}$ の短縮を得た。

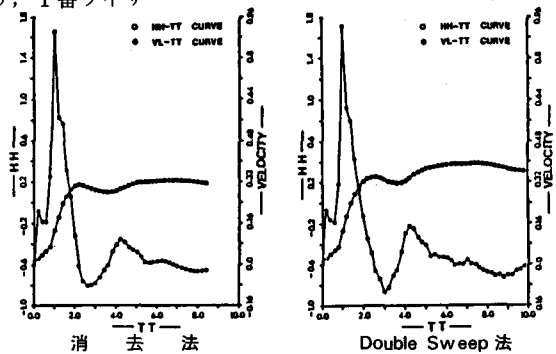


図-6 実測値と計算結果

1) Double Sweep 法による連立方程式の解析は無条件的な安定性を有しており、管路数が多くなった場合、くり返し計算を多用する消去法より優れている。 2) 消去法に於いては、管路数が1本増えただけでも1行大きいマトリックスを扱うことになるが、Double Sweep 法では代数計算が1つ増えたに過ぎない。それ故大規模な管路系に於いては両者の差は極めて大きくなる。 3) 管路数あるいは小管路系の増減に対し、消去法では、管路番号の変動に伴う方程式の再構成が必要となるが、Double Sweep 法では容易であり、系統的処理が可能である。 4) 分割された小管路系に含まれる管路数は1本から最大数までまちまちであるが、Double Sweep 法では、その最大管路数に合わせた配列を用意せねばならず、配列の無駄が多いという欠点がある。 5) 消去法と比してアルゴリズムの複雑さも難点の一つといえよう。

7. 参考文献

- 1) 安川, 宇井, 尾上: 下水管渠内急変被圧不定流の解析法, 第28回水理講演会論文集, 1984。
- 2) J. A. Cunge, et al.: Practical Aspects of Computational River Hydraulics, PITMAN 1980.
- 3) M. Holt: Numerical Methods in Fluid Dynamics, Springer-Verlag 1977.