

特性曲線法による水撃解析と有限要素法による圧力トンネルの静的応力解析

Water Hammer Analysis by Method of Characteristics and

Statical Stress Analysis of Tunnels by Finite Element Method

東北学院大学 正員 河野 幸夫

東北学院大学 正員 菅井 幸仁

1. まえがき

水撃圧の理論的分野, および, トンネル工学の応力解析の分野, 共に独自の発展はめざましいものがあるが2つの分野を統合したところにある, 水撃圧の圧力トンネルに作用する応力解析については, 未だ研究がなされていないようである。本研究では動的応力解析, 静的応力解析の内, 静的応力解析の適用されるケース, いわゆる, 圧力トンネルの延長が比較的長く, 弁またはゲートの閉塞時間が比較的遅い緩閉塞の場合の理論解析を行った。

取水口から圧力トンネル内を流下した水が下流端に設けられた弁またはゲートが閉塞されることによって発生した水撃波が圧力トンネル内の岩盤を加圧しながら上流部の取水口めがけて伝播する場合の各断面における岩盤に作用する応力および岩盤の変位について静的解析を行なう。水撃圧の解析には特性曲線法を用い, 圧力トンネルの延長方向 (z 軸) の各断面に作用する水撃圧の時間的変化 (t 軸) を求める。岩盤に作用する応力解析には水撃解析で求められた, ある時間における, 各断面に作用する水撃圧を使用し, 有限要素法にて2次元 ($x-y$ 断面) の静的応力解析を行なった。

2. 水撃理論

(1) 岩盤内の水撃波伝播速度

トンネル内の水撃波の伝播波の伝播速度 a は厚肉管の伝播速度の式(1)と固定条件 c , 一端固定, (2)式において, 肉厚 e を無限化することにより(3)式が得られる。

$$a = \sqrt{\frac{K/\rho}{1 + (K/E)(D/e)C}} \quad (1)$$

$$c = \frac{1}{1 + (e/D)} \left[\left(\frac{4}{5} - \mu \right) + \frac{e}{D} (1 + \mu) \left(1 + \frac{e}{D} \right) \right] \quad (2)$$

$$a = \sqrt{\frac{K/\rho}{1 + 2(K/E)(1 + \mu)}} \quad (3)$$

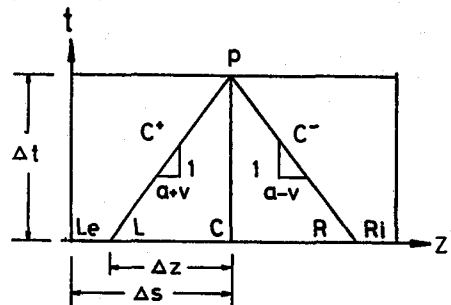


図-1 特性曲線

ここで, D : トンネルの直径 3 m, K : 水の弾性係数 $2.07 \times 10^8 \text{ kgf/m}^2$, ρ : 水の密度 $101.97 \text{ kgf} \cdot \text{s}^2/\text{m}^4$, E : 岩盤の弾性係数 $5.27 \times 10^8 \text{ kgf/m}^2$, μ : ポアソン比 0.3, の値を (3) 式に代入すと岩盤内の水撃波の伝播速度は 1002.16 m/s となる。

(2) 水撃圧の理論解析

圧力トンネル内の水撃圧の理論解析は一次元非定常流として取扱ひ, オイラーの運動方程式(4)式と連続方程式(5)式とのリニアコンビネーションを取ると, C^+ 式および C^- 式は(6)式と(7)式となり, 特性曲線法にて数値解析をおこなう。

$$\frac{\partial V}{\partial Z} V + \frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial Z} + \frac{f}{2D} V^2 = 0 \quad (4)$$

$$\frac{a^2 \partial V}{g \partial Z} + \frac{\partial H}{\partial Z} V + \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial Z'}{\partial Z} V = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = V \pm a \quad (6)$$

$$\pm \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} + \frac{dV}{dt} + \frac{t}{2D} V |V| \mp \frac{g}{a} V \sin \alpha = 0 \quad (7)$$

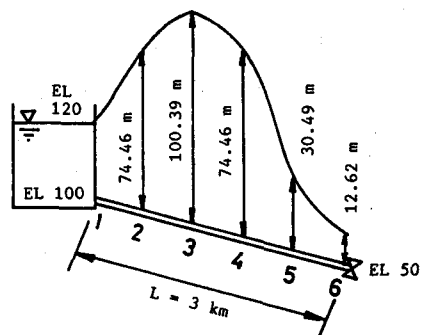


図-2 水撃解析モデル

ここで、 V ：流速 m/s ， H ：圧力水頭 m ， f ：摩擦係数 0.02 ， α ：圧力トンネルの傾斜角， D ：圧力トンネルの直径 $3m$ ， g ：重力の加速度 $9.81m/s^2$ ， Z ： Z 軸， t ：時間軸， Z' ：位置水頭 m ，である。

図-1は $x-t$ 平面における C^+ ， C^- 式の特性曲線を表したもので ds ， dt ， dH ，および dV を差分化すると C^+ 式では $ds = Sp - SL$ ， $dt = \Delta t$ ， $dV = Vp - VL$ ， $dH = Hp - HL$ ， C^- 式では $dS = Sp - SR$ ， $dt = \Delta t$ ， $dV = Vp - VR$ ， $dH = Hp - HR$ ，および比例関係 $\Delta Z / \Delta S = (VL - Vc) / (VLe - Vc) = (HL - Hc) / (HLe - Hc)$ を(6)式，(7)式に代入することにより VL ， VR ， HL ， HR ，および Vp ， Hp を得ることができる。

上流端境界条件は河川，ダムなどの貯水槽なので，水頭 H は時間軸に対して変化しないものとし，下流端境界条件は直線的に閉塞するゲート式の弁として解析を行なう。

(3) 圧力トンネルと水撃解析モデル

図-2は水撃理論解析のためのモデルで海拔 $120m$ の水面（取水口は海拔 $100m$ ）から延長 $3km$ の圧力トンネルを通して海拔 $50m$ に自然流下式にて放水している場合を考え，ゲート式の弁は下流端に位置し，非常時または必要な時に $40秒$ かけて閉塞（TCLOSE）するものとして計算を行なう。延長 $3km$ を 5 （NPARTS）のパーツにわけ，上流端より断面No.1から下流端の断面No.6まで 6 つのノードとし，各断面の地山の高さは圧力トンネルの上部より地山の表面までで，それぞれ，断面No.6では $12.62m$ ，No.5では $30.49m$ ，No.4では $74.46m$ ，No.3では $100.39m$ ，No.2では $74.46m$ ，でありNo.1では貯水槽の水位を示すものとする。

(4) 水撃理論解析結果

水撃解析モデルでは弁の閉塞時間を岩盤の静的応力解析の適用される範囲，いわゆる緩閉塞（ $40秒$ ）の場合の数値をプログラムにインプットするのであるが，それ以外に，緩閉塞で $30秒$ ， $20秒$ ，急閉塞で $5秒$ における場合の解析も行なった。

表-1は水撃解析モデルの数値をコンピュータに入力するためのデータで，図-3は弁の閉塞時間を $40秒$ とした場合の水撃解析結果で，各断面について，時間軸に対しての水撃圧の変化を示している。表-2は弁の閉塞時間 $40秒$ の場合の各断面における水撃圧の最大値，最小値および，その発生時間を示したものである。

表-1 入力データ

** INPUT OF WATER HAMMER ANALYSIS **	
L = 3000 m	NPARTS = 5
f = 0.02	D = 3 m
VZERO = 5 m/s	A = 1002 m/s
ELEVUP = 100 m	HZERO = 120 m
TCLOSE = 40 s	ELEVDN = 50 m
DT = 0.596 s	

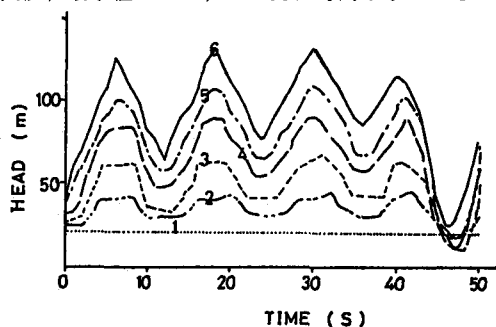


図-3 水撃解析結果

表-2 水撃圧の最大値と最小値

***** EXTREME VALUES *****

SECT	MAX H	TIME	MIN H	TIME
1	20.0,	0.0,	20.0,	0.0
2	43.4,	32.2,	17.0,	48.3
3	66.5,	31.6,	14.3,	47.7
4	89.2,	31.0,	12.1,	47.1
5	111.5,	30.4,	16.7,	46.5
6	132.3,	29.8,	25.5,	46.5

以上の水撃圧の時間的変化または水撃圧の最大値および最小値が圧力トンネルの各断面に作用する場合の、各断面のノードの変位および各要素に働く応力などを有限要素法を用いて二次元の静的応力解析を行なう。

3. 静的応力解析

本研究は水撃圧を受ける圧力トンネルを有限要素法による平面ひずみの二次元問題として静的解析を行なう。平面ひずみ状態は考えている平面（各断面）に垂

直方向（Z方向）のひずみは存在しないが、垂直方向の応力は存在するものと定義される。

(1) 解析方法

節点 i, j, k を有する三角形要素を図-4 に示す。

この要素内の x 方向変位 u, y 方向変位 v を x, y の一次の変位関数として表わせるものとする。従っ

て, $u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$

$$v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \quad (8)$$

とする。未定係数 $\alpha_1 \sim \alpha_6$ は i, j, k 節点での変位 $u_i, v_i, u_j, v_j, u_k, v_k$ を代入することで、決定することができる。

$$u = \frac{1}{2A} \{ (a_i + b_i x + c_i y) u_i + (a_j + b_j x + c_j y) u_j + (a_k + b_k x + c_k y) u_k \} \quad (9)$$

ここで、A は三角形要素の面積で、また

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j$$

$$b_i = y_j - y_k$$

$$c_i = x_k - x_j$$

.

.

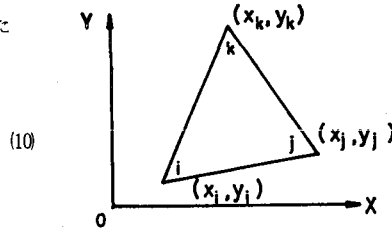


図-4 三角形有限要素

となり、 $a_j, a_k, b_j, b_k, c_j, c_k$ は i, j, k の添字を循環することで求められる。また同様にして

$$v = \frac{1}{2A} \{ (a_i + b_i x + c_i y) v_i + (a_j + b_j x + c_j y) v_j + (a_k + b_k x + c_k y) v_k \} \quad (11)$$

が求まる。以上で三角形要素内の任意の点 (x, y) での変位 u, v は、節点変位 $u_i, v_i, u_j, v_j, u_k, v_k$ と節点座標 $x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k$ によって表わすことができる。

平面ひずみは定義により

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{Bmatrix} \quad (12)$$

となる。(9), (11) 式を(12)式に代入することにより、

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix} \{d\} = [B] \{d\} \quad (13)$$

ここで、 $\{d\} = \{u_i, v_i, u_j, v_j, u_k, v_k\}^T$ であり、(13) 式の $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ は x, y の関数になっていない、よって、三角形要素内の任意の点で一定となる。三角形要素を非常に小さくとしたとき、その内部では一定ひずみの状態になることは明らかであるから、三角形要素はこの条件を既に満たしている。

(2) 応力-ひずみマトリックス

フックの法則より、次の式が成り立つ。

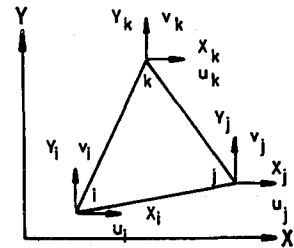


図-5 力と変位

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \{ \sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \} \quad (14)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \{ \sigma_y - \nu (\sigma_z + \sigma_x) \} \quad (15)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \{ \sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \} \quad (16)$$

定義より(16)式は零である。よって

$$\sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y) \quad (17)$$

となり、(17)式を(14)、(15)式に代入し、整理すると、

$$\varepsilon_x = \frac{(1+\nu)}{E} \{ (1-\nu) \sigma_x - \nu \sigma_y \} \quad (18)$$

$$\varepsilon_y = \frac{(1+\nu)}{E} \{ -\nu \sigma_x + (1-\nu) \sigma_y \} \quad (19)$$

となる。またせん断ひずみ τ_{xy} は次式となる。

$$\tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \quad (20)$$

(18)、(19)、(20)式より σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} を求めると

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

となる。

(3) 剛性マトリックス

三角形要素の内部仮想仕事 δW_i は仮想ひずみと応力を掛け、要素全体について積分することによって求められるから、次式のようになる。

$$\delta W_i = \int_V [\delta \varepsilon_x \delta \varepsilon_y \delta \tau_{xy}] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dV \quad (22)$$

ここで、 V は三角形要素の体積、 $\delta \varepsilon_x$ 、 $\delta \varepsilon_y$ 、 $\delta \tau_{xy}$ は仮想ひずみを表わし、次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} \delta \varepsilon_x \\ \delta \varepsilon_y \\ \delta \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [B] \{ \delta d \} \quad (23)$$

ここで、 $\{ \delta d \} = [\delta U_i \delta V_i \delta U_j \delta V_j \delta U_k \delta V_k]^T$ 従って、内部仮想仕事の積分は $[B]$ 、 $[D]$ が定数となることから、次のように整理される。

$$\delta W_i = \int_V \{ \delta d \}^T [B]^T [D] [B] \{ d \} dV = A t \{ \delta d \}^T [B]^T [D] [B] \{ d \} \quad (24)$$

ここで、 t は三角形要素の厚さであるが、実際数値解析するときは単位厚さをとるので $t=1$ にする。

図-5の節点に作用する外力 $\{ f \}^T = [X_i \ Y_i \ X_j \ Y_j \ X_k \ Y_k]$ がなす、外部仮想仕事 δW_o は仮想変位と外力を掛けることにより求められ、次式のようになる。

$$\delta W_o = [\delta U_i \delta V_i \delta U_j \delta V_j \delta U_k \delta V_k] \{ f \} \quad (25)$$

内部仮想仕事と外部仮想仕事は等しいことから(24)式と(25)式を等置し、整理することにより

$$\begin{aligned} \{ f \} &= A t [B]^T [D] [B] \{ d \} \\ &= [K] \{ d \} \end{aligned} \quad (26)$$

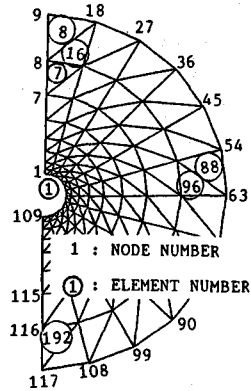


図-6 要素分割

となる。ここで〔K〕マトリックスは剛性マトリックスとなる。節点番号のつけかたは統一的行なうものとし、この節点番号によって、各要素について求めた(26)式を全要素について重ね合わせていくことにより、求めようとしている系に関する力と変位の方程式が得られ、次にこの求めた方程式に境界条件を入れて、この方程式を解くと、未知節点変位と未知反力が求まる。

(4) 応力解析モデル

実際に数値計算に使用したモデルは、地表面から山の高さをHとしたとき、山の概形を半径Hの円弧と仮定した。また圧力トンネルは半径Rの円と仮定し、その中心は山の中心と一致するものとした。山の地表面下のモデルはいろいろモデル化できるが、本解析では、山の地表面上と対称になるものと仮定しモデル化することにした。数値解析を行なうモデルの代表的なものを図-6に示す。有限要素法を使用し、数値解析を行なう領域は、対称性を利用し、右半分とした。要素分割は15°の方射状とし、半径方向の分割は等比数列を利用し決定した。

境界条件として山の地表面下の中心より最遠端節点は変位を拘束した。トンネルに作用する水撃圧は分布荷重であるが、これを圧力が作用する節点に等価な集中力に換算して使用した。応力は各三角形要素において、既知となった節点変位{d}を使用することにより、(27)式によって容易に計算することが出来る。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D][B] \{d\} \quad (27)$$

(5) 応力解析結果

以上の水撃解析モデルおよび応力解析モデルより、圧力トンネル内、各断面に作用する水撃圧の時間的変化、および、その水撃圧の作用する断面の応力と変位を得ることができる。ここで、その一例として前述の弁閉塞40秒における最大水撃圧 13.23 kgf/cm²、発生時間 29.8秒を使用し、断面No.6における応力解析結果を次に示す。

図-7は各節点のU、VいわゆるX方向の変位とY方向の変位を示している。図からわかるように、Uの最大値は0.453mmで節点55に、Vの最大値は0.542mmで節点10に起きている。

図-8は各要素の σ_x 、 σ_y いわゆるX方向の応力とY方向の応力それにせん断応力 τ_{xy} を示している。図からわかるように、 σ_x の最大値は13.78kgf/cm²で要素番号185、 σ_y の最大値は14.64kgf/cm²で要素89に発生し、 τ_{xy} の最大値は11.43kgf/cm²で要素137に起きている。

図-9は各要素におけるS1、S2、いわゆる最大主応力と最小主応力を示し、 θ はX軸よりの角度を表わしている。これからわかるように、S1の最大値は15.1kgf/cm²で要素121に、S2の最小値は-11.81kgf/cm²で要素177に起きている。

要素分割において各節点を円周方向につないだ線をトンネルに近い方から、ライン#1、#2、……と置いた場合、最大変位dは $d = \sqrt{U^2 + V^2}$ で表わされ、最大値0.554mm、節点10で発生、を含むライン#1と#3、#8を-y軸から+y軸まで、0°から180°まで15°ずつプロットしたのが図-10である。

図-11は最大変位の表わし方と大体同様の方法であるが、S1は節点でなく要素ごとに得られ、-y軸から+y軸まで各要素を1~12と置き、S1の最大値15.1kgf/cm²で要素番号121を含むラインE1とE2、E4を一緒にプロットしたものである。

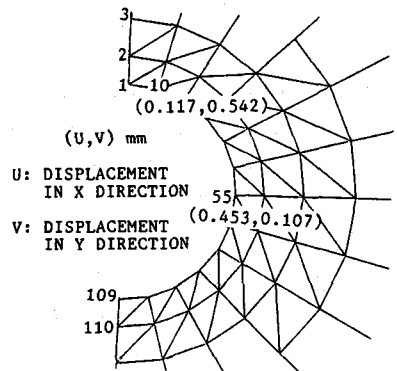


図-7 各節点の変位

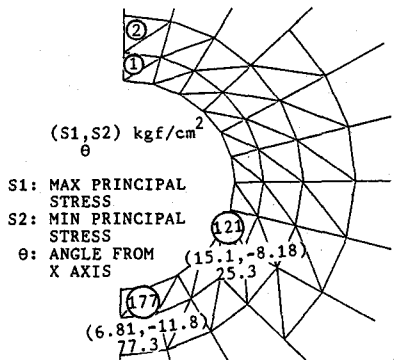


図-8 各要素の応力とせん断応力

4. 結論

特性曲線法を使用して、 $z-t$ に関しての水撃圧解析と有限要素法を使用しての $x-y$ 断面の二次元静的応力解析を統合することにより現実の現象に近い、いわゆる $x-y-z-t$ に関しての解析を行なうことが可能となった。

特に、静的応力解析の適用はトンネル延長の比較的長い、弁閉塞の比較的ゆっくりとした緩閉塞の場合に最も適している。

急閉塞の場合でも、トンネル延長が長く、瞬間的な圧力変動のない場合、例えば、弁閉塞 5 秒 $< 2L/a = 6000/1002 = 5.99$ 秒の急閉塞の場合は 5.96 秒かかって最大水撃圧 56.99 kgf/cm^2 に達しており適用可能と思われる、しかし、本来なら急閉塞（特に弁閉塞 1 秒以下）いわゆる瞬間的な圧力変動については動的応力解析が必要となる。

使用した解析モデルの場合には次のような結果がでた。弁閉塞 40 秒における最大水撃圧 13.23 kgf/cm^2 は 29.8 秒にトンネルの断面 No 6 に発生し、その時の断面の最大主応力 (S1) 15.1 kgf/cm^2 は要素番号 121 に発生し、最大変位 0.554 mm は節点番号 10 に発生した。また、弁閉塞 5 秒における最大水撃圧 56.99 kgf/cm^2 は 5.96 秒にトンネルの断面 No 6 に発生し、その時の断面の最大主応力 (S1) 64.83 kgf/cm^2 は要素番号 121 に、最大変位 2.379 mm は節点番号 19 に発生した。

参考文献

- 1) Halliwell, A. R.: Velocity of a water hammer wave in an elastic pipe, A.S.C.E, 1963.
- 2) Segerlind, L. J.: Applied finite element analysis, Wiley, 1976.
- 3) 富澤清治: パイプラインのウォーターハンマ現象とその防止対策, 農業土木機械化協会, 1981.
- 4) Vollstedt, H. W. and Duddeck, H.: Time dependancy and some other non-linearities in theoretical models for tunnels, Computer Methods in Tunnel Design, pp. 1~17, 1978.
- 5) Watters, C. Z.: Modern analysis and control of unsteady flow in pipelines, Ann Arbor Science, 1979.
- 6) Wylie, E. B. and Streeter, V. L.: Fluid transients, McGraw-Hill, 1978.
- 7) Zienkiewicz, O. C.: The finite element method, McGraw-Hill, 1977.

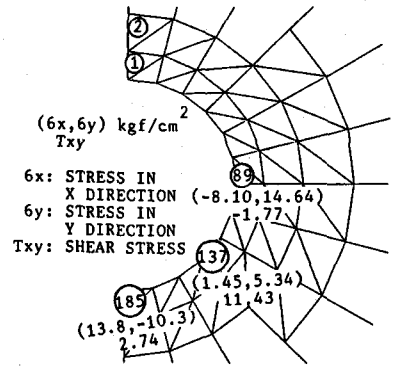


図-9 各要素における主応力

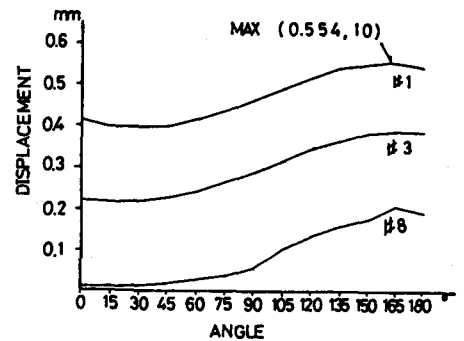


図-10 各ラインにおける最大変位量

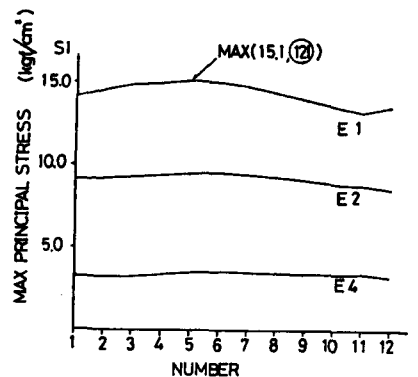


図-11 各ラインにおける最大主応力