

波状河床上の転動粒子について
Motion of a particle rolling along a wavy boundary

早稲田大学 大学院 学生員 大 貫 博 史
早稲田大学 理工学部 学生員 城 衛
早稲田大学 理工学部 学生員 藤 堂 憲 幸
早稲田大学 理工学部 生 員 吉 川 秀 夫

1. はじめに

移動床でみられる掃流砂れきの流送やそれに伴う砂れんの発生、発達などの機構は、個々の砂れきの運動に内在する固有の特性にもとづいて解明されるべきである。こうした立場から、本研究では水面形により特徴的な底面せん断応力分布をもつ波状河床上の流れにおいて、その河床に沿って転動する粒子の転動機構に着目し、その河床粒子に作用する流体力の特性について実験的考察を行なった。

2. 波状河床上の流れ

波状河床上の流れの特性は水面形により特徴づけられる。河床粒子に作用する流体力の要因となる底面せん断力を測定し、その算定を試みた。

実験水路は幅15cm、全長5mの開水路で、河床は図1に示すような規則的な正弦波型であり、波長Lは50cm、波高は5cmである。実験条件は表1に示す。流速分布の測定はビトー管を使用し、底面せん断応力は内外径比0.6のビトー管を底面に密着させて測定した。各ケースの水面形と底面せん断応力の測定結果を図2から4に示す。

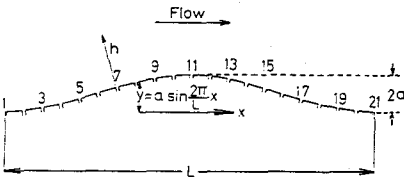


図1. 河床波の模型図

表1 実験条件

Case	水 面 形	単位幅流量	平均河床勾配
1	射 流	540 (cm/sec/cm)	1/20
2	シュート&プール	540	1/20
3	常 流	540	1/93

底面せん断応力分布は水面形により特徴的な分布を示す。射流の場合、河床波の登り部で底面せん断力がピークとなる。シュート&プールでは流れがシュートする河床波の下り部で、常流では河床波の山の少し上流側で底面せん断応力がピークとなる。

次に底面せん断応力を片山等⁽¹⁾の手法により抵抗側により求める。粗面において $\frac{1}{n}$ 乗則の流速分布をもつ完全乱流域領域の摩擦損失係数 f は

$$f = C_1 (k_s / D)^{1/C_2} \tag{1}$$

C_1, C_2 : 定数、 k_s : 相当粗度、 D : 管径

と表わされる。ムーディ図表を参照して大きなレイノルズ数に対しての係数 C_1, C_2 を求めると、近似的に

$k_s / D \leq 2 \times 10^{-3}$ のとき
 $C_1 = 7.76 \times 10^{-2}, C_2 = 4.95$
 $k_s / D > 2 \times 10^{-3}$ のとき
 $C_1 = 1.22 \times 10^{-1}, C_2 = 3.12$

となる。開水路の場合、境界層厚 $\delta = D / 2$ とおいて、 C_1, C_2 を式(1)に代入してせん断力の式を整理すると、次に示す n 乗則の

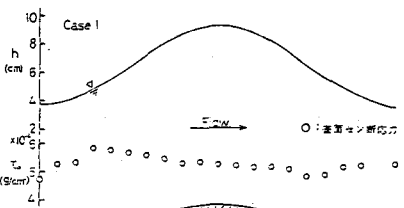


図2. τ_0 と水面形

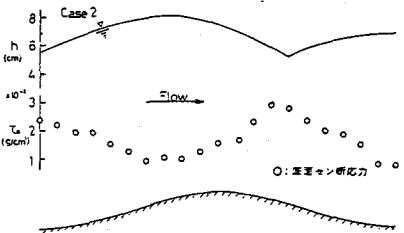


図3. τ_0 と水面形

流速分布に対する抵抗則を得る。

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \left\{ \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)} \right\}^2 U^2 \frac{C_1}{8} \left(\frac{2\delta}{k_s} \right)^{-1} / C_2 \quad (2)$$

U : 最大流速

各ケースの流速分布にベキ乗則をあてはめて n を求め、又 δ は U_{max} までの河床からの距離とする。これらを式(2)に代入して底面せん断応力を求めたものを図5から7に示す。

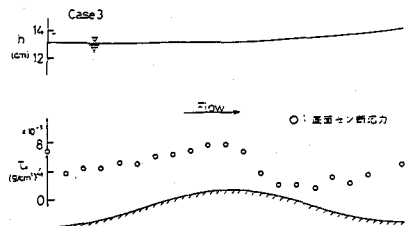


図4. τ_0 と水面形

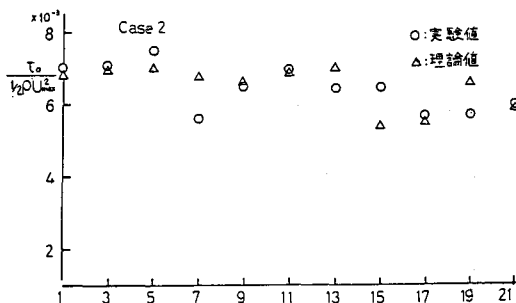


図6. 底面せん断応力分布

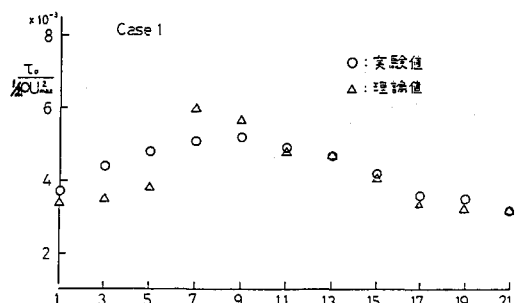


図5. 底面せん断応力分布

式(2)からの理論値は実験値によく適合し、波状河床上の流れは流速分布を知れば底面せん断応力を算定することができる。

次に常流の場合についてポテンシャル解析を行ない、河床流速 U の2乗と底面せん断応力の関係を図8、に示す。河床波の登り部では U^2 と τ_0 の比例関係にみられるが、河床の山を越えた領域は剝離をしているために相関はみられない。

3. 滑面上の単一粒子の転動機構

流体中の滑面上の単一粒子の運動は次式で表わされる。(図9参照)

$$m_1 \ddot{v} = -F + D + m_2 g \sin \theta \quad (3)$$

$$m_1 k^2 \dot{\omega} = F \cdot \frac{d}{2} - M_F \quad (4)$$

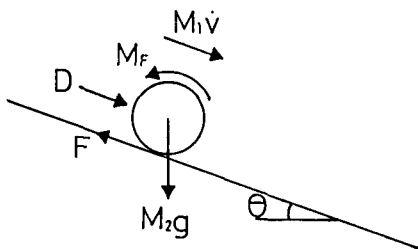


図9. 概念図

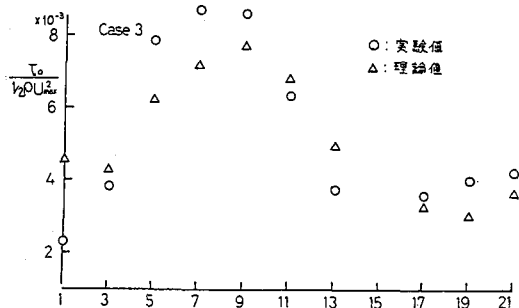


図7. 底面せん断応力分布

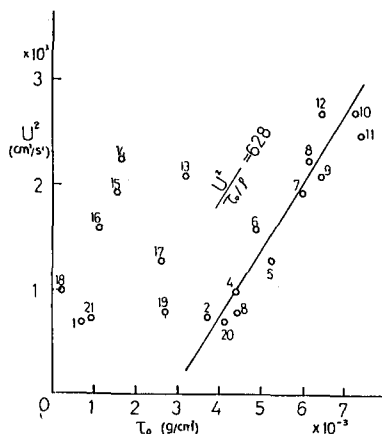


図8. $U^2 - \tau_0$ 図

ここに、 m_1 ：粒子の仮想質量、 m_2 ：粒子の水中質量、 F ：摩擦力、 D ：抗力、 M_F ：流体中で回転する粒子に働く抵抗モーメント、 k ：粒子の重心まわりの回転2次半径、 v ：転動速度、 ω ：転動の角速度である。

従来の研究では水流の抵抗モーメント M_F が無視されており、みかけの摩擦係数あるいはみかけの抗力係数⁽²⁾が導入されている。しかし、完全転動をする粒子に働く摩擦力は底面の乗直抗力に比例しないし、またみかけの抵抗係数も、同じレイノルズ数に対してはばらつきが倍以上もあり粒子の運動速度の見積りに大きな差を生じている。そこで、式(3)、(4)中の不明確なパラメーターである、抵抗モーメント M_F 、摩擦力 F 、みかけの抵抗係数 C_D' を、粒子の水中沈降実験、斜面転動実験により間接的に検討をしてみる。

さて、式(3)、(4)に含まれる各量は次のようになる。

$$m_1 = \frac{\pi}{6} d^3 \rho_f (\sigma_s + C_M) \tag{5}$$

$$m_2 = \frac{\pi}{6} d^3 \rho_f (\sigma_s - 1) \tag{6}$$

$$D = \frac{1}{2} C_D' \rho_f A |U - v| (U - v) \tag{7}$$

ここに、 d ：粒径、 ρ_f ：流体密度、 C_M ：付加質量、 σ_s ：球の比重、 C_D' ：壁に沿って回転する球のみかけの抗力係数、 A ：球の投影面積、 U ：流体からの代表流速である。ここ、静水中沈降時の C_D の値は Reynolds 数が十分大きい場合は約 0.4 であるが、みかけの抗力係数 C_D' は 1～10までの倍以上の大きな値をとる。これを、抵抗モーメント M_F によるものと考えて、みかけの抗力係数 C_D' を次のようにする。

$$C_D' = C_D + C_F \tag{8}$$

ここで、 C_F は抵抗モーメント M_F による流体力係数である。まず、壁に接して回転をしない球の抗力係数 C_D を求めてみた。実験は、抵抗モーメント M_F と摩擦力下を取り除くために、球2個をつなげて、静水中での平衡沈降速度を測定した。(図10参照) 実験結果は図11に示すように、抗力係数 C_D は、Reynolds数が500～25,000の間で、0.6から1.3ぐらいの値となっている。このことにより、壁に球が接しているときのほうが、そうでないときより、流体から受ける力が大きいことがわかる。

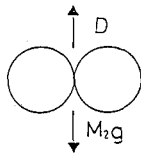


図10. 実験図

次に式(8)の C_F を求めるために、抵抗モーメント M_F について考えてみる。まず、静水中で球の運動が定常状態を考える。球が回転しないで壁にそって速度 v で移動する運動は、球を壁に固定して、それに速度 v の一様流が当ると同じで、そこでは摩擦力 F を考えなくてよい。(図12参照) 次に、この球が完全回転をしながら壁にそって速度 v で移動する運動は、同様に球を固定して考えると、それに図13のような直線分布の流体流速が球に当るものと考えられる。この場合の抗力 D は先の球が回

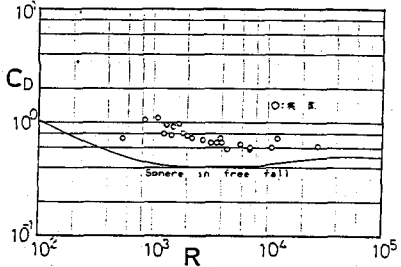


図11. $C_D - R_{ed}$ 図

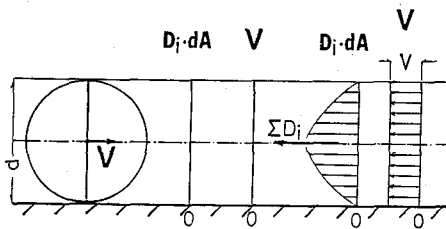


図12. 概念図

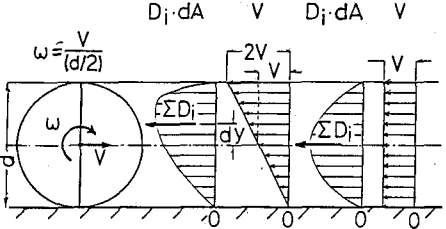


図13. 概念図

転しない場合と移動速度 u が同じなので、抗力 D は同一のものである。よって、みかけの抗力係数 C'_D が、抗力係数 C_D より大きくなるのは、式(8)に示すように図13に示す流速分布による流体力の合力 D_F の偏心、つまり抵抗モーメント M_F によるものである。

この考えをもとに、抵抗モーメント係数 C_F を式(7)、(8)より求めてみる。流速分布による流体力の合力 D_F を、その球の運動に対する抗力係数 C_D を用いて表わせるとすると、

$$\begin{aligned}
 D_F &= \frac{1}{2} C_D \rho_f \int_{-d/2}^{d/2} 2\sqrt{(d/2)^2 - y^2} \left(u + \frac{u}{d/2} y\right)^2 dy \\
 &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{4} C_D\right) \rho_f \cdot \frac{\pi}{4} d^2 u^2
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

となる。よって、回転による流体力係数 C_F と、みかけの抗力係数は

$$C_F = \frac{5}{4} C_D \tag{10}$$

$$C_D = \frac{9}{4} C_D \tag{11}$$

となる。次に流体力の合力 D_F がかかる位置は

$$\begin{aligned}
 \Delta y &= \frac{\int_{-d/2}^{d/2} 2y\sqrt{(d/2)^2 - y^2} \left(u + \frac{u}{d/2} y\right)^2 dy}{\int_{-d/2}^{d/2} 2\sqrt{(d/2)^2 - y^2} \left(u + \frac{u}{d/2} y\right)^2 dy} = \frac{1}{5} d
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

となり、球の中心よりも $1/5$ d 上方に D_F がかかる。

ここまでは、定常状態での解析であるから、式(4)、(7)、(8)、(9)より摩擦力 F は

$$F = \frac{2}{d} M_F = \frac{\pi}{16} C_D \rho_f d^2 u^2 \tag{10}$$

となる。以上のことより、静水中の滑面斜面上の球の平衡転動速度 u_0 は、式(3)~(10)より

$$u_0 = \sqrt{\frac{16}{33} \frac{(\sigma_s - 1) g \sin \theta}{C_D}} \tag{11}$$

となる。静水中滑面斜面上の平衡転動速度 u_0 を測定し、式(11)の妥当性は、図14~18で確認された。

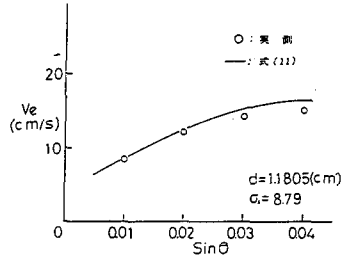


図14. $V_0 - \sin \theta$ 図

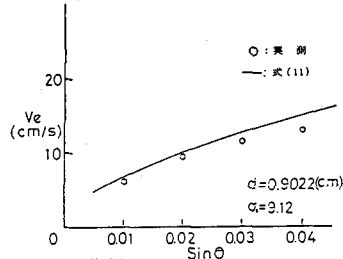


図15. $V_0 - \sin \theta$ 図

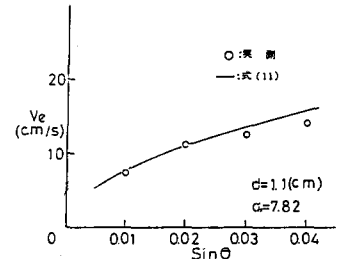


図16. $V_0 - \sin \theta$ 図

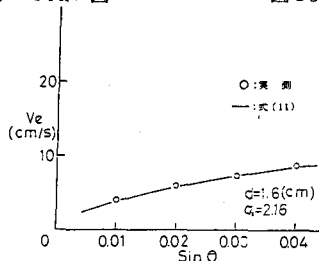


図17. $V_0 - \sin \theta$ 図

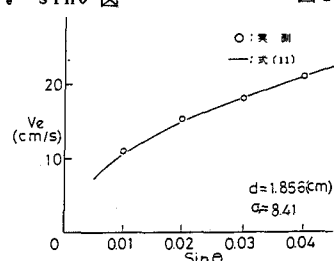


図18. $V_0 - \sin \theta$ 図

4. 波状河床上の粒子に作用する流体力

流体の流速が対数分布をもつ流れの河床に静止している粒子が受ける流体力は図19に示すように考える。ここでは、粒子に作用する流体力の合力が偏心する、回転させようとする次のような流体力が作用する。

$$D = \frac{1}{2} \rho_f C_D \int_0^d U^2 dA \quad (12)$$

$$\Delta y = -\frac{\sum y_i D_i}{\sum D_i} \quad (13)$$

ここで、流速 u は滑面で

$$u = u_* \left(5.5 + 5.75 \log_{10} \frac{u_* y}{\nu} \right) \quad (14)$$

となる。先に述べた波状河床上の流れは、各ケース（射流、シュート&プール、常流）とも河床付近では流速分布が対数則に従うので、式12、14より河床に静止している粒子に作用する流体力 D を求め、そしてその粒子の重力成分を考慮したものを、図20～22に示す。

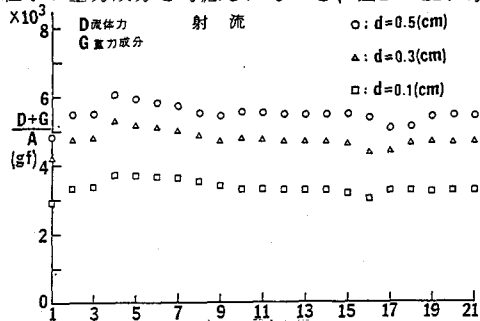


図20. 作用力分布図

流れ方向の単位面積当たりの流体力と重力成分の分布は、底面せん断応力の分布と同じである。これは流体力が重力成分より十分大きいためである。

開水路における掃流力は

$$\tau = \rho g h i \quad (15)$$

となる、ここで h : 水深、 i : エネルギー勾配である。波状河床上の流れでの各ケースの河床一波長当りの掃流力 τ を式15より表2に示す。この掃流力 τ と図20から図22に示す、河床一波長当りの掃流力 τ_D と比較すると、 10^4 から 10^5 まで違うことがわかり、又粒径によっても変化することがわかる（図23参照）。式15の掃流力 τ は掃流のめやすになるが、実現象においては、河床近傍での状態を知らなければならない。

表2 掃流力 τ

Case	平均水深 h (cm)	エネルギー勾配 i	掃流力 τ (gf/cm ²)
1	3.77	1/19	0.204
2	4.37	1/100	0.044
3	11.02	1/500	0.022

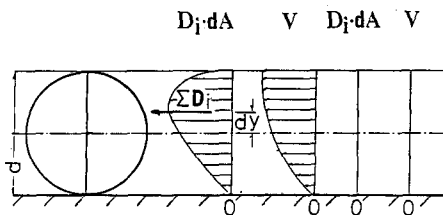


図19. 概念図

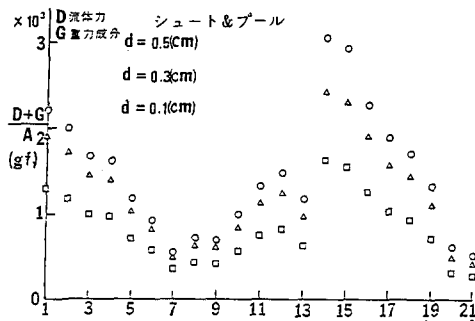


図21. 作用力分布図

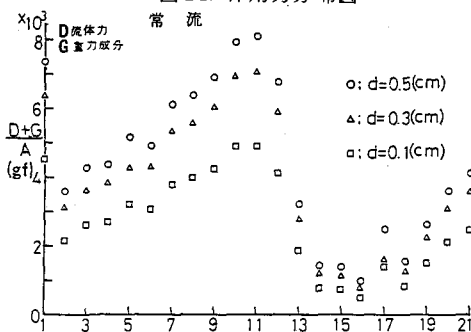


図22. 作用力分布図

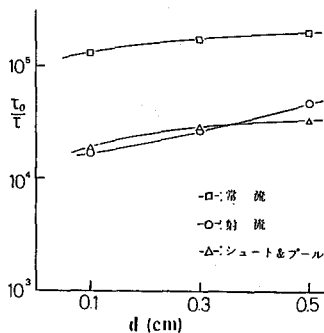


図23. $\tau_D / \tau - d$ 図

5. 結 語

本論文では、河床波をモデルとした波型上での流れの特性と、河床粒子の掃流力の要因となる底面せん断力の算定法を示した。又、定常状態における水中の壁に沿う粒子の運動に対する流体の抵抗モーメントの特性に着目し新たな知見を得た。しかし、実験結果の詳細な理解・検討はまだ十分なものではない。

今後はさらに、粒子の運動が非定常状態にまでひろげ研究を進めていく予定である。

6. 参考文献

- 1) 片山・福井・吉川：段落ち部近傍の底面せん断力、土木学会論文集、第342号、1984年2月、P 69 ~ 76
- 2) Garde R. J. and S. Sethuraman: Variation of the Drag Coefficient of a Sphere Rolling along a Boundary, La Houille Blanche, No. 7, P 727-732, 1969