

不連続部を含む時間的変化の急な流れの数値シミュレーション
Numerical Simulation of Hydraulic Bore

京都大学工学部 正員 岩 佐 義 朗
京都大学工学部 正員 多 田 彰 秀

1. はじめに

開水路非定常流のうち、洪水流に代表される時間的変化の緩やかな流れについては、すでにいくつかの数値シミュレーション法が導かれており、実用にも供せられている。一方、ダムの破壊、ゲートの緊急開放、発電所における負荷の急変動、河川への津波の遡上などに起因して生じる時間的変化の急な流れは、不連続部を含む流れとなることが多く、その数値シミュレーション法は、不連続部での取扱いがむずかしいために十分に確立されているとはいえない。わずかに、Chaudhry and Contractorによる陰式四点差分を用いた方法¹⁾および $x-t$ 平面において特性曲線上に沿って基礎式を積分するという数値解析的にはきわめて複雑な方法^{2),3)}が試みられているにすぎない。本研究は、以上の点を踏まえ、時間的変化の急な流れの数値シミュレーション法の開発を目的としている。まず、厳密な意味での段波の発生には到っていないまでも、時間的変化の急な流れを対象とし、従来から岩佐・井上⁴⁾らが用いている固定格子点の特性曲線法における内挿計算の精度を上げた計算法を紹介する。ついで、この計算法を用いて広幅長方形断面の一樣水路内に想定した単斜上昇波のシミュレーションを行ない、波先の挙動ならびに伝播特性について検討する。最後に、水理実験との比較を行ない、時間的変化の急な流れに対する内挿精度を上げた特性曲線法の有効性・妥当性について考察する。

2. 基礎式とその差分化

基礎式； 対象とする流れの特性を考慮して一次元運動量解析法を適用すれば、基礎式は次の連続式と運動量式から構成される。なお、水路は一樣で、横流入量は存在しないものとしている。

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial (gM)}{\partial x} = Ag(s_0 - s_f) \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 A ；流水断面積、 Q ；流量、 $v = Q/A$ ；平均流速、 h_c ；水面から流水断面の図心までの深さ、 $s_0 = \sin\theta$ ；水路床こう配、 s_f ；摩擦こう配、ここではManning公式を用いて $s_f = n^2 v^2 / R^{4/3}$ (n ；粗度係数、 R ；径深) とする、 $M = \beta Q^2 / gA + \lambda' h_c \cos\theta$ ；比力、 λ' ；圧力分布係数、 β ；運動量係数、 g ；重力加速度、 x ；距離、 t ；時間を表わす。

差分化； 次に述べる二つの差分法を用いて(1)および(2)式の差分化を行なう。

①二次内挿を導入した特性曲線法；(1)および(2)式を特性曲線表示すれば、(3)式に沿って(4)式がそれぞれ成立する（複号同順）。ここで、 B は水面幅である。

$$\zeta_{\pm}; \left(\frac{dx}{dt}\right)_{\pm} = (u_0 \pm c_0) = \beta v \pm \sqrt{\beta(\beta-1)v^2 + \frac{\lambda' g A \cos\theta}{B}} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$(-\beta v^2 + \lambda' g \cos\theta \frac{A}{B}) \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right) + (u_0 \pm c_0) \left\{ \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial (gM)}{\partial x} - Ag(s_0 - s_f) \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

従来より、岩佐・井上らが用いてきた特性曲線法（以後、CH1法と呼ぶ）では、図-1のR点およびS点での水理量 f を $(j+1, n)$ 点と (j, n) 点および (j, n) 点と $(j-1, n)$ 点の二点間の線形内挿により求めていた。本研究では、さらに近似の精度を上げ $(j+1, n)$ 、 (j, n) 、 $(j-1, n)$ の三点間の二次内挿によりR点およびS

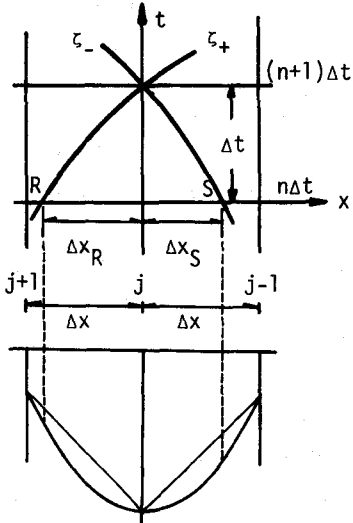


図-1 差分格子

点の水理量を求める方法（以後、CH2法と呼ぶ）を採用する。したがって、(4)式における x 方向の微分値が差分化の段階で従来のCH1法とは異なってくる。すなわち、 ζ_+ についてそれを示せば、次のとおりである。

$$\text{CH1法: } \frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_j^n - f_{j+1}^n}{\Delta x}, \text{ CH2法: } \frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_j^n - f_R^n}{\Delta x_R} = \frac{1}{2\Delta x} (f_{j+1}^n - f_{j-1}^n) + \frac{1}{2} \frac{\Delta x_R}{(\Delta x)^2} (f_{j+1}^n - 2f_j^n + f_{j-1}^n)$$

二次内挿を用いて(4)式の差分化を行なうと次式が得られる。

$$\zeta_+ \text{に沿って; } CM_j^n \left(\frac{A_j^{n+1} - A_j^n}{\Delta t} + \frac{Q_j^n - Q_R^n}{\Delta x_R} \right) + (u_0 + c_0)_j^n \left[\frac{Q_j^{n+1} - Q_j^n}{\Delta t} + g \frac{M_j^n - M_R^n}{\Delta x_R} - \frac{g}{2} \{ A_j^{n+1} (s_0 - s_{f_j}^{n+1}) + A_R^n (s_0 - s_{f_R}^n) \} \right] = 0 \quad \dots\dots (5)$$

$$\zeta_- \text{に沿って; } CM_j^n \left(\frac{A_j^{n+1} - A_j^n}{\Delta t} + \frac{Q_S^n - Q_j^n}{\Delta x_S} \right) + (u_0 - c_0)_j^n \left[\frac{Q_j^{n+1} - Q_j^n}{\Delta t} + g \frac{M_S^n - M_j^n}{\Delta x_S} - \frac{g}{2} \{ A_S^n (s_0 - s_{f_S}^n) + A_j^{n+1} (s_0 - s_{f_j}^{n+1}) \} \right] = 0 \quad \dots\dots (6)$$

ここで、 $CM_j^n = (-\beta v^2 + \lambda' g \cos \theta \frac{A}{B})_j^n$, Q_R, Q_S ; 図-1のR点およびS点での流量 Q を表わし、

$$Q_R^n = Q_j^n + \frac{\Delta x_R}{2\Delta x} (Q_{j+1}^n - Q_{j-1}^n) + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta x_R}{\Delta x} \right)^2 (Q_{j+1}^n - 2Q_j^n + Q_{j-1}^n), \quad Q_S^n = Q_j^n - \frac{\Delta x_S}{2\Delta x} (Q_{j+1}^n - Q_{j-1}^n) + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta x_S}{\Delta x} \right)^2 (Q_{j+1}^n - 2Q_j^n + Q_{j-1}^n)$$

で与えられる。なお、 $\Delta x_R = (u_0 + c_0)_j^n \Delta t$, $\Delta x_S = |(u_0 - c_0)_j^n| \Delta t$ である。また、 $M_R, M_S, A_R, A_S, s_{f_R}, s_{f_S}$ についても同様である。

② Lax-Wendroff 法；この差分法には、1-step と 2-step の二種類がある。ここでは、通常よく使用される 2-step の Lax-Wendroff 法（以後、LW 法と呼ぶ）を用いる。詳細については参考文献にゆずる⁵⁾

計算方法と境界条件； 境界以外の格子点の計算に際しては、CH2法およびLW法を適用する。一方、境界点での計算は、両者ともに適用できないので従来のCH1法を採用している。また、境界条件としては、上・下流端とも水位ハイドログラフを与える。

3. 単斜上昇波の数値シミュレーション

簡単のため、径深が水深で近似される広幅長方形断面の一樣水路を想定し、上流端で単斜上昇波を与えるとともに波先の挙動および伝播特性をシミュレーションする。表-1に示すような2ケースについて計算を行なう。用いる条件を示せば、以下の通りである。

- ① 水理条件；水路長 20.0m, 水路床こう配 1/500, 粗度係数 $n = 0.011 \text{ m}^{-1/3} \cdot \text{s}$
- ② 初期条件；初期水深 $h_0 = 0.03 \text{ m}$, $v_0 = s_0^{1/2} h_0^{2/3} / n$ の等流状態を与える。
- ③ 境界条件；上流端で図-2に示すような水位変化を与え、下流端では便宜的に初期の水位がそのまま保たれるとした（これは、もちろん擾乱が下流端まで伝播しない間でのみ有効である）。
- ④ 波先の水面こう配；Lighthill⁶⁾らの理論によれば、上流端で与えられた擾乱の波先における水深変化率 $(\frac{\partial h}{\partial t})_{\text{up}}$ は、次式で定義される K の値より大きい時、水面こう配は漸増し、boreが発生するとされている。

表-1 計算ケースと諸条件

計算ケース	$T_*(\text{sec})$	$(\frac{\partial h}{\partial t})_{\text{at up}}(\text{m/s})$		λ
CASE1	0.50	3.0×10^{-2}	$> K$	5.25
CASE2	20.00	7.5×10^{-4}	$< K$	0.41
水理条件； $n=0.011(\text{m}^{-1/3} \cdot \text{s})$, $h_0=0.03(\text{m})$, $V_0=0.393(\text{m/s})$, $K=8.91 \times 10^{-4}(\text{m/s})$				

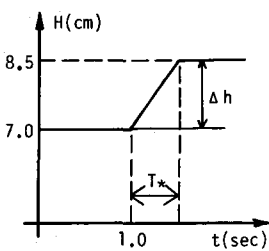


図-2 上流端境界条件

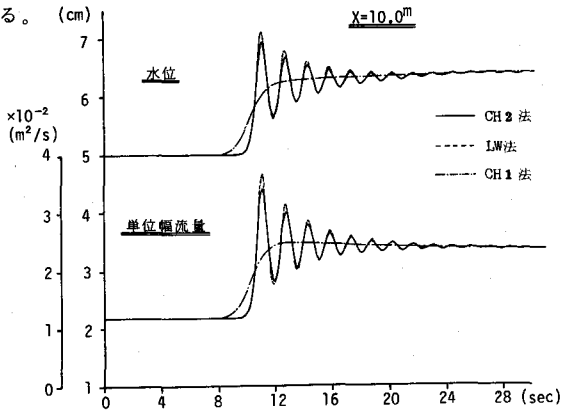


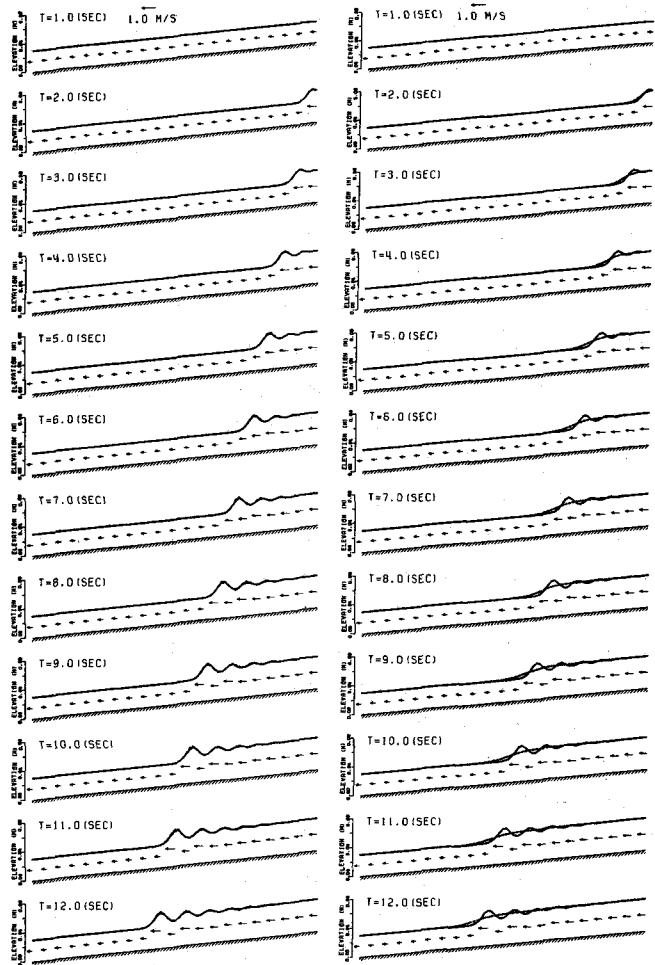
図-3 ハイドログラフ ($\Delta x = 0.25 \text{ m}$, $\Delta t = 0.01 \text{ 秒}$)

$$K = \frac{2}{3} \lambda_L h_0 \left(1 - \frac{2}{3} F_r\right) (1 + F_r) \cdots (7)$$

ここで、 $\lambda_L = g s_0 / v_0$ 、 $F_r = v_0 \sqrt{g h_0} \cos \theta$ である。さて、(7)式で与えられる K の値は、 $K = 8.91 \times 10^{-4}$ m/sとなる。一方、上流端で与える単斜上昇波の水深変化率は、Case1 のとき 3.00×10^{-2} m/s、Case2 のとき 7.50×10^{-4} m/sであるから、前者の場合に bore が発生すると推測される。また、表-1には高橋⁷⁾が提案した不定流の物理的性質を左右する無次元量 λ の値も計算されている。 λ の値から判断しても同様に前者の場合は、段波状の波と判断される。

計算結果

図-3は、Case1 の場合について差分法を変えて計算して得られた水路中央部（上流端より10m下流の地点）での水位と単位幅流量のハイドログラフである（ $\Delta x = 0.25$ m, $\Delta t = 0.01$ 秒）。実線が、ここで提案したCH2法による計算結果であり、約1.5秒の周期の減衰振動を示し次第に収束しているのが認められる。破線は、LW法による結果で、波先後方に生ずる振動の振幅がCH2法より大きいものの、両者は良い一致を示している。一方、CH1法による結果（一点鎖線）では、水位、単位幅流量ともにCH2法による計算値の変動の中間の値をとり、波先近傍の急な変化が分散され平滑化されていることが見られる。図-4(a)および(b)は、三つの計算法によって得られた水面形を二つずつ示したものである。実線は、両図ともCH2法によって求められた水面形、破線は図-4(a)がLW法、図-4(b)がCH1法による水面形である。図-3のハイドログラフより予想されたとおり、図-4(a)では、CH2法とLW法との水面形が良い一致を示し、ほとんど相違が認められない。また、図-4(b)からCH1法では波先付近での急な変化も平滑化されたまま伝播している。これらの事よりCH2法はLW法と精度上ほとんど差のない計算法といえよう。



(a) CH2法とLW法

(b) CH2法とCH1法

図-4 水面形（ $\Delta x = 0.25$ m, $\Delta t = 0.01$ 秒）

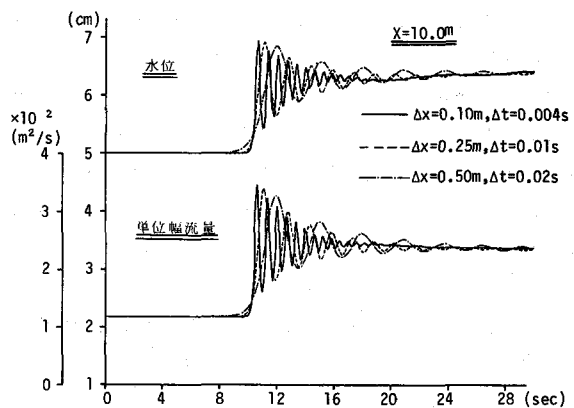


図-5 ハイドログラフ（CH2法）

図-5は、CH2法を用い Case 1 について $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ ($=0.04$) を一定に保ったままで格子幅 Δx を小さくしていったときの水位および単位幅流量のハイドログラフである。計算に用いた Δx および Δt を示せば、

実線； $\Delta x = 0.10 \text{ m}$, $\Delta t = 0.004 \text{ 秒}$

破線； $\Delta x = 0.25 \text{ m}$, $\Delta t = 0.01 \text{ 秒}$

一点鎖線； $\Delta x = 0.50 \text{ m}$, $\Delta t = 0.02 \text{ 秒}$ である。三者とも波先後方に LW 法と同様な減衰振動を有しており、その収れん性は Δx が小さくなるほど高くなっている。その周期については、 Δx の減少にともなって短くなる傾向にある。一方、波先の波高および波先の伝播距離は、 Δx の減少に反して増加している。

また、波先での水深変化率 $(\frac{\partial h}{\partial t})$ は、 Δx が小さくなるほど大きくなり、より sharp な立ち上がりとなっていることが認められる。したがって、 Δx が小さいほど不連続部の再現性の高いシミュレーションができるものと予想されるが、ここでは理論的裏づけがなされていないのでこれ以上の言及は控える。

最後に、表-1 に示された両ケースについて CH2 法を適用しシミュレーションを行なった ($\Delta x = 0.10 \text{ m}$, $\Delta t = 0.004 \text{ 秒}$)。その結果、得られたハイドログラフ (水路中央部) が、図-6 である。図中に示されている C_r は、次式で定義される値であり、 $C_r = 1.0$ のとき計算結果は連続式を満足しているものと解釈される。

$$C_r = \int_0^L Q(L, t) dt / [\int_0^L Q(0, t) dt - \int_0^L \{A(x, t) - A(x, 0)\} dt] \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 L ；水路長を表わす。Case 1 (実線) では、計算開始後 $t = 1.5 \text{ 秒}$ から誤差が大きくなり、 $t = 12.5 \text{ 秒}$ 付近で最悪となるが ($C_r = 0.956$)、その後回復して 1.0 の近傍値に収束している。Case 2 (破線) では、ほぼ 1.0 の値をとっている。したがって、両ケースとも連続性は満足されているものと判断される。また、前述したように、理論的には、Case 1 の場合、上流端で与えられた擾乱は発達し bore となり、Case 2 の場合には、減衰してしまうことが明らかにされている。一方、シミュレーションの結果では、前者の場合、水位、単位幅流量ともに波先付近で減衰振動しながら後者とほぼ同じ値に収束している。さらに前者の計算結果より、 $(h - h_0)/\Delta h$ と x の関係を時間の経過とともに示したものが図-7 である。波頂は、 $t = 5 \text{ 秒}$ まで発達し、その後減衰している。波先の水面こう配については、 $t = 6.0 \text{ 秒}$ まで増加 (特に $t = 2.0 \text{ 秒}$ と $t = 3.0 \text{ 秒}$ の間で急激に増加) し、以後は波先が下流端の影響をうけるまでほぼ一定で伝播している。したがって予想どおり短時間ではあるが擾乱の発達が計算上再現されていると考えられる。なお、計算された波先近傍における不連続的な水面形状が実際の bore を表現しているかどうかについては、さらに検討が必要である。

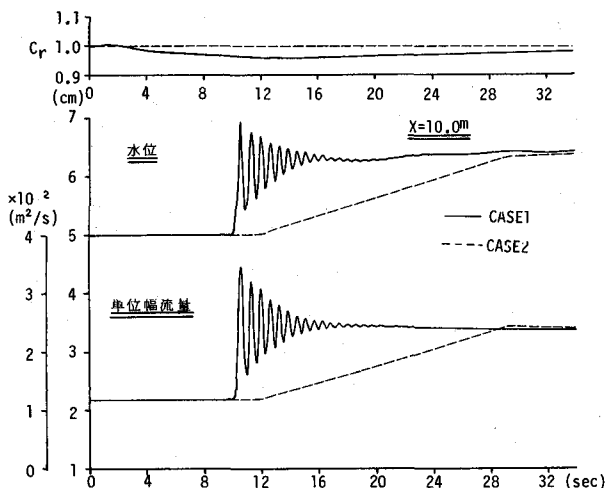


図-6 ハイドログラフ ($\Delta x = 0.10 \text{ m}$, $\Delta t = 0.004 \text{ 秒}$, CH2 法)

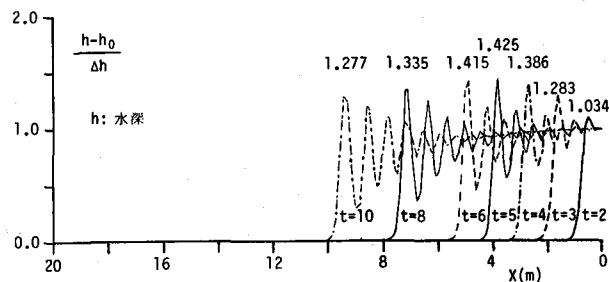


図-7 正規化された波先部の経時変化

4. 水理実験による検討

①実験方法；実験装置は、図-8に示されるような水路長10m、水路幅25cm、深さ20cm、平均水路床こう配1/500の長方形断面一様水路（アルミニウム製、滑面）を用いた。実験では、まず上流端の給水装置より一定の流量を給水し、定常流を作った。ついで、上流側の給水タンクに堰上板を挿入しタンク内に水を貯留するとともに、バルブの開放と堰上板の除去を

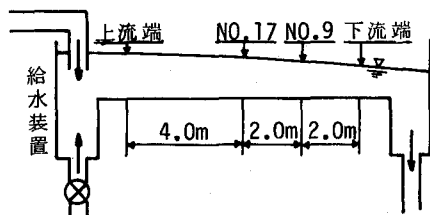
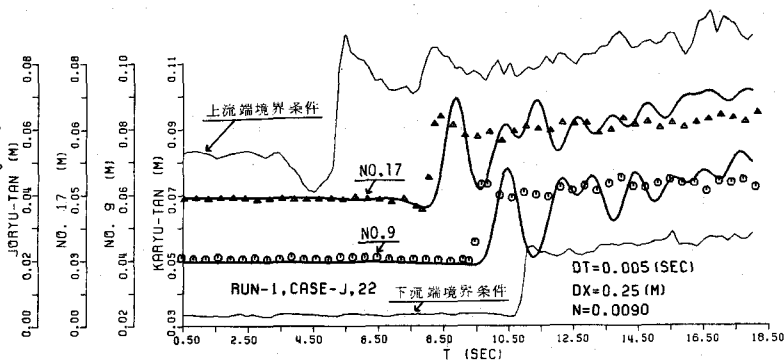


図-8 実験装置

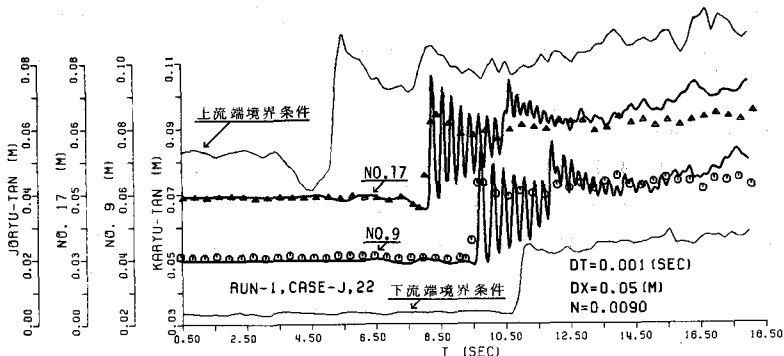
瞬時に行ない時間的な変化の急な流れを発生させた。水位の測定は、図-8に示される4点（上流端、No.17, No.19, 下流端）に容量式波高計を設置し、ペンレコーダーに記録させた。流量の測定は、初期の定常状態にのみ行なった。粗度係数としては、 $n = 0.009 \text{ m}^{-1/3} \cdot \text{s}$ を用いた。

②数値計算との比較；計算にあたっては、図-8の上流端および下流端地点の水位記録を0.375秒ごとに読みとり、それぞれ上流側および下流側の境界条件とした。また初期条件は、不等流計算により設定した。計算は、CH2法によって行なったが、境界点ではCH2法が適用できないのでCH1法を用いている。

図-9(a), (b)は、初期流量が4.14ℓ/sの場合に発生させた時間的な変化の急な流れの結果である（目測であるが、



(a) $\Delta x = 0.25 \text{ m}$, $\Delta t = 0.005 \text{ 秒}$ (CH2法)



(b) $\Delta x = 0.05 \text{ m}$, $\Delta t = 0.001 \text{ 秒}$ (CH2法)

図-9 水理実験と数値シミュレーションとの比較

不連続部は確認された）。両図には、実験値（No.9とNo.17）、CH2法による計算結果および境界条件が示されている。なお、図-9(a)では $\Delta x = 0.25 \text{ m}$, $\Delta t = 0.005 \text{ 秒}$ が、図-9(b)では $\Delta x = 0.05 \text{ m}$, $\Delta t = 0.001 \text{ 秒}$ が用いられた。これらの図より、次の結論がえられる。(i) 計算された水位の上昇傾向は、定性的に良い一致を示しており、CH2法の再現性は高い。(ii) 図-9(a)において、実験値より求めた波先の伝播距離は、数値シミュレーションして求めた伝播距離より大きく、下流へ流下するほどその差は顕著である。また、シミュレーションによる波先の水深変化率は、実験値の変化率よりも小さい。しかしながら、これらの問題点は、 $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ を一定に保ったまま Δx を小さくすることにより改善される。(iii) 波先の波高は、計算値の方が実験値よりも大きい。したがって、実験精度のことも考慮しなければならないが、CH2法の差分法では波高の減衰が十分に再現されていないと言えよう。

5. むすび

以上時間的变化の急な流れに対する数値シミュレーション法の開発を念頭におき、二次内挿を導入した固定格子点の特性曲線法を中心に、Lax-Wendroff 法と比較しながら考察を加えてきた。結果を要約すれば、次のようである。

- (1) CH2 法は、一様水路に関するかぎり LW 法と同程度の精度を有する計算法であり、LW 法と CH1 法との中間に位置していると言える。
- (2) 計算された波先近傍における変化の急な水面形状が実際の bore を表現しているかどうかは、なお検討を必要とするが、少なくとも上流端で与えられた擾乱の発生は、CH2 法によって再現可能である。
- (3) 計算上の安定性が保たれている範囲内では、CH2 法の再現性は、 Δx の減少にともなって良好になる。

謝 辞

本研究を行なうにあたり、京都大学工学部井上和也助教授より終始有益な御助言を賜わった。また、図表の作成にあたり京都大学河川工学研究室学生諸君の助力を得た。ここに記して先生ならびに学生諸君に深甚なる感謝の意を表します。

参考文献

- 1) Chaudhry, Y. M. and D. N. Contractor: Application of the Implicit Method to Surges in Open Channels, Water Resources Research, Vol. 9, No. 6, 1973.
- 2) 多田彰秀・岩佐義朗・植村典央; 段波の伝播特性に関する数値シミュレーションについて(2), 土木学会第 37 回年次学術講演会講演概要集, 1982, pp.273~274.
- 3) 河西基・白砂孝夫; 河道・貯水池系の洪水伝播解析, 第 27 回水理講演会論文集, 1983, pp.17~22.
- 4) 岩佐義朗・井上和也・片山猛; 開水路非定常流の数値計算法について, 京都大学防災研究所年報, 第 19 号 B-2, 1976, pp.187~200.
- 5) 井上和也; 開水路流れの数値解析, 第 16 回水工学に関する夏期研修会講義集, A コース, A-6, 1980.
- 6) Lighthill, M. J. and G. B. Whitham: On kinematic waves, I, Flood movement in long rivers, Proc. of Roy. Soc. of London, Vol. 229, 1955, pp. 281~316.
- 7) 高橋保; 河道における洪水流の特性に関する研究, 京都大学博士論文, 1971, pp.23~33.