

Bed material loadにおける saltationから浮遊への遷移機構のモデル化 Modeling of Transition Mechanism from Saltation to Suspension in Bed Material Load Transport Process

京都大学工学部 正 員 中 川 博 次
金沢大学工学部 正 員 辻 本 哲 郎
京都大学工学部 正 員 村 上 正 吾
○ 京都大学大学院 学生員 森 持 和 洋

1. まえがき

移動床過程で重要な河床での砂粒子の交換現象（運動と停止）に着目すると、掃流砂・浮遊砂の統一的理解にもとづいた bed material load の、しかも非平衡性を意識したモデリングが必要であり、著者らはそれを目的として研究を進めている。本論文はその一環としてとくに重要な、saltation 粒子が浮遊状態に遷移する機構をモデル化しようとしたものである。

一般に流砂量の推定に当っては便宜上、掃流砂と浮遊砂に分けてそれぞれ異なるタイプの流砂モデルを適用するが、両者の明確なあるいは物理的に合理的な区分は簡単でない。従来、掃流層や“ceiling of bed load layer”なる概念により、運動領域によって区分する方法が用いられているが、粒子運動に着目した観点からは non-sense である（たとえば、渦流による流砂運動を、巻き上がっているからという理由だけで、浮遊砂と同一視すべきだろうか？）、また浮遊砂の拡散による濃度分布の特性上、掃流層の ceiling を決めるときの誤差が、流砂量に大きな誤差を産むことになる。こうした点に鑑み、本研究では、まず、掃流砂と浮遊砂の定義を明確にした。すなわち、saltation に代表される確定論的運動軌跡からのずれの殆んどないものを掃流砂、乱れの効果により確定論的（平均値で規定される）軌跡から異常に逸脱してしまい、乱れによるむしろランダム運動の性状を示すに至ったものを浮遊砂と定義した。これによると、同じ砂でもある時は掃流砂、ある時は浮遊砂として（勿論ある時は河床材料として停止）挙動している。こうした定義は各挙動の相間の物理的区分規準を明確にするだろうし、現象に即応しかつ適用性の高い流砂モデルを構成するのに非常に有意義である。

2. bed material load の流送についてのモデルの基本

本研究では、濃度分布と粒子速度の積という形の、浮遊砂モデルについては通常の形式により、掃・浮遊砂を統一した bed material load 輸送モデルを構成しようとする観点がとられている。すなわち、総流砂量は、掃・浮流砂の濃度分布、粒子運動速度の鉛直方向分布をそれぞれ $C_B(y)$, $C_S(y)$, $u_B(y)$, $u_p(y)$ とおくと、次式で与えられる。

$$q_T = q_B + q_S = \int_0^h C_B(y) \cdot u_B(y) dy + \int_0^h C_S(y) u_p(y) dy \quad \dots\dots\dots (1)$$

q_T , q_B , q_S はそれぞれ総流砂量、掃流砂量、浮流砂量であり、また h : 水深である。 $u_B(y) \equiv \beta_B u(y)$, $u_p(y) \equiv \beta_S u(y)$ ($u(y)$: 流速分布), $\beta \equiv \beta_B / \beta_S$ とすると、

$$q_T = \beta_S \int_0^h \{ \beta C_B(y) + C_S(y) \} u(y) dy \equiv \int_0^h \tilde{C}(y) u(y) dy \quad \dots\dots\dots (2)$$

のようにみかけの総流砂濃度 $\tilde{C}(y)$ により、簡単な表記が可能となり、さらに、 $\tilde{C}(y)$ を表現できるようなみかけの流砂の拡散係数の概念とそれの評価へと考察を進める展望がひらける。

さて、掃流砂の鉛直方向の存在確率密度は不規則継続跳躍 (irregular successive saltation) の確率過程論的解析¹⁾によって求められ、それを $f_B(y)$ と書くと、掃流砂濃度分布は、

$$C_B(y) = v_* d \cdot f_B(y) \quad \dots\dots\dots (3)$$

となる。ここで v_* は無次元の掃流砂数密度、 d : 砂粒径であり、継続跳躍の数値模擬と中川らによる pick-up rate 推定式²⁾を用いて評価できる量である。

一方、浮遊砂濃度分布については、前報³⁾の基本的考え方を発展させて次のように考えた。浮遊砂といえども河床からの離脱は掃流砂と共通で、ひとまず saltation 運動にはいる。平均的な流体力や河床での反発により saltation 粒子が持ち上げられていることが、乱れによって持ち上げられている浮遊砂と異なる点である。いま saltation 運動によって $y = y_B$ まで砂が持ち上げられて存在していると考え。もし、 $y = y_B$ で浮遊砂に遷移すれば図-1に示すようにそこから不規則運動にはいり、例えば酔歩確率過程モデル等により Lagrange 的にその後の粒子挙動（この状態が浮遊砂）を追跡し得る。こうした解析によって $y = y_B$ を出発点とする浮遊粒子（河床に到達すると、河床材料、もしくは掃流砂に一旦変質すると考える）の条件付鉛直方向存在高さ分布 $f_S(y|y_B)$ や、浮遊砂としての平均継続時間 $E[T_R|y_B]$ 、その間の平均存在高さ $E[H_R|y_B]$ 等を知ることができる。もし、浮遊砂の拡散源が $y = y_B$ であると考えた場合、すなわちこうした条件付の浮遊砂濃度分布 $C_S(y|y_B)$ は、 $y = y_B$ での値 $C_S(y_B|y_B)$ が $C_B(y_B)$ に関係づけられると考え、次式のように書ける。

$$C_S(y|y_B) = p_T(y_B) C_B(y_B) \cdot \hat{f}_S(y|y_B) \quad \dots\dots\dots (4)$$

但し、 $p_T(y_B) \equiv C_S(y_B|y_B)/C_B(y_B)$ で、これは掃流砂が浮遊砂に遷移する確率と見なせる。また、

$$\hat{f}_S(y|y_B) \equiv f_S(y|y_B)/f_S(y_B|y_B) \quad \dots\dots\dots (5)$$

である。ところで、浮遊砂としての拡散に供される粒子は saltation 運動によって $y = y_B$ まで持ち上げられたものであるから、拡散源高のアンサンブル的な意味での分布は saltation 粒子の存在高さの分布とみなして差支えない。すなわちその確率密度は $f_B(y_B)$ である。また、全体として（アンサンブル的）の浮遊砂濃度分布 $C_S(y)$ は、 $C_S(y|y_B)$ を遷移高さの相違による浮遊継続時間の重みづけ平均によって次のように得られる。

$$C_S(y) = \int_0^h C_S(y|y_B) \cdot r_T(y_B) f_B(y_B) dy_B \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$r_T(y_B) = E[T_R|y_B] / \int_0^h \{E[T_R|y_B] f_B(y_B)\} dy_B \quad \dots\dots\dots (7)$$

式(6)に式(4)、(3)を代入して結局、次式を浮遊砂濃度の基本式として得る。

$$C_S(y) = \nu_* \int_0^h [p_T(y_B) r_T(y_B) \{f_B(y_B)\}^2 \cdot \hat{f}_S(y|y_B)] dy_B \quad \dots\dots\dots (8)$$

式(3)、(8)より、掃・浮流砂の濃度分布を構成しているものとし

て、 ν_* 、 $p_T(y_B)$ 、 $r_T(y_B)$ 、 $f_B(y_B)$ 、 $\hat{f}_S(y|y_B)$ が挙げられ、これらの評価が重要課題であることがわかる。このうち ν_* は先に述べたように不規則継続跳躍と、河床砂粒の初期移動に関する解析によって知られ、 $f_B(y_B)$ も不規則継続跳躍解析より知られる。一方、 $\hat{f}_S(y|y_B)$ 、 $r_T(y|y_B)$ は、式(5)、(7)よりわかるように、ランダム運動としての浮遊砂の挙動をモデリングできれば比較的容易に評価できる。もう一つの要素 $p_T(y_B)$ が、saltation から浮遊へ遷移する確率で、次章では、遷移機構に焦点を当て、その評価について検討する。

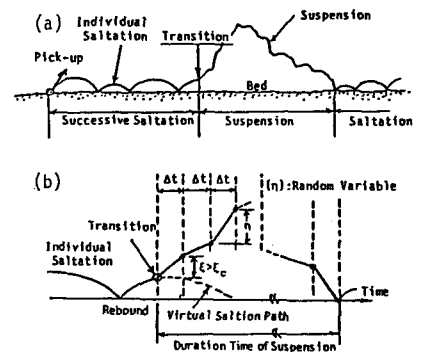


図-1 遷移機構の概念図

3. saltation から浮遊への遷移機構のモデル化

本章では、浮遊への遷移を乱れによる saltation 粒子の決定論的軌跡からのずれとしてとらえることから、遷移確率 $p_T(y_B)$ の評価について検討を行う。掃流砂について河床での上向き速度（個々の saltation の初速度） v_0 が与えられる（主として継続跳躍で床面との反発が主要因となっている）と、saltation 軌跡が特定される。すなわち、高さ y での状況（粒子速度や作用力等）が決まる。いま粒子運動に貢献し変質させ得るような影響力の大きい乱れが存在する場合を考える。すなわち、主流方向についての力関係を近似的に省略すると、その粒子の鉛直方向の運動は次式で支配されていると考えられる。

$$\rho \left(\frac{\sigma}{\rho} + C_M \right) A_3 d^3 \frac{dv_g}{dt} = \frac{1}{2} C_D \rho |v' - v_g| (v' - v_g) A_2 d^2 - \rho \left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right) A_3 g d^3 \quad \dots\dots\dots (9)$$

但し、 A_2, A_3 ：砂の形状係数、 σ ：砂の密度、 ρ ：水の密度、 v_g ：砂粒の上向き速度、 C_M ：付加質量係数、

$$\xi_*(\eta) \equiv \xi/d = K_\xi \{ |\omega - v_*| \cdot (\omega - v_*) + |v_*| \cdot v_* \} \quad (10)$$
$$K_f \equiv [C_D A_2 / \{4 A_3 (a/\rho + C_M)\}] \cdot (h/d)^2 \cdot (\Delta t_*)^2 \quad (11)$$

(a) 上昇時 ($v_a \geq 0$ の場合)

$$v_* \{ 1 + \sqrt{(\xi_{*c}/K_{\xi} v_*^2) - 1} \} \quad \omega \geq \omega_c \quad \dots \dots \dots (12)$$

$$\omega_c = \begin{cases} v_* \left(1 - \sqrt{1 - (\xi_{*c}/K_F v_*^2)} \right) & \omega < \omega_c \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{cases} \quad (13)$$

$$v_* \{ 1 - \sqrt{1 + (\xi_{*c}/K\xi v_*^2)} \} \quad \omega \geq \omega_c \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\omega_c = \begin{cases} v_* \{ 1 + \sqrt{-1 - (\xi_{*c}/K_F v_*^2)} \} & \omega < \omega_c \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{cases} \quad (15)$$

清水流の実験によると、 ω の変動はほぼ正規分布で

$$\sigma_w(\eta) = \sqrt{\{v'(\eta)\}^2 / u_*} = D_2 \exp(-\lambda_2 \eta) \quad \dots\dots\dots (16)$$
$$p_{Tj}^k(y|v_0) = 1 - \Phi(|\omega_{*Cj}^k|) \quad \dots\dots\dots (17)$$
$$p_T(y|v_0) = \sum_{k=1}^2 \{ \sum_{j=1}^2 p_{Tj}^k(y|v_0) \} / 2 \quad \dots\dots\dots (18)$$
$$p_T(y) = \int_{v_0}^{\infty} p_T(y|v_0) g_0(v_0) dv_0 / \int_{v_0}^{\infty} g_0(v_0) dv_0 \quad \dots\dots\dots (19)$$
$$E[v_{0*}] = 2.5 \sqrt{\tau_*}, \quad \sigma_*[v_{0*}] = 1.1 \sqrt{\tau_*} \dots\dots\dots (20)$$
$$q_*(\zeta) = \{ \tau / \Gamma(\tau) \} \cdot (\tau \zeta)^{\tau-1} \exp(-\tau \zeta) \quad \dots\dots\dots (21)$$

であり, shape parameter $r (=1/\alpha_0^2)$ は約5である。

以下に若干の計算例を示そう。まず, 著者らが併行して進めている実験的研究との比較を目的として, $d = 0.128 \text{ cm}$, $\sigma/\rho = 1.03$ (ポリスチレン粒子), $I = 1/500$ (I : エネルギー勾配), $h = 5 \text{ cm}$ の場合を考える。図-4 は $|\xi_{*c}|$ を0.1と1.0にとって $p_{Tj}^k(y|v_0)$ を計算した例で, ξ_{*c} の設定のし方により, 平均的な遷移確率, 遷移確率の鉛直方向変化プロファイル, また卓越する遷移相が大きく相違することがわかる。 ξ_{*c} の決定方法について現状では解析的なものを得ていないが, 今後こうした点に着目して基礎実験より評価方法を考えてゆきたい。

次に図-5は式(20), (21)を考慮し, 式(19)によって求めた $p_T(y)$ について, さらに次式によって鉛直方向に平均したもの $\overline{p_T}$ について, ξ_{*c} の設定のし方に影響を調べたものである。

$$\overline{p_T} \equiv \int_0^h p_T(y) f_B(y) dy \quad \dots\dots\dots (22)$$

なお, $f_B(y)$ は次のように与えた。すなわち辻本¹⁾の数值模擬の結果をも良く説明する吉川⁵⁾によって提案された式を用いた。

$$f_*(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp\{-(\xi-1)^2/2\alpha_y^2\} + \exp\{-(\xi+1)^2/2\alpha_y^2\}}{\Phi(1/\alpha_y) - \Phi(-1/\alpha_y)} \quad \dots\dots\dots (23)$$

但し, $\xi \equiv y/E[y]$, $E[y]$: 掃流砂れきの平均存在高さ, α_y : 掃流砂れきの存在高さの変動係数であり, $f_*(\xi) d\xi = f_B(y) dy$ である。また辻本¹⁾の数值模擬計算結果より, 次の近似式を用いている³⁾。

$$\psi_* \equiv E[y]/d = \{A_3(\sigma/\rho + C_M)/A_2 C_D\} \tau_*^{0.7} + (1/2), \quad \alpha_y = 0.65 \quad \dots\dots\dots (24)$$

図-5によると, 先に対象としたポリスチレン粒子の場合, ξ_{*c} の設定のし方により $\overline{p_T}$ が敏感に変化している。実験によっても知られるがこの条件では, 掃流砂が時々浮遊砂に遷移するといった状況で, 当然のことながらこうした「流砂様相の遷移領域」は過敏で取り扱いが困難となっている。図-5には, さらに, Vanoni⁶⁾の実験条件に対応した場合の $\overline{p_T} \sim \xi_{*c}$ 関係も併示した。Vanoniの実験条件の典型例とし, $d = 0.016 \text{ cm}$, $\sigma/\rho = 2.65$, $I = 1/400$, $h = 15 \text{ cm}$ の場合の計算結果で, 先の例に比べ, 一般に浮遊砂の卓越する相になれば ξ_{*c} の設定のし方に鈍感で $\overline{p_T}$ の値はほとんど1に近い。

さらに先のポリスチレン粒子を用いた粒子運動のビデオ画像解析結果との比較例を示そう。図-6では遷移高さの鉛直方向の分布を調べ, その結果をヒストグラムで表示している。遷移高さの鉛直方向分布は理論的には以下のように求められる。

$$f_T(y) = \overline{p_T}(y) f_B(y) = \overline{p_T}(y) f_B(y) / \int_0^h \{p_{Tj}^k(y) f_B(y)\} dy \quad \dots\dots\dots (25)$$

図-6中の点線は, ビデオ解析より50個以上の至まされない saltation 粒子の軌跡をもとに求められた実測の $f_B(y_B)$ (saltation 粒子の存在高さ分布の密度関数) である。これと, 式(19)によって求められた理論的な $p_T(y)$ とによって求められたのが, 図-6中の実線で, 先のヒストグラムと概ね良好に対応している。現在のところ計測例も少なく, 今後, こうした手法でモデルの妥当性を吟味してゆきたいと考えている。

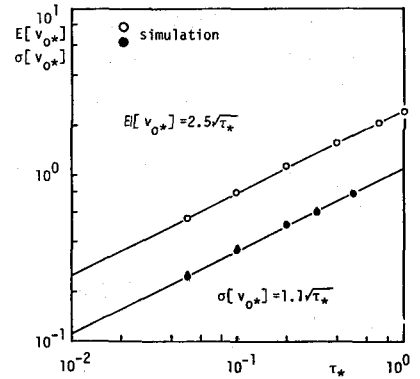


図-3 初速度 v_0 の平均値と標準偏差

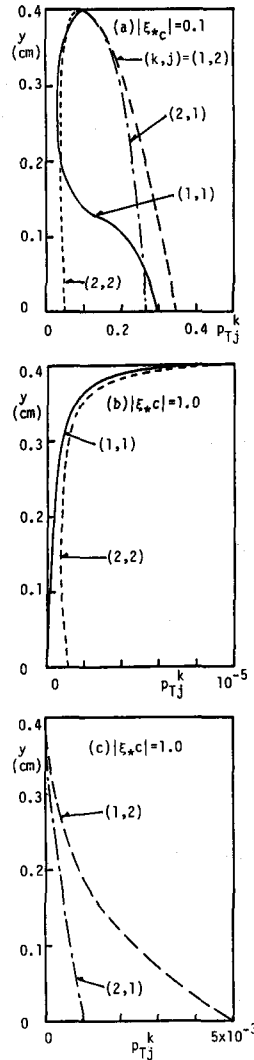


図-4 遷移確率 p_{Tj}^k

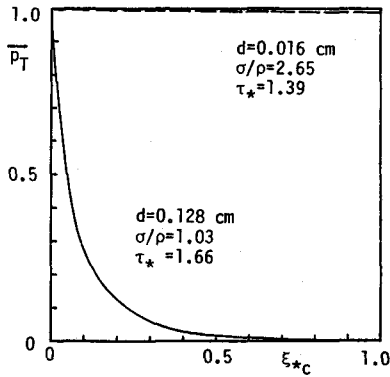


図-5 $\overline{p_T} - \xi_{*c}$ の関係

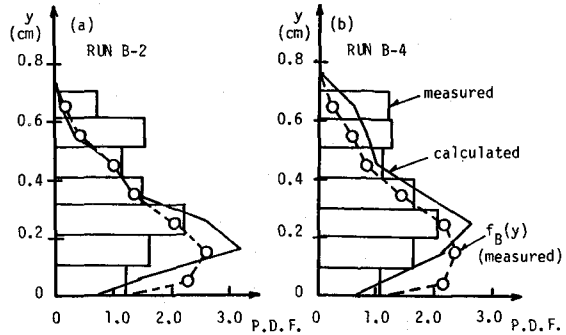


図-6 遷移高さの確率密度分布

4. 適当な近似と計算例の実験資料との比較

第2章の基本モデルの線に沿って、これまでの研究成果をもとに若干の近似を行い、計算例と実験資料との比較を行い、モデルの構成だけでなく、全体量的な面でのモデルの妥当性を便宜的にチェックしておく。

掃流砂については、その存在確率密度を式(23)で近似して用い、そのパラメータとなる $E[y]$ 、 α_y については不規則継続跳躍現象の数値模擬計算結果である式(24)を用いる。 ν_* については、既製の平衡状態の掃流砂量式 $q_{B*} \equiv q_B / \sqrt{(a/\rho - 1)gd^3} = \phi_B(\tau_*)$ を用いて、次式で与えることとする。

$$\nu_* = \phi_B(\tau_*) / \sqrt{\tau_*} \cdot \phi_* \quad (26)$$

$$\phi_* \equiv \overline{u_B}/u_* = (1/\kappa) [\ln \{ 30.1 \psi_*(\tau_*) \chi(Re_*) \}] \quad (27)$$

ここで $\overline{u_B}$ は掃流砂の平均運動速度で、 $y = E[y]$ の流速と等置しており、 κ : Kármán 定数、 $\chi(Re_*)$: 流速分布の砂粒 Reynolds 数 (Re_*) による補正係数である。

一方、簡単のため、 $\hat{f}_S(y|y_B)$ は、Rouse 式で類推する。すなわち相対存在確率密度分布と相対濃度分布を同一視することである。ランダム運動の確率モデル等、種々のアプローチより、今後改良されてゆくべき部分の一つである。すなわち、

$$\hat{f}_S(y|y_B) = \{ (h-y)/y \} \{ y_B/(h-y_B) \}^Z \quad (28)$$

但し、 $Z \equiv w_0/\beta_0 \kappa u_*$ 、 $\beta_0 \approx 1.2$ 、 w_0 : 砂粒子の沈降速度である。このとき、 $E[H_R|y_B]$ 、 $E[T_R|y_B]$ はそれぞれ次のように近似的に求められよう。

$$E[H_R|y_B] = \int_0^h y \hat{f}_S(y|y_B) / \int_0^h \hat{f}_S(y|y_B) \quad (29)$$

$$E[T_R|y_B] = E[H_R|y_B] / w_0 \quad (30)$$

これより、式(7)を用いて $\tau_T(y_B)$ を決定することができる。但し、 $y_B \ll h$ であることが多く、一般に $E[T_R|y_B]$ は掃流力、粒子の条件が同じならば大差なく $\tau_T(y_B) = 1$ とおける場合が多い。

遷移については、図-5で Vanoni の実験の場合で示されたように、一般に浮遊砂を対象とする場合(本研究では、掃・浮遊砂の混在を対象としているが、本章に限れば、モデル全体の定量的なものの掃流力との関係の妥当性を調べるため浮遊砂の卓越するような相を考えてみる)、 ξ_{*c} が $\overline{p_T}$ に与える影響は小さく、また平均的に $\overline{p_T} \rightarrow 1$ となるため、便宜上、 $\overline{p_T}(y) \approx 1$ とおいてみよう。

上記の近似を行うと、掃流砂濃度、浮遊砂濃度はそれぞれ次式で与えられることとなる。

$$C_B(y) = \{ \phi_B / (\phi_* \psi_* \sqrt{\tau_*}) \} \cdot f_*(y/\psi_* d) \quad (31)$$

$$C_S(y) = \frac{\phi_B}{\phi_* \psi_* \sqrt{\tau_*} d} \int_0^h \left\{ \frac{y_B(h-y)}{y(h-y_B)} \right\}^Z \cdot \left\{ f_* \left(\frac{y_B}{\psi_* d} \right) \right\}^2 dy_B \quad (32)$$

これらは、前報³⁾と殆んど変らない。ここで求められた浮遊砂濃度は絶対濃度で、いわゆる基準面濃度の評価の必要はないが、従来の方法での流砂量推定についての便宜を図る意味で $y = 0.05h$ を基準面とする基準面

濃度 C_a を求めると次のようである。

$$C_a = \frac{\Phi_B (h/d)^2}{\phi_* \psi_* \sqrt{\tau_*}} \int_0^1 \left(\frac{19 \eta_B}{1 - \eta_B} \right)^2 f_* \left(\frac{\eta_B h}{\psi_* d} \right) d \eta_B \quad (33)$$

但し $\eta_B \equiv y_B/h$ である。一般に土砂の性質はパラメータ $\Xi \equiv (\sigma/\rho - 1) g d^3/\nu^2$ (ν : 動粘性係数) で表われ、水流の条件は u_* と I 、または u_* と (h/d) で与えられる。式 (33) によると、 C_a と w_0/u_* との関係は Ξ と I 、又は Ξ と (h/d) に依存している。

図-7 には $C_a \sim w_0/u_*$ 関係を、実測値と本モデルの近似計算とで比較したものである。図-7 (a) は芦田⁷⁾の小規模実験水路での実測値との比較で、実測された Kármán 定数 ($\kappa = 0.37$) を用いている。一方、実河川では Kármán 定数は大きく変化するので、その考慮も必要となってくる。最近の Karim⁸⁾ による回帰式は次式で表われ、実河川データに適合するとともに、掃流砂量から Kármán 定数の変化を判定できるという、本モデルの予測システムに都合の良い形をとっている。

$$\kappa = \kappa_0 - 0.078 \ln \{ 1 + 60.6 (u_*/w_0) \Phi_B / [(C/\sqrt{g}) \cdot \tau_*^{3/2}] \} \quad (34)$$

ここで κ_0 : 静水流の Kármán 定数 ($\kappa_0 = 0.4$)、 C : Chézy 係数 (たとえば対数則で h/d の関数として与えられる) である。こうして計算される Kármán 定数を用いて計算した $C_a \sim w_0/u_*$ 関数を Lane⁹⁾ の実河川資料と比較したのが図-7 (b) である。図-7 (a), (b) のいずれも比較的良好に定量的一致をみていると判断できる。

5. あとがき

本研究では前報をさらに発展させて bed material load の流砂モデルの構成を明確にして、その要素の評価法を検討した。とくに、掃・浮遊砂の遷移は、両現象の本質を明らかにする上でも重要で、一つの考え方を示してモデル化した。モデルは一部ビデオ画像解析によって検証した。さらに、流砂モデル全体としての定量的妥当性を確保すべきであるとの観点から、現状では若干性急とはいえ、流砂モデルの構成要素についてそれぞれ適当な近似を検討、近似モデルの計算結果と従来の実験資料とを比較しておいた。今後さらに各要素のモデル化の洗練を図るとともに、非平衡状態への適用という面へも研究を進めてゆきたいと考えている。

なお、本研究の遂行に当り、昭和59年度文部省科学研究費・一般研究 (B) 「水流と流砂の相互作用に関する研究」(代表: 中川博次) の補助を得た。

参考文献

- 1) 辻本・中川: 土木学会論文集, 第345号Ⅱ-1, 1984.
- 2) 中川・辻本: 土木学会論文報告集, 第245号, 1975.
- 3) 中川・辻本・村上・小藪: 第28回水理講演会論文集, 1984.
- 4) Nakagawa, Nezu and Ueda, Proc. JSCE, No. 241, 1975.
- 5) Kikkawa and Yamada: Proc. 3rd Int'l Symp. on Stochastic Hydraulics, Tokyo, 1980.
- 6) Vanoni, Trans. ASCE, No. 111, 1946.
- 7) 芦田・道上: 京大防災研年報, 第13号B, 1970.
- 8) Karim and Kennedy: Proc. 2nd Int'l Symp. on River Sedimentation, Nanjing, 1983.
- 9) Lane and Kalinske; Trans. A. G. U., Vol. 22, 1941.

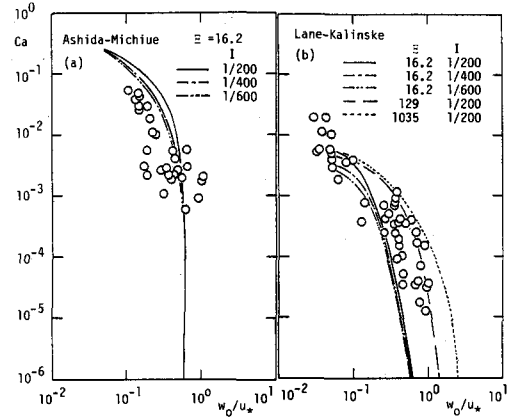


図-7 C_a と w_0/u_* の関係