

ダム破壊流れの一近似解
An Approximate Solution of Dam-Break Flows

秋田大学 土木工学科 正 員 松 富 英 夫

1. ま え が き

抵抗の影響を考慮した水平床でのダム破壊流れの理論として、ドライ・ベッド上のWhitham 理論¹⁾とそれを下流測水深の有する場合へと拡張した著者のもの²⁾がある。しかし、これ等の理論には解の収束性に由来する適用限界が存在し、ダム破壊後の比較的短い間にしか適用できない。その後の流れに適用できる理論は残念ながら今のところ存在しない。この段階の流れの予測には物理または数値実験にたよらざるを得ないのが現状である。そこで、本研究はこの段階の流れの理論的予測を試みようとするもので、ドライ・ベッドと下流測水深を有する二つの場合について、Whithamと著者の理論各々の適用限界での水理量を境界条件とした先端移動に関する近似解を導こうとするものである。

2. 基 本 式

図-1に示すように、ダム破壊による急変不定流は抵抗の無視できる領域(Region-1)とできない領域(Region-2)の二つに分けられるとする。そして、前者ではRitter 理論が成立し、後者では静水圧分布と流れ方向の水粒子速度は時間だけの関数とする。さらに、本研究はWhitham や著者の理論の適用限界後の流れを対象としているので、Region-2での局所項の影響は他の残りの項に比して無視できる程小さいと仮定する。

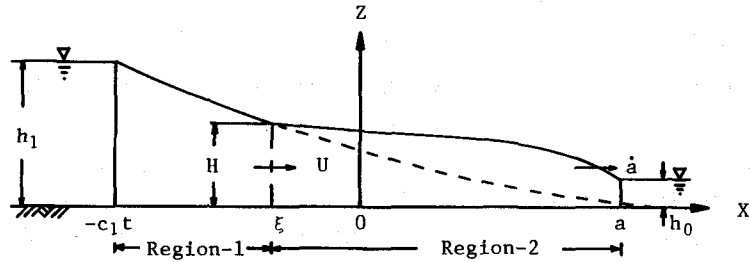


図-1 本研究モデルと記号説明

仮定により、Region-1での諸水理量は初期上流測水深 h_1 が与えられればRitter の次式で求められるので既知量である。

$$u = \frac{2}{3} \left(c_1 + \frac{x}{t} \right) \dots\dots\dots (1)$$

$$h = \frac{1}{9g} \left(2 c_1 - \frac{x}{t} \right)^2 \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 u : 水粒子速度、 h : 水深、 $c_1 = \sqrt{gh_1}$ 、 g : 重力加速度、 x : ダム位置を原点とする距離座標、 t : 時間。
よって、Region-2での諸水理量を求めることが本研究の目的となる。

Region-2での諸水理量はその領域全体の連続と運動量式を誘導し、それを解くことによって求められる。
この領域の連続と運動量式は²⁾

$$\frac{dM}{dt} = \rho H \left(U - \frac{d\xi}{dt} \right) + \rho h_0 \frac{da}{dt} \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{dP}{dt} = \rho H U \left(U - \frac{d\xi}{dt} \right) + \rho h_0 U \frac{da}{dt} + \frac{1}{2} \rho g H^2 - \frac{1}{2} \rho g h_0^2 - \rho K U (a - \xi) \dots\dots\dots (4)$$

ここで、M：本領域の全質量、P：全運動量、H、U：本領域後端での水深と水粒子速度、a：先端位置、 ξ ：後端位置、 h_0 ：初期下流側水深、K：抵抗係数、 ρ ：水の密度。

仮定により、運動量の時間変化率は、

$$\frac{dP}{dt} = U \frac{dM}{dt} + M \frac{dU}{dt} \approx U \frac{dM}{dt} \quad (5)$$

よって、(3)・(5)式を(4)式に代入すると、

$$\frac{1}{2} g H^2 - \frac{1}{2} g h_0^2 - K U^2 (a - \xi) = 0 \quad (6)$$

一方、 $x = \xi$ では(1)・(2)式から次の関係が得られる。

$$\xi = \left(\frac{3}{2} U - c_1 \right) t \quad (7)$$

$$H = h_1 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{U}{c_1} \right)^2 \quad (8)$$

故に、(6)式は

$$\frac{1}{2} g h_1^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{U}{c_1} \right)^4 - \frac{1}{2} g h_0^2 - K U^2 \left(a + c_1 t - \frac{3}{2} U t \right) = 0 \quad (9)$$

(9)式は水粒子速度Uと先端位置aの二つの未知数を含んでおり、このままでは解けない。そこで、水粒子速度と先端移動速度 $\dot{a}$ との間に次の関係を仮定することにする。

$$U = r \frac{da}{dt} \quad (10)$$

ここで、rは実際には初期のダム下・上流水深比 h_0/h_1 と時間の関数と思われるが、本研究では h_0/h_1 のみの関数と仮定する。(10)式を(9)式に代入すると、

$$\frac{1}{2} g h_1^2 \left(1 - \frac{r}{2} \frac{\dot{a}}{c_1} \right)^4 - \frac{1}{2} g h_0^2 - K r^2 \dot{a}^2 \left(a + c_1 t - \frac{3}{2} r \dot{a} t \right) = 0 \quad (11)$$

(11)式が本研究の最終的に解くべき式で、 $h_0 = 0$ と置くとドライ・ベッドの場合の基本式となる。

3. 基本式の解

(11)式は、rが任意実数であるため、rの特別な場合にしか解けない。

ところで、ダム破壊流れは、著者の実験によれば、 h_0/h_1 の値により大きく二つに分類され得る。一つは、ドライ・ベッドの場合が好例で、水粒子速度と先端移動速度が一致する($r = 1$)噴流型である。もう一つは両者が一致しない($r < 1$)段波型である。これ等の臨界は $h_0/h_1 \approx 0.28$ である³⁾。よって、多くのダム破壊問題は噴流型に含まれることになり、この場合のみの議論でも非常に興味深いものと思われる。

噴流型の場合、(11)式は

$$\frac{1}{2} g h_1^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\dot{a}}{c_1} \right)^4 - \frac{1}{2} g h_0^2 - K \dot{a}^2 \left(a + c_1 t - \frac{3}{2} \dot{a} t \right) = 0 \quad (12)$$

そして、(12)式の一般解は

$$a = \frac{1}{2} \frac{h_1}{K} \left\{ \left(1 - \frac{h_0^2}{h_1^2} \right) \frac{c_1^2}{p^2} - 2 \frac{c_1}{p} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{p}{c_1} + \frac{1}{16} \frac{p^2}{c_1^2} \right\} - \left(c_1 - \frac{3}{2} p \right) t \quad (13)$$

$$t = \frac{1}{(2c_1 - p)^3} \left[\frac{g h_1^2}{K} \left\{ \frac{1}{32} \frac{p^4}{c_1^4} - \frac{1}{3} \frac{p^3}{c_1^3} + \frac{5}{4} \frac{p^2}{c_1^2} - 2 \left(5 - \frac{h_0^2}{h_1^2} \right) \ln p - 8 \left(2 - \frac{h_0^2}{h_1^2} \right) \frac{c_1}{p} \right. \right. \\ \left. \left. + 4 \left(1 - \frac{h_0^2}{h_1^2} \right) \frac{c_1^2}{p^2} \right\} - \text{const.} \right] \quad (14)$$

ここで、 $p = \dot{a}$ 、const.：積分定数。以下、ドライ・ベッドと下流側水深を有する場合の二つに分けて特殊解を求めることにする。

3-1 ドライ・ベッドの場合

13・14式から、ドライ・ベッドの場合の一般解は^{注)}

$$a = \frac{1}{2} \frac{h_1}{K} \left[\frac{c_1^2}{p^2} - 2 \frac{c_1}{p} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{p}{c_1} + 16 \frac{p^2}{c_1^2} \right] - (c_1 - \frac{3}{2} p) t \quad (15)$$

$$t = \frac{1}{(2c_1 - p)^3} \left[\frac{gh^2}{K} \left(\frac{1}{32} \frac{p^4}{c_1^4} - \frac{1}{3} \frac{p^3}{c_1^3} + \frac{5}{4} \frac{p^2}{c_1^2} - 10 \ln p - 16 \frac{c_1}{p} + 4 \frac{c_1^2}{p^2} \right) - \text{const.} \right] \quad (16)$$

この解の境界条件をWhitham 理論の適用限界での水理量とすると、級数解の第7項までを採用する時、それは $\xi = 0$ となる時のものと考えてよく、⁴⁾

$$\dot{a} = \frac{2}{3} c_1 \quad (17)$$

$$a \approx 0.3043 \frac{h_1}{Kw} \quad (18)$$

$$t \approx 0.3416 \frac{1}{Kw} \sqrt{\frac{h_1}{g}} \quad (19)$$

ここで、 Kw はWhitham 理論での抵抗係数であることを示す。Whitham 理論の解の収束例を図-2に示す。図中のB・C・点は第7項までを採用した時の $\xi = 0$ となる点であり、この点までであれば第7項までを採用すれば十分に真値に収束していることが伺われる。よって、17・19式から、16式の積分定数は

$$\text{const.} \approx -(10 \ln c_1 + 10.482 + 0.8098 \frac{K}{Kw}) \frac{gh^2}{K} \quad (20)$$

一方、15式の補正量 Δ は17・18式より

$$\Delta \approx (0.3043 \frac{K}{Kw} - \frac{2}{9}) \frac{h_1}{K} \quad (21)$$

以上より、ドライ・ベッドの場合の解は

$$a \approx \frac{h_1}{K} \left(\frac{1}{2} \frac{c_1}{p^2} - \frac{c_1}{p} + 0.5278 + 0.3043 \frac{K}{Kw} - \frac{1}{4} \frac{p}{c_1} + \frac{1}{32} \frac{p^2}{c_1^2} \right) - (c_1 - \frac{3}{2} p) t \quad (22)$$

$$t \approx \frac{1}{(2c_1 - p)^3} \frac{gh^2}{K} \left(\frac{1}{32} \frac{p^4}{c_1^4} - \frac{1}{3} \frac{p^3}{c_1^3} + \frac{5}{4} \frac{p^2}{c_1^2} + 10.482 + 0.8098 \frac{K}{Kw} + 10 \ln \frac{c_1}{p} - 16 \frac{c_1}{p} + 4 \frac{c_1^2}{p^2} \right) \quad (23)$$

ただし、 $0 \leq \dot{a} = p \leq 2c_1/3$ 。

3-2 下流側水深を有する場合 ($h_0/h_1 < 0.28$)

この場合の一般解は13・14式である。この解の境界条件として、著者の理論の適用限界での水理量を用いることにする。その適用限界の検討例を図-3に示す。図中のB・C・点は級数解の第7項までを採用した時の $\xi = 0$ となる点を示す。この図によると、このB・C・点までであれば第7項までを採用すれば十分に真値に収束していることが伺われる。ドライ・ベッドの場合と同じく、第7項までを採用し、 $\xi = 0$ となる時の水理量を境界条件として本研究対象流れの解を誘導することにする。ただし、著者の解は非常に煩雑なものであるで個々の場合について誘導することにする。 $b_2, \dots, b_8$ を順次級数解の係数とすると、 $h_0/h_1 = 0.2$ の時、

$$\left. \begin{aligned} b_2 &= 0.3659, \quad b_3 = 0.0615, \quad b_4 = 0.3069, \quad b_5 = -0.0153, \\ b_6 &= 0.4047, \quad b_7 = -0.2068, \quad b_8 = 0.6791 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

この場合の $\xi = 0$ となる時は

$$\dot{a} = \frac{2}{3} c_1 \quad (25)$$

$$a \approx 0.9525 \sqrt{\frac{h_0}{h_1}} \frac{h_1}{Km} \quad (26)$$

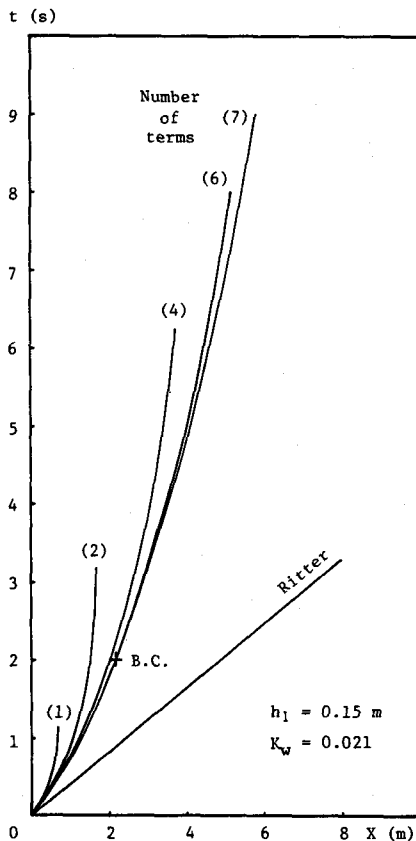


図-2 Whitham 理論の収束性

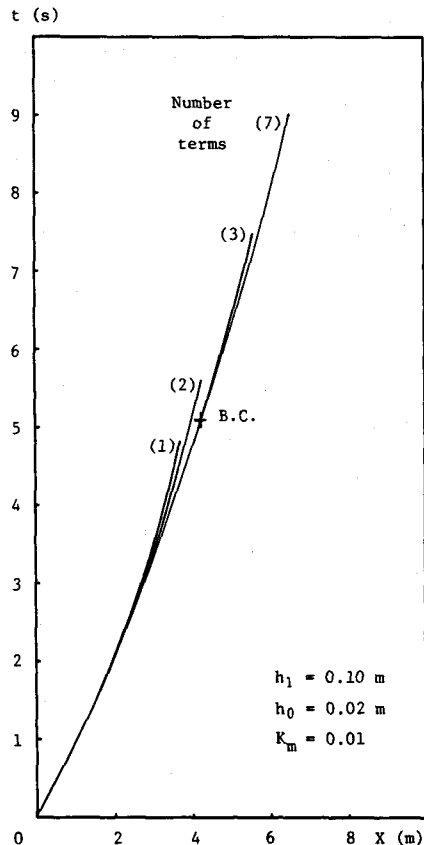


図-3 著者の理論の収束性

$$t \approx 1.1268 \sqrt{\frac{h_0}{h_1}} \frac{1}{K_m} \sqrt{\frac{h_1}{g}} \quad (27)$$

ここで、 K_m は著者の理論での抵抗係数であることを示す。よって、25・27式から、14式の積分定数は

$$\text{const.} \approx - \left\{ 2 \left(5 - \frac{h_0^2}{h_1^2} \right) \ln \frac{2}{3} c_1 + 3 \left(5 - \frac{h_0^2}{h_1^2} \right) - \frac{75}{162} + 2.6707 \sqrt{\frac{h_0}{h_1}} \frac{K}{K_m} \right\} \frac{g h_1^2}{K} \quad (28)$$

一方、13式の補正量 Δ は25・26式より、

$$\Delta \approx \left\{ 0.9523 \sqrt{\frac{h_0}{h_1}} \frac{K}{K_m} + \frac{65}{72} - \frac{9}{8} \left(1 - \frac{h_0^2}{h_1^2} \right) \right\} \frac{h_1}{K} \quad (29)$$

以上より、下流側水深を有する場合の解は、

$$a \approx \frac{h_1}{K} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{h_0^2}{h_1^2} \right) \frac{c_1^2}{p^2} - \frac{c_1}{p} + 0.9523 \sqrt{\frac{h_0}{h_1}} \frac{K}{K_m} + \frac{119}{72} - \frac{9}{8} \left(1 - \frac{h_0^2}{h_1^2} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \frac{p}{c_1} + \frac{1}{32} \frac{p^2}{c_1^2} \right\} - \left(c_1 - \frac{3}{2} p \right) t \quad (30)$$

$$t \approx \frac{1}{(2c_1 - p)^3} \frac{g h_1^2}{K} \left\{ \frac{1}{32} \frac{p^4}{c_1^4} - \frac{1}{3} \frac{p^3}{c_1^3} + \frac{5}{4} \frac{p^2}{c_1^2} + 2 \left(5 - \frac{h_0^2}{h_1^2} \right) \ln \frac{2}{3} + 3 \left(5 - \frac{h_0^2}{h_1^2} \right) \right. \\ \left. - \frac{75}{162} + 2.6707 \sqrt{\frac{h_0}{h_1}} \frac{K}{K_m} + 2 \left(5 - \frac{h_0^2}{h_1^2} \right) \ln \frac{c_1}{p} - 8 \left(2 - \frac{h_0^2}{h_1^2} \right) \frac{c_1}{p} \right. \\ \left. + 4 \left(1 - \frac{h_0^2}{h_1^2} \right) \frac{c_1^2}{p^2} \right\} \quad (31)$$

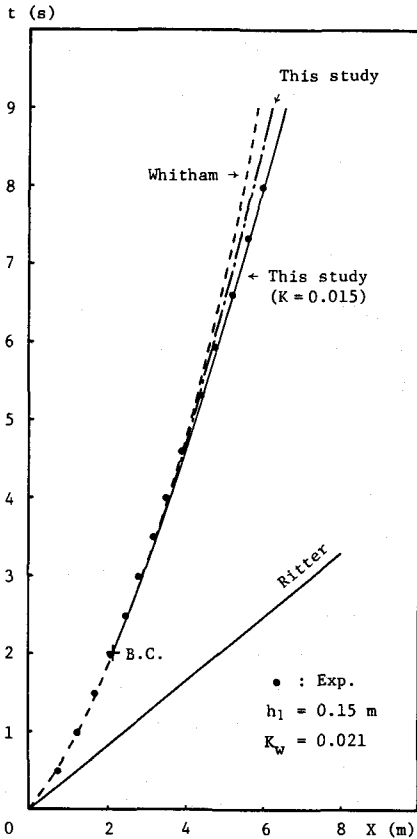


図-4 ドライ・ベッドの場合の流れ先端の軌跡

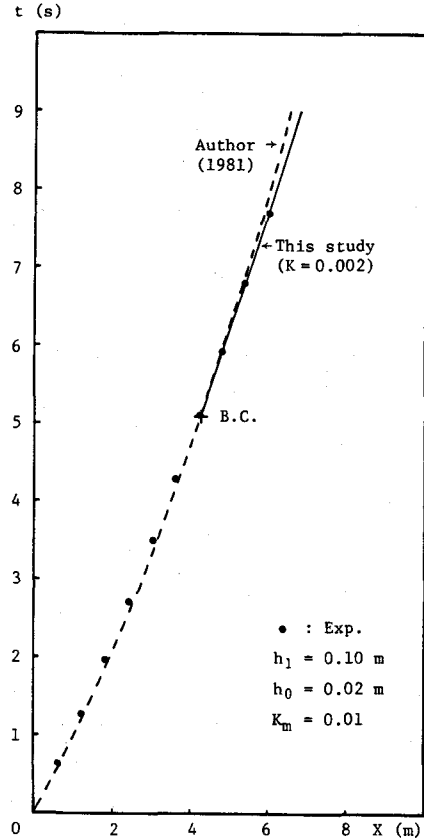


図-5 下流側水深を有する場合の流れ先端の軌跡

ただし、 $c_0 \leq p = \dot{a} \leq 2c_1/3$ 、 $c_0 = \sqrt{gh_0}$ 。26~31式中の h_0/h_1 は 0.2 であるが、できるだけ一般性を示すため h_0/h_1 の形で残している。

4. 近似解の検討

本研究の近似解22・23式と30・31式の妥当性と性質を検討するため実験結果との比較を行った。

実験は幅 0.3 m、高さ 0.5 m、長さ 11.5 m の両面ガラス張り鋼製矩形水路を用いて行った。水路は水平に設置し、上流端から 5.5 m 下流のところにゲートを設けてそこを貯水部とした。ゲートは手動の引き揚げ式である。ゲート下流の底面には、できるだけ早く $\xi = 0$ となるようにするため、水路横断方向に高さ (k) 0.5 cm の角柱棧粗度 (5×5×300 mm) を間隔 (s) 5 cm で設置した。測定項目は流れ先端の軌跡のみで、ビデオ・システムを用いた。

図-4と5は、ドライ・ベッドと下流側水深を有する場合の、流れ先端軌跡に関する実験値と本研究の近似解の比較を示したものである。ただし、実験値は各々3回の平均である。図-4の破線はWhitham理論を、一点鎖線はWhitham理論と同じ抵抗係数を採用した時の本研究の近似解を、そして実線は実験値によく合うように抵抗係数を選択した場合の本研究の近似解を示す。また、図-5中の破線は著者の理論を、そして実線は図-4の場合と同じである。これ等の図によると、本研究の近似解は、ダム破壊直後の非定常性の強い流れでの抵抗係数に比較して、小さな抵抗係数を採用することで実際に供しうるものであることがわかる。この理由は本研究の解析が $dU/dt \approx 0$ とみなしたほぼ定常解析になっているためと思われる。

5. む す び

本研究の主要な結論を以下に簡条書きする。Ⅰ) ドライ・ベッドと下流側水深を有する二つの場合について、ダム破壊後比較的長い時間を経てからの流れの近似解を導いた。ただし、下流側水深を有する場合については、 $h_0/h_1 < 0.28$ の噴流型の場合についてのみである。Ⅱ) この近似解を実際に供しようとするれば、この近似解が $dU/dt = 0$ というほぼ定常解析によって導かれているため、Whitham や著者の理論のような非定常解析における抵抗係数に比較して、小さな抵抗係数を要求する。

謝 辞

本研究を遂行するに当り、東北大学首藤伸夫教授と秋田大学浅田宏教授より有益なる御意見、御教示を賜わった。また、実験および資料整理を行うに際して本学卒研究生鋒山勉君と斉藤浩君の助力を得た。ここに記して深甚なる感謝の意を表する。最後に、本研究の一部は昭和59年度文部省科学研究費奨励研究(A)により行われたことを付記しておく。

参 考 文 献

- 1) Whitham, G.B.: The effects of hydraulic resistance in the dam-break problem, Proc. of Royal Society of London, Series A, Vol. 227, pp. 399~407, 1955.
- 2) 松富英夫: 下流側水深を有するダム破壊問題における抵抗の効果, 第25回水講演文集, pp. 347~353, 1981.
- 3) Matsutomi, H.: On the Propagation of Bores over a Sloping Beach Caused by the Sudden Water Release, Coastal Eng. in Japan, Vol. 27, 1984 (投稿中).
- 4) たとえば, Yevjevich, V.: Analytical approaches in computing wave profiles for complete dam removal, K. Mahmood and V. Yevjevich ed., Unsteady Flow in Open Channels, Vol. 1, Water Resources Publications, pp. 648~657, 1975.

注) パラメータ p の内容は異なるが Whitham も $dU/dt = 0$ の場合の解を導いている。