

ラグランジュ的手法を用いた土石流の2次元堆積形状の計算法

Lagrangian Approach to the Calculation of Profile of Debris-Flow Deposits

九州大学工学部○正 員 橋 本 晴 行
九州大学大学院 学生員 溜 池 博 文
九州大学工学部 学生員 元 野 一 生
九州大学工学部 正 員 椿 東一郎

1. はじめに

急勾配の溪谷に発生し、流下してきた土石流は、勾配が急減し、幅が急拡大する溪流出口付近に流出して堆積¹⁾し、甚大な災害を引き起す。このため、前報においては、水路幅が一定で勾配の急減のみを受けて堆積する2次元問題を取り扱い、個々の粒子の減速・停止過程に着目したラグランジュ的な観点から堆積形状の計算法を導いた。しかしながら、土石流の堆積においては、背砂が上流側へ急速に遡上したりするなど境界が時々刻々移動することが特徴的であり、前報の計算ではこの点についての考慮がなされていない。したがって、本研究は、前報の延長として同様な手法を用い、境界の移動を組み込んだ堆積形状の計算方法を提案するとともに、このような手法の利点として流入する土石流の流動特性に応じて異なった堆積形態が予測できることを示すものである。

2. 土石流の勾配急変による堆積過程の解析

急勾配水路において発生・流下した土石流が緩勾配水路に流入し堆積する場合を考える。図-1に示すように、勾配 θ_a の上流側水路において高さ $y \sim y+dy$ 区間を濃度 C 、速度 u で通過した粒子群は、勾配 θ_d の下流側水路において平均的な停止距離 $\bar{x}$ のまわりに確率密度関数 $p_y(x)$ に従って停止するものとする。このとき、この粒子群が下流側水路の $x \sim x+dx$ の区間に停止する確率は $p_y(x)dx$ である。距離 x において、流入高さ y に起源をもつ粒子の堆積高を ∂z_y 、堆積層における粒子濃度を C_* とすると、砂の保存式は次式

$$C_* \frac{\partial}{\partial t} (\partial z_y) dx = u \cdot C dy p_y(x) dx \quad (1)$$

となる。ここに、座標は、下流側水路床に沿って x 軸を、上流側水路床から垂直上向きに y 軸をとっている。式(1)を時間 t で積分し、堆積開始時間を t_{sp} とおくと

$$\partial z_y = \frac{C}{C_*} u (t - t_{sp}) p_y(x) dy \quad (2)$$

となる。 x の位置には、 $y = y_0 \sim y_G$ までのさまざまな高さから流入してきた粒子が停止するので、式(2)をその範囲に渡って積分すると、位置 x における堆積高 z は

$$z = \int_{y_0}^{y_G} \frac{C}{C_*} u (t - t_{sp}) p_y(x) dy \quad (3)$$

となる。流入する粒子の高さ y と停止距離の平均値 $\bar{x}$ および堆積開始時間 t_{sp} との間の関係は、粒子の減速・停止過程の解析¹⁾から粒子速度 u を通じて次式

$$\bar{x} = \frac{u^2 \cos^2(\theta_a - \theta_d)}{2G} = \frac{G}{2} t_{sp}^2 \quad (4)$$

で与えられるので、次の関係が成立する。

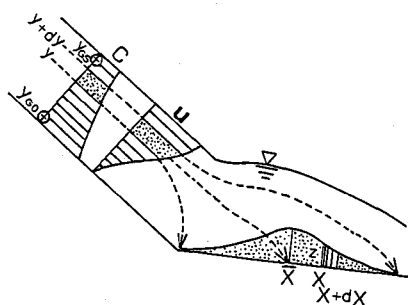


図-1 堆積過程の模式図

$$dy = \frac{G}{u \frac{du}{dy} \cos^2(\theta_u - \theta_d)} d\bar{x}, \quad t_{SP} = \sqrt{\frac{2}{G} \bar{x}} \quad (5)$$

ここに、 G は粒子の減速度で、次式によって与えられる。

$$G = \frac{g}{1 + \rho/(2\sigma)} \{ \sin\theta_u \cos^5(\theta_u - \theta_d) - \sin\theta_d \} \quad (6)$$

式(5)を式(3)に代入すると

$$z = \int_{\bar{x}_{G0}}^{\bar{x}_G} \frac{C}{C_*} \frac{G}{\frac{du}{dy} \cos^2(\theta_u - \theta_d)} (t - \sqrt{\frac{2}{G} \bar{x}}) p_y(x) d\bar{x} \quad (7)$$

となる。ここに、積分範囲の下限値は高さ y_{G0} における粒子速度 u_{G0} を用いて次式で与えられる。

$$\bar{x}_{G0} = u_{G0}^2 \cos^2(\theta_u - \theta_d) / (2G) \quad (8)$$

一方、上限値は土石流先端部の表面粒子が停止する時間を境にして、次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad & \frac{u_{G0} \cos(\theta_u - \theta_d)}{G} \leq t \leq \frac{u_{GS} \cos(\theta_u - \theta_d)}{G} \text{ のとき, } y_G \leq y_{GS}, \bar{x}_G = \frac{G}{2} t^2 \\ \text{(ii)} \quad & t \geq \frac{u_{GS} \cos(\theta_u - \theta_d)}{G} \text{ のとき, } y_G = y_{GS}, \bar{x}_G = \bar{x}_{GS} = \frac{u_{GS}^2 \cos^2(\theta_u - \theta_d)}{2G} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここに、 y_{GS} , u_{GS} , $\bar{x}_{GS}$ はそれぞれ表面粒子の流入高さ、速度および平均停止距離である。さらに式(7)を時間 t で微分すると、

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \int_{\bar{x}_{G0}}^{\bar{x}_G} \frac{C}{C_*} \frac{G}{\frac{du}{dy} \cos^2(\theta_u - \theta_d)} p_y(x) d\bar{x} \quad (10)$$

となる。いま、停止確率密度関数 $p_y(x)$ として正規分布を仮定すると、式(7), (10)はそれぞれ

$$z = \int_{\bar{x}_{G0}}^{\bar{x}_G} \frac{C}{C_*} \frac{G}{\frac{du}{dy} \cos^2(\theta_u - \theta_d)} (t - \sqrt{\frac{2}{G} \bar{x}}) \frac{1}{\sqrt{2\pi} \alpha_p \bar{x}} \exp\left\{-\frac{(x - \bar{x})^2}{2(\alpha_p \bar{x})^2}\right\} d\bar{x} \quad (11)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \int_{\bar{x}_{G0}}^{\bar{x}_G} \frac{C}{C_*} \frac{G}{\frac{du}{dy} \cos^2(\theta_u - \theta_d)} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \alpha_p \bar{x}} \exp\left\{-\frac{(x - \bar{x})^2}{2(\alpha_p \bar{x})^2}\right\} d\bar{x} \quad (12)$$

ここに、 α_p は粒子の停止距離に関する変動係数で、実験から0.42としている。

ここで水深を h として次のような無次元量を導入しよう。

$$Z = \frac{z \cos(\theta_u - \theta_d)}{h}, \quad \eta = \frac{y}{h}, \quad X = \frac{x}{\bar{x}_{GS}}, \quad \bar{X} = \frac{\bar{x}}{\bar{x}_{GS}}, \quad T = \frac{t}{u_{GS} \cos(\theta_u - \theta_d) / G} \quad (13)$$

これらの無次元量を用いて式(11), (12), (4)を整理すると、次式が得られる。

$$Z = \int_{\bar{X}_{G0}}^{\bar{X}_G} \frac{C}{C_*} \frac{1}{\frac{d}{d\eta} \frac{u}{u_{GS}}} (T - \sqrt{\bar{X}}) \frac{1}{\sqrt{2\pi} \alpha_p \bar{X}} \exp\left\{-\frac{(X - \bar{X})^2}{2(\alpha_p \bar{X})^2}\right\} d\bar{X} \quad (14)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial T} = \int_{\bar{X}_{G0}}^{\bar{X}_G} \frac{C}{C_*} \frac{1}{\frac{d}{d\eta} \frac{u}{u_{GS}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \alpha_p \bar{X}} \exp\left\{-\frac{(X - \bar{X})^2}{2(\alpha_p \bar{X})^2}\right\} d\bar{X} \quad (15)$$

$$\bar{X} = \left(\frac{u}{u_{GS}}\right)^2 \quad (16)$$

ここに、積分範囲の上限・下限値はそれぞれ

$$\bar{X}_G = \begin{cases} T^2 & (u_{G0}/u_{GS} \leq T \leq 1) \\ 1 & (T \geq 1) \end{cases}, \quad \bar{X}_{G0} = \frac{\bar{x}_{G0}}{\bar{x}_{GS}} = \left(\frac{u_{G0}}{u_{GS}}\right)^2 \quad (17)$$

となる。したがって、土石流の堆積は上流側水路から流入する土石流の特性、すなわち粒子の濃度や速度勾配および平均停止距離を通じて速度などの分布に規定されることが分る。このことから、流入して来る土石流の特性によって異なった堆積形態が生じることが予測される。

なお、従来の土石流の速度分布においては、表面あるいは底面で速度勾配が0となり、式(14), (15)に特

異点が生ずる。このような難点を避けるため、便宜上流入する粒子の高さの範囲として表面あるいは底面からそれぞれ半径径ずらした $y_{G0} = d/2 \sim y_{GS} = h - d/2$ の範囲を考えることにする。

3. 堆積過程に関する実験

流下して来る土石流の流動特性を広範に変化させた場合に、堆積特性がどのように変わるかを明らかにするため、前報の実験に追加して、勾配の急変による堆積実験を行った。

(1) 実験の方法

図-2に示すような勾配の急変点をもつ幅10cmの水路において、上流側移動床部に平均粒径 $d = 4.4 \text{ mm}$ 、密度 $\sigma = 2.59 \text{ g/cm}^3$ 、最

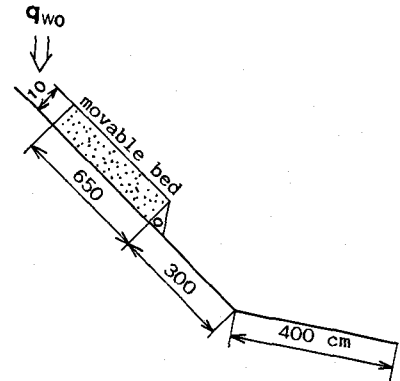


図-2 実験水路

密充てん濃度 $C_* = 0.6$ の砂れきを厚さ10cmに敷き詰め、上流端から

表-1 堆積に関する実験条件と土石流の流入条件

Case	Run No.	d (mm)	qwo (cm ² /s)	θ_u	θ_d	h (cm)	Us (cm/s)	$\frac{C_0}{C^*}$	$\frac{U_0}{U_s}$	
A	1	7.0	216	18°	2°	5.43	198.8	0.86	0.02	Roughly fixed bed
	2		219		4°					
	3		218		8°					
B	4	4.4	107	18°	4°	4.23	173.5	1.00	0.02	Roughly fixed bed
	5		201		2°					
	6		211		4°					
C	7	4.4	198	18°	8°	4.56	245.5	0.86	0.02	Roughly fixed bed
	8		199		2°					
	9		209		4°					
D	10	4.4	199	14°	4°	3.25	201.9	0.90	0.02	Smoothly Movable bed
E	11	4.4	199	18°	4°	6.70	202.0	1.00	0.0	
F										

5 cm で、堆積水路に厚さ10 cm で砂れきを敷き詰めた移動床の8通りにした。表-1に前報の実験とともにその条件を示した。

堆積形状は、勾配変化点の前後約4 mの区間を水路の側方から2台の16 mm高速度カメラと2台のVTRカメラを用いて撮影・録画し、これから流動層と停止層との境界を読みとって求めた。

(2) 実験の結果

図-3は流下・堆積水路が固定床粗面、移動床のそれぞれの場合における堆積形状の時間的変化を無次元表示したものである。固定床粗面の場合は下流側水路とほぼ同じ勾配をもった背砂が上流側水路を遡上するのに対して、移動床の場合はこのような背砂は形成されず、上流側水路にはばなめらかに連続するように堆積が遡上する。また、図は省略するが、滑面水路においては勾配変化点から下流側へ離れた位置にステップ状の堆積が生じるのが特徴的である。

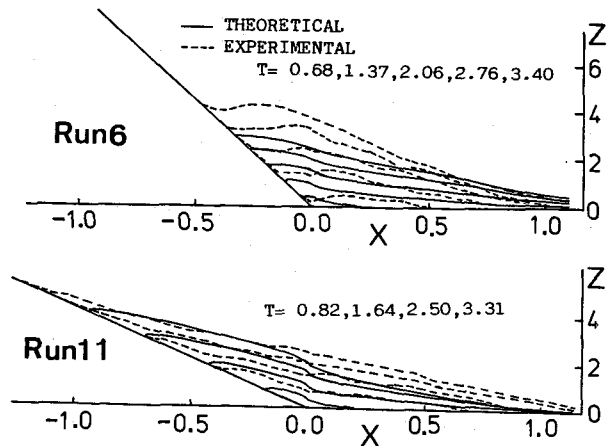


図-3 堆積形状の時間的変化

図-4は、堆積の先端の位置 x_F と堆積の後端の位置 x_B の軌跡を無次元表示したものである。堆積先端の軌跡については、実験条件によって明瞭な差異は認められないが、堆積後端の軌跡については、固定床の場合に比して移動床の場合の方が上流側水路への遡上が速い。また、Case A, Cにおいては、下流側水路勾配による軌跡の差異は認められない。

以上のような実験結果から、流入する土石流の流動特性に応じて異なった堆積形態を生じることが明らかになった。したがって堆積過程について解析するためには、まず流入する土石流の特性を知る必要がある。

4. 流入する土石流の特性

移動床における土石流の流動特性については、すでに詳細な検討が行われているが、²⁾³⁾固定床についての研究は十分ではない。本論文においては、移動床と固定床との差異を境界条件の

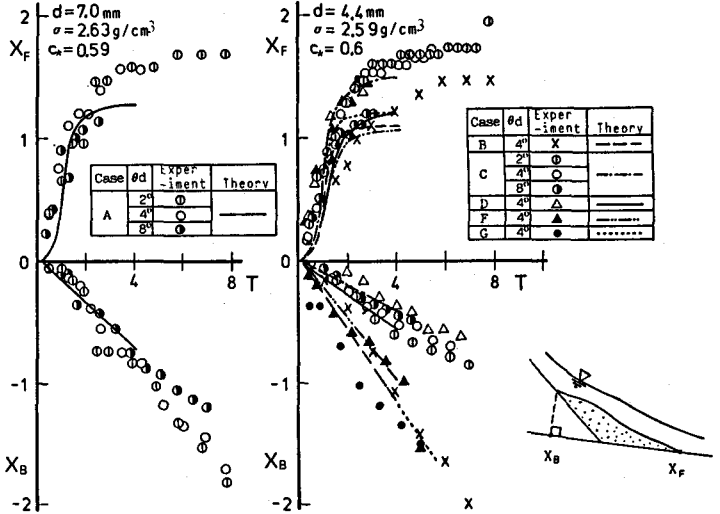


図-4 堆積の先端と後端の軌跡

違いとしてとらえることで、移動床における成果を固定床の場合に適用することにした。すなわち、底面 $\eta = 0$ で、濃度 $C = C_0 (\leq C_*)$ 、速度 $u = u_0 (\geq 0)$ として、土石流における力のつり合い方程式を解くと、濃度、速度、平均速度を規定する式として次の諸式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{\chi}{\phi C_*} \left\{ 2(C_0 - C) - (2C_\alpha - C_s) \ln \frac{C - C_\alpha}{C_0 - C_\alpha} \right\} \\ \frac{C_s - C_\alpha}{C_0 - C_\alpha} &= \exp \left[\left\{ 2(C_0 - C_s) - \frac{\phi C_*}{\chi} \right\} / (2C_\alpha - C_s) \right] \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\frac{d}{d\eta} \left(\frac{u}{u_*} \right) = \frac{h}{d} \left(K_M \frac{\sigma}{\rho} \frac{\phi C_*}{\chi} \right)^{-1/2} \frac{C - C_\alpha}{2C - C_s} F(C) \quad (19)$$

$$\frac{u}{u_*} = \frac{h}{d} \left\{ K_M \frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{\phi C_*}{\chi} \right)^3 \right\}^{-1/2} \left\{ \int_C^{C_0} F(C) dC + \frac{u_0/u_s}{1 - u_0/u_s} \int_{C_s}^{C_0} F(C) dC \right\} \quad (20)$$

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{h}{d} \left\{ K_M \frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{\phi C_*}{\chi} \right)^3 \right\}^{-1/2} \left[\frac{\phi C_*}{\chi} \frac{u_0/u_s}{1 - u_0/u_s} \int_{C_s}^{C_0} F(C) dC + \int_{C_s}^{C_0} \frac{C - C_\alpha}{C - C_\alpha} F(C) dC \right] \quad (21)$$

ここに、 C_s は表面 $\eta = 1$ における濃度、 $u_* = \sqrt{g h \sin \theta_a}$ は摩擦速度である。さらに、 $\mu = 0.05$ 、 $\chi = 1/5$ ⁴⁾、 $\beta = 1.15$ 、 $k_M = 5$ として

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \frac{\alpha - \tan \theta_u}{\alpha}, \quad \alpha = \frac{r}{1 + \rho / (2\sigma)}, \quad r = \frac{0.0762 + 0.102\mu}{0.0898 - 0.067\mu} \\ K_M &= \frac{\pi}{6} (0.0762 + 0.102\mu) \beta^2 k_M, \quad C_\alpha = \frac{\tan \theta_u}{\{(\sigma - \rho) / \rho\} (\alpha - \tan \theta_u)} \\ F(C) &= \frac{2C - C_s}{C - C_\alpha} \frac{1 - (C/C_*)^{1/2}}{C/C_*} \left[(C - C_s) \left\{ \frac{\sigma - \rho}{\rho} (C + 2C_\alpha) + 2 \right\} \right. \\ &\quad \left. + (1 + \frac{\sigma - \rho}{\rho} C_\alpha) (2C_\alpha - C_s) \ln \frac{C - C_\alpha}{C_s - C_\alpha} \right]^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

以上の諸式を用いて堆積の計算を行うためには底面での境界条件を知らねばならない。本論文においては、流入する土石流の流動特性に関する実験を各ケースについて行い、水深 h 、表面速度 u_s 、および単位幅全流量 q_t を計測して、先端到達後約10秒間の平均値から $(u_s/u_*)/(h/d)$ 、 $(\bar{u}/u_*)/(h/d)$ の実験値を求め、式(20)、(21)による計算値と一致するように C_0/C_* 、 u_0/u_s を求めた。表-1にその結果を示している。

最後に、式(19)、(20)から式(14)～(16)における速度勾配と速度分布はそれぞれ次式で与えられる。

$$\frac{d}{d\eta}\left(\frac{u}{u_{GS}}\right) = \frac{\phi C_*}{\chi} \frac{C - C_\alpha}{2C - C_\alpha} F(C) / \left\{ \int_{C_{GS}}^{C_0} F(C) dC + \frac{u_0/u_s}{1 - u_0/u_s} \int_{C_s}^{C_0} F(C) dC \right\} \quad (23)$$

$$\frac{u}{u_{GS}} = \left(\int_C^{C_0} F(C) dC + \frac{u_0/u_s}{1 - u_0/u_s} \int_{C_s}^{C_0} F(C) dC \right) / \left(\int_{C_{GS}}^{C_0} F(C) dC + \frac{u_0/u_s}{1 - u_0/u_s} \int_{C_s}^{C_0} F(C) dC \right) \quad (24)$$

ここに、 C_{GS} は $\eta = 1 - d/(2h)$ における濃度である。

したがって無次元堆積高 Z の式(14)、 $\partial Z/\partial T$ の式(15)は、濃度や速度勾配および $\bar{X}$ や $\bar{X}_G$ 、 $\bar{X}_{G0}$ などを通じて、上流側水路勾配 θ_u と d/h および底面での境界条件 u_0/u_s 、 C_0/C_* に規定されることが分る。

5. 堆積形状の計算

(1) 堆積の上流側水路への遡上を考慮しない計算

土石流の発生条件がほぼ同じ Case C、E、G について、 θ_u 、 d/h 、 C_0/C_* 、 u_0/u_s を与えて無次元時間 $T = 2$ における堆積形状を、式(14)、(16)、(23)、(24)を用いて計算した結果が図-5である。固定床粗面の Case C および移動床の Case G においては、原点近傍で堆積の最大値を生じる。特に移動床の場合にその傾向が著しい。これは、移動床の場合に上流側水路への遡上
が速いという実験結果と対応しているものと考えられる。一方、固定床滑面の Case E の計算では、原点から下流側に離れた位置にピークをもつ堆積形態が生じ、実験結果と定性的に一致している。しかしながら、前報¹⁾のような粗面水路における粒子の停止過程の解析が滑面水路に適用できるかどうかは疑問があり、定量的な評価については今後の課題である。

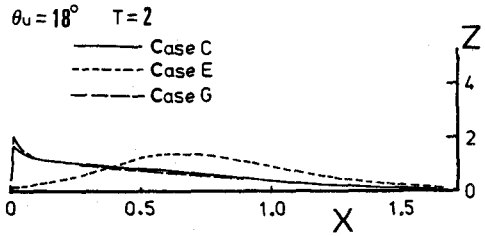


図-5 堆積の遡上を考慮しない堆積形状の計算

実際の土石流の堆積は固定床粗面や移動床のケースに近いものと考えられるので、以下においては、これらの場合について考察を加えることにする。

(2) 堆積の上流側水路への遡上を考慮した計算

実験結果から明らかなように、堆積が上流側水路へ遡上するので、土石流が流入する境界点を勾配変化点から時間とともに上流側へ移動させる必要がある。ここでは、以下のような時間ステップに従って堆積形状の数値計算を行う。

①第1ステップ：無次元時間 $T_1 = T_0 + \Delta T$ における堆積形状を求める。まず、底面粒子の無次元停止時間 $T_0 = u_{G0}/u_{GS}$ を式(24)を用いて計算するとともに、時間キザミを $\Delta T = 0.1$ とおく。次に、式(14)において $T = T_1$ とおいて堆積形状 $Z(T_1)$ を計算した結果を模式的に図-6(a)に実線で示す。 $Z(T_1)$ の最大点 M_1 (その堆積高を Z_{M1} とおく) から下流側水路に平行な直線を引き、上流側水路との交点を O_1 とし、第2ステップでの流入点とする。したがって、曲線 $O_1 M_1 P_1$ が無次元時間 T_1 における堆積形状 Z_1 となり、流入点は

$$X_B = -\frac{h}{\sin(\theta_u - \theta_d)} \bar{x}_{GS} Z_{M1}$$

となる。次のステップの準備として、 O_1 を原点とした $\partial Z/\partial T|_{T=T_1}$ を式(15)によって計算する。

②第2ステップ：無次元時間 $T_2 = T_0 + 2\Delta T$ における

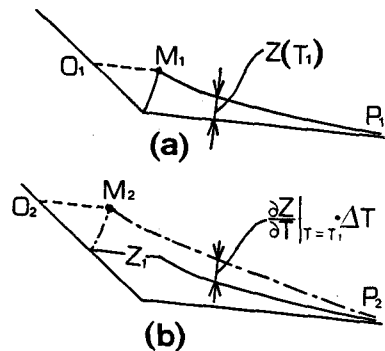


図-6 数値計算のための堆積形状の模式図

堆積形状を求める。第1ステップで求めた Z_1 と $\partial Z / \partial T|_{T=T_1}$ を用いて $Z(T_2) = Z_1 + \partial Z / \partial T|_{T=T_1} \cdot \Delta T$ を計算し、図-6(b)に一点鎖線で示す。 $Z(T_2)$ の最大点 M_2 から、下流側水路に平行に伸ばした直線と上流側水路との交点を O_2 とし、第3ステップでの流入点とする。このとき、曲線 $O_2 M_2 P_2$ が時刻 T_2 での堆積形状 Z_2 となる。次のステップの準備として、 O_2 を原点とした $\partial Z / \partial T|_{T=T_2}$ を式(5)を用いて計算する。

以後、同様な操作を繰り返し、第 N ステップでの堆積形状 Z_N および遡上する堆積の後端 X_B の軌跡を得る。また、堆積の先端を便宜上粒径程度の堆積高を示す位置として定義すれば、 $Z = d \cos(\theta_u - \theta_d) / h$ となる位置を堆積先端の無次元距離 X_F として定義することができる。

このようにして求めた無次元堆積形状は、上流側水路勾配 θ_u 、流入する土石流の相対粒径 d/h 、底面での境界条件 u_0/u_g 、 C_0/C_* のみならず、堆積の先端や後端を決定する無次元パラメーターの $h/(\sin(\theta_u - \theta_d) \bar{x}_{gs})$ や $d \cos(\theta_u - \theta_d) / h$ などを通じて下流側勾配 θ_d にも規定される。しかしながら、 θ_d を含む項は、本論文が取り扱っている勾配の範囲内では、 θ_d の変化に対して2%程度変化するにすぎない。したがって、下流側勾配は無次元堆積形状にはあまり影響を与えないことが分る。

図-3の実線は無次元堆積形状の計算曲線を示したもので、固定床、移動床、それぞれの特徴が計算曲線に現われ、実験結果と概ね適合している。

さらに、図-4に堆積の先端と後端の軌跡の計算曲線を示した。Case A、Cにおいてはいずれの下流側勾配についても軌跡はほぼ一致し、上述したように、 θ_d はパラメーターとしてはほとんど効かない。また、移動床の場合は、堆積の上流側水路への遡上が固定床の場合に比して速い。このように計算値はかなり良く実験結果を説明している。しかしながら、堆積先端の軌跡については、 $T=3$ 付近から実験と理論が適合しなくなるが、これは、計算において、勾配の変化を考慮していないためと考えられる。

6. 結び

以上、勾配の急減によって生じる土石流の2次元堆積問題をラグランジュ的な手法を用いて解析し、堆積を規定する無次元量を明らかにした。その結果、堆積には上流側の流入条件が重要な役割を果たすのに対し、下流側の勾配などは主要な役割を果たさないことが分った。さらに、流入する土石流の特性に従って、それぞれ特徴的な堆積形態が生じることが明らかにされ、個々の粒子の減速・停止過程に着目したラグランジュ的な観点からのアプローチが十分な有効性をもっていることを示した。今後は、勾配の変化も考慮することにより土石流の流入後、十分に時間が経過したのちも計算を可能にするよう、研究を進めるとともに、より実際的な拡張を伴う3次元堆積問題を取り扱う予定である。

最後に、本研究の解析において貴重な御助言をいただいた九州大学工学部の平野宗夫教授および実験やデータ整理に際し熱心に協力された藤田和夫技官、富永浩、榎村康史の諸氏に深甚なる謝意を表します。

参考文献

- 1) 椿東一郎・橋本晴行：土石流の勾配急変による堆積機構，第28回水理講演会論文集，1984。
- 2) 高橋 保：土石流の発生と流動に関する研究，京都大学防災研究所年報，第20号B-2，1977。
- 3) 椿東一郎・橋本晴行・末次忠司：土石流における粒子間応力と流動特性，土木学会論文報告集，第317号，1982。
- 4) Hashimoto, H and T.Tsubaki: Characteristics of debris flow with a plug, Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyushu University, Vol.44, No.3, 1984。